Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 3, С. 3–8

УДК **512.5**

МОДУЛИ ТРАНСВЕКЦИЙ В НАДГРУППАХ НЕРАСЩЕПИМОГО МАКСИМАЛЬНОГО ТОРА[1]

Н. А. Джусоева, В. А. Койбаев

В работе изучаются модули трансвекций и кольца множителей подгрупп полной линейной группы $G = GL(n, k)$ степени n над полем k, содержащие нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, связанный с радикальным расширением $k(\sqrt[n]{d})$ степени n основного поля k нечетной характеристики (минизотропный тор). Получен полный список из $2 \cdot [(\frac{n-1}{2})^2]$ соотношений ($[\cdot]$ — целая часть числа) модулей трансвекций. Доказано, что все кольца множителей совпадают между собой, и модули трансвекций являются идеалами кольца множителей. При этом предполагается, что основное поле k является полем частных области главных идеалов.

Ключевые слова: надгруппы, промежуточные подгруппы, нерасщепимый максимальный тор, трансвекция, модуль трансвекций.

Настоящая статья продолжает работы З. И. Боревича и авторов [1–5] и посвящена исследованию трансвекций в подгруппах полной линейной группы $G = GL(n, k)$ степени n над полем k, содержащих нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, связанный с радикальным расширением $k(\sqrt[n]{d})$ степени n основного поля k нечетной характеристики (минизотропный тор). В работе получена исчерпывающая информация о модулях трансвекций, определенных промежуточной подгруппой H, $T(d) \leqslant H \leqslant G$. Точнее, получен полный список соотношений (и их число) модулей трансвекций, определенных промежуточной подгруппой. Доказано, что все кольца множителей совпадают между собой, а модули трансвекций являются целыми идеалами кольца множителей.

Мы предполагаем, что основное поле k является полем частных области главных идеалов Λ, $d \in \Lambda$, d — произведение различных (неассоциированных) простых элементов из Λ. Говорят, что подгруппа H «богата трансвекциями», если она содержит элементарные трансвекции $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$, $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$ на всех позициях (i, j), $i \neq j$. С промежуточной подгруппой H связаны модули трансвекций ($i \neq j$)

$$A_{ij} = A_{ij}(H) = \{\alpha \in k : t_{ij}(\alpha) \in H\}$$

и их кольца множителей

$$R_{ij} = R_{ij}(H) = R_{ij}(A_{ij}) = \{\lambda \in k : \lambda A_{ij} \subseteq A_{ij}\}.$$

Очевидно, что A_{ij} являются подгруппами аддитивной группы k^+ поля k (R_{ij}-модули).

Сформулируем основной результат работы.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00469. Результаты настоящей статьи были получены в рамках государственного задания Минобрнауки России.

Теорема. *Пусть H — промежуточная подгруппа, $T = T(d) \leqslant H \leqslant G = GL(n, k)$, содержащая элементарную трансвекцию. Положим $A_i = A_{i1} = A_{i1}(H)$, $i = 2, \dots, n$. Тогда*

1) *Подгруппа H богата трансвекциями, при этом имеет место формула*

$$A_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j < i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j > i. \end{cases} \tag{1}$$

2) *Пусть $n \geqslant 3$. Модули A_i, $i = 2, \dots, n$, подгруппы H связаны соотношениями:*

$$A_i A_j \subseteq \begin{cases} A_{i+j-1}, & i + j \leqslant n + 1; \\ \frac{1}{d} A_{i+j-1-n}, & i + j \geqslant n + 3. \end{cases} \tag{2}$$

Число соотношений «верхней» и «нижней» части формулы (2) совпадает и равно $[(\frac{n-1}{2})^2]$ ($[\ ]$ — целая часть числа). Число всех соотношений, задаваемых формулой (2) равно $2 \cdot [(\frac{n-1}{2})^2]$.

3) *Пусть A_{ij} являются Λ-модулями (т. е. $\Lambda \subseteq R_{ij}$ для всех $i \neq j$). Тогда все кольца множителей совпадают между собой: $R_{ij} = R$, причем A_{ij} — целый идеал кольца R, $A_{ij} \subseteq R$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.*

Замечание. В формулах (2) отсутствует случай, когда $i + j = n + 2$. Это связано с тем, что по формуле (1) модули A_i и A_j при $i + j = n + 2$ расположены симметрично относительно главной диагонали (и коммутаторная формула (3) не работает).

Следствие. *Пусть H — промежуточня подгруппа H, $T \leqslant H \leqslant G$, содержащая одномерное преобразование. Тогда подгруппа H богата трансвекциями и для модулей трансвекций A_{ij}, колец множителей R_{ij} подгруппы H справедливы утверждения 1)–3) теоремы.*

Напомним, что согласно критерию Эйзенштейна $x^n - d$ — неприводимый многочлен степени n над полем k. Этот многочлен определяет радикальное расширение $k(\sqrt[n]{d})$ степени n основного поля k. Образ мультипликативной группы поля $k(\sqrt[n]{d})$ при регулярном вложении ее в группу автоморфизмов n-мерного пространства $K = k(\sqrt[n]{d})$ является нерасщепимым максимальным тором $T = T(d)$ (минизотропный тор). Если зафиксировать естественный базис $e_i = \theta^{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, радикального расширения $K = k(\sqrt[n]{d})$, $\theta = \sqrt[n]{d}$, поля $K = k(\theta)$ над k, то группа автоморфизмов изоморфна полной линейной группе $G = GL(n, k)$, а тор $T = T(d)$ представляет собой матричную группу

$$T = T(d) = \{c(\overline{x}) = (c_{ij}) : \overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in k^n \setminus \bar{0}\},$$

где

$$c_{ij} = \begin{cases} x_{i+1-j}, & j \leqslant i; \\ dx_{n+i+1-j}, & j \geqslant i + 1. \end{cases}$$

В работе приняты следующие обозначения: $\pi = (1\ 2\ \dots\ n)$ — цикл длины n, (π) — матрица-перестановка, элементы которой определяются формулой: $(\pi)_{ij} = \delta_{i,\pi(j)}$, где δ_{rs} — символ Кронекера; для $\overline{x} = e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ положим $c = c(e_2) \in T$; e — единичная матрица порядка n; e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит $1 \in k$, а на остальных местах нули; $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$ — элементарная трансвекция $\xi \in k$, $i \neq j$; $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ — коммутатор элементов x, y.

Тор $T = T(d)$ содержит матрицу c, которая является элементом порядка n (по модулю скалярных матриц, $c^n = d \cdot e$). Точнее, матрица c является циклом длины n, а именно, она совпадает с матрицей-перестановкой (π) (за исключением позиции $(1,n)$, $c_{1n}=d$). Но так как мы пользуемся только «цикличностью» матрицы c, то (тор T содержит скалярные матрицы) можно считать, что промежуточная подгруппа $T\leqslant H\leqslant G$ содержит матрицу-перестановку (π).

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 1. *Пусть* $\pi=(1\ 2\ \dots\ n)$ — *цикл длины* n, *далее,* $\sigma=\pi^s$, $1\leqslant s\leqslant n-1$. *Тогда порядок* $|\sigma|$ *элемента* σ *равен*

$$|\sigma|=\frac{n}{(n,s)},$$

где $(n,s)=\text{НОД}(n,s)$, *причем этот порядок совпадает с наименьшим* m, *для которого* $\sigma^m(1)=1$: $|\sigma|=\min\{m:\ \sigma^m(1)=1\}$.

Предложение 1. *Пусть* $\sigma=\pi^{k-1}=(1\ 2\ \dots\ n)^{k-1}$, $2\leqslant k\leqslant n$. *Тогда переменные* x_k *в матрице* $c=(c_{ij})=c(\overline{x})$ (*и соответственно модули* A_k) *находятся на позициях* $(\sigma(i),i)$, $1\leqslant i\leqslant n$. *Точнее,*

$$c_{\sigma(i)i}=\begin{cases}x_k, & n\geqslant\sigma(i)>i;\\ dx_k, & \sigma(i)<i\leqslant n,\end{cases}\qquad A_{\sigma(i)i}=\begin{cases}A_k, & n\geqslant\sigma(i)>i;\\ dA_k, & \sigma(i)<i\leqslant n.\end{cases}$$

$\lhd$ Доказательство вытекает из формулы (1) и того, что $\sigma(i)-i=k-1$ при $\sigma(i)>i$ и $\sigma(i)-i=k-n-1$ при $\sigma(i)<i$. $\rhd$

Предложение 2. *Пусть* $\sigma=\pi^{k-1}=(1\ 2\ \dots\ n)^{k-1}$, $2\leqslant k\leqslant n$. *Предположим, что* $\sigma^2(1)\neq 1$ (*что эквивалентно согласно лемме* 1 *тому, что* $q=|\ \sigma\ |\neq 2$, *или* $\sigma^2\neq(1)$). *Тогда*

$$A_{\sigma(1),1}A_{1,\sigma^{-1}(1)}A_{\sigma^{-1}(1),\sigma^{-2}(1)}A_{\sigma^{-2}(1),\sigma^{-3}(1)}\\ \dots A_{\sigma^{-(q-2)}(1),\sigma^{-(q-1)}(1)}A_{\sigma^{-(q-1)}(1),\sigma^{-q}(1)}\subseteq A_{\sigma(1),1}.$$

$\lhd$ Доказательство вытекает из последовательного применения коммутационной формулы (3) (здесь используется условие $\sigma^2(1)\neq 1$) и предложения 1. $\rhd$

Замечание. Условие $|\sigma|=2$ в предложении 2 возможно лишь в случае $n=2m$, $k-1=m$.

Предложение 3. *Пусть* n *нечетно, или* $n=2m$, $k\neq m+1$. *Тогда*

$$d^tA_k^{q+1}\subseteq A_k,$$

где $q=|\sigma|$, $\sigma=\pi^{k-1}$, *причем* $t\leqslant q-1$.

$\lhd$ Доказательство вытекает из предложений 1 и 2, при этом нужно заметить, что $\sigma(1)=\sigma^{-(q-1)}(1)=k$, $\sigma^{-q}(1)=1$, $A_{\sigma(1),1}=A_{\sigma^{-(q-1)}(1),\sigma^{-q}(1)}=A_k$. $\rhd$

Из предложения 3 непосредственно вытекает следующее предложение.

Предложение 4. *Пусть* n *нечетно, или* $n=2m$, $k\neq m+1$. *Тогда* A_k — *целый идеал кольца* $R=R(A_k)$, $A_k\subseteq R=R(A_k)$.

Следующее предложение легко выводится из упражнения 4 [7, с. 92].

Предложение 5. *Пусть поле* k *является полем частных области главных идеалов* Λ, *далее,* R — *промежуточное подкольцо* $\Lambda\subseteq R\subseteq k$. *Тогда* R *является также областью главных идеалов, причем* $R=S^{-1}\Lambda$, *где* S — *мультипликативная система, порожденная множеством простых* P_R:

$$P_R=\left\{p\in P:\ \exists\,\frac{a}{b}\in R,\ (a,b)=1,\ p|b\right\},$$

где P — множество всех простых кольца Λ.

Лемма 2. *Пусть n — четно, $n = 2m \geqslant 4$. Тогда $A_{m+1} \subseteq R(A_2)$.*

$\lhd$ Имеем $A_2 A_{m+1} \subseteq A_{m+2}$, $dA_{m+2}A_{m+1} \subseteq A_2$, откуда $d(A_{m+1})^2 \subseteq R_2 = R(A_2)$. Следовательно, $A_{m+1} \subseteq R(A_2)$. $\rhd$

Лемма 3. *Пусть A — Λ-модуль, $A \subseteq k$, $R(A)$ — кольцо множителей модуля A. Пусть, далее, R_1 — промежуточное подкольцо, $\Lambda \subseteq R_1 = S_1^{-1}\Lambda \subseteq k$. Тогда*

1) *если $A \subseteq R_1$, то $R = R(A) \subseteq R_1$;*

2) *если $rR_1 \subseteq A \subseteq R_1$ ($r \in R_1$), то $R = R(A) = R_1$.*

$\lhd$ 1) Пусть $T = \langle A \rangle_{\text{ring}}$ — подкольцо поля k, порожденное модулем A (ясно, что T также является Λ-модулем). Очевидно, что $T \subseteq R_1$ (так как R_1 — кольцо). Далее, очевидно, что $R = R(A) \subseteq R(T)$, причем, так как T — кольцо, то $T \subseteq R(T)$ и T — идеал кольца $R(T)$, содержащего Λ (так как T является Λ-модулем). Следовательно, $R(T) = S_2^{-1}\Lambda$, $T = qS_2^{-1}\Lambda \subseteq R_1$. Отсюда (так как $T \subseteq R_1$) $S_2 \subseteq S_1$ и $R = R(A) \subseteq R(T) = S_2^{-1}\Lambda \subseteq S_1^{-1}\Lambda = R_1$.

2) Согласно 1) мы имеем $R = R(A) \subseteq R_1$. Далее, так как $A \subseteq R_1$, то $rR_1A \subseteq rR_1R_1 \subseteq rR_1 \subseteq A$, откуда $rR_1 \subseteq R(A)$ и, следовательно, $rR_1 \subseteq R(A) \subseteq R_1$. Так как $R(A)$ — кольцо с 1 и $\Lambda \subseteq R(A)$, (A — Λ-модуль), то $R(A) = S_3^{-1}\Lambda$. Но так как $rR_1 \subseteq R(A) = S_3^{-1}\Lambda$, то $S_1 \subseteq S_3$ $R_1 \subseteq R(A)$. И вновь из 1) мы имеем $R_1 = R(A)$. $\rhd$

Предложение 6. *Пусть $n = 2m$, $k = m + 1$. Тогда A_{m+1} — целый идеал кольца $R = R(A_{m+1})$, $A_{m+1} \subseteq R = R(A_{m+1})$.*

$\lhd$ Согласно (2) и лемме 2 мы имеем

$$A_2 \cdot A_m \subseteq A_{m+1} \subseteq R = R(A_2). \qquad (*)$$

Далее, согласно предложению 4 A_2, A_m — целые идеалы колец $R(A_2)$ и $R(A_m)$ соответственно, $\Lambda \subseteq R(A_2), R(A_m) \subseteq k$. Согласно предложению 5 $R(A_2) = S_2^{-1}\Lambda$, $R(A_m) = S_m^{-1}\Lambda$. Тогда согласно $(*)$ $S_m \subseteq S_2$ и $A_2 \cdot A_m$ — идеал кольца $R(A_2)$. Следовательно, из $(*)$ и предложения 5 мы имеем

$$rR(A_2) \subseteq A_{m+1} \subseteq R(A_2).$$

Таким образом, согласно лемме 3 мы имеем $R(A_{m+1}) = R(A_2)$ и, в частности, $A_{m+1} \subseteq R = R(A_{m+1})$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы. 1) Этот пункт теоремы вытекает из [3, 6].

2) Из коммутаторного соотношения

$$[t_{ir}(\alpha), t_{rj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta), \quad i \neq j,\ i \neq r,\ r \neq j, \qquad (3)$$

следует включение

$$A_{ir} \cdot A_{rj} \subseteq A_{ij}. \qquad (4)$$

С помощью включения (4) и формулы (1) рассмотрим возможные случаи и соответствующие им соотношения:

$$j < r < i \Longrightarrow A_{i+1-r}A_{r+1-j} \subseteq A_{i+1-j}, \qquad (5)$$

$$r < j < i \Longrightarrow dA_{i+1-r}A_{n+r+1-j} \subseteq A_{i+1-j}, \qquad (6)$$

$$j < i < r \Longrightarrow dA_{n+i+1-r}A_{r+1-j} \subseteq A_{i+1-j}, \qquad (7)$$

$$i < r < j \Longrightarrow dA_{n+i+1-r}A_{n+r+1-j} \subseteq A_{n+i+1-j}, \tag{8}$$

$$r < i < j \Longrightarrow A_{i+1-r}A_{n+r+1-j} \subseteq A_{n+i+1-j}, \tag{9}$$

$$i < j < r \Longrightarrow A_{n+i+1-r}A_{r+1-j} \subseteq A_{n+i+1-j}. \tag{10}$$

Положив в формуле (5) $s = i+1-r$, $t = r+1-j$; в формуле (9) $s = i+1-r$, $t = n+r+1-j$; в формуле (10) $s = n+i+1-r$, $t = r+1-j$, тогда мы получим первую (верхнюю) часть формулы (2). Положив в формуле (6) $s = i+1-r$, $t = n+r+1-j$; в формуле (7) $s = n+i+1-r$, $t = r+1-j$; в формуле (8) $s = n+i+1-r$, $t = n+r+1-j$, тогда мы получим вторую (нижнюю) часть формулы (2). Число соотношений, определяемых формулой (2) вычисляется несложно.

3) Если $n = 2$, то доказательство теоремы вытекает из [1, 2]. Поэтому мы будем предполагать, что $n \geqslant 3$. Из предложений 4 и 6 следует, что A_k — целый идеал кольца $R_k = R(A_k)$, $A_k \subseteq R_k = R(A_k)$, $2 \leqslant k \leqslant n$. Из (2) мы имеем

$$A_2 \cdot A_i \subseteq A_{i+1}, \quad 2 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Отсюда в силу предложения 5 (так как A_i — целый идеал кольца R_i) следуют включения: $R_2 \subseteq R_3 \subseteq \ldots \subseteq R_n$. Аналогично, из (2) мы имеем

$$A_n \cdot A_i \subseteq A_{i-1}, \quad 3 \leqslant i \leqslant n,$$

а потому $R_n \subseteq R_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq R_2$. Отсюда $R_2 = R_3 = \ldots = R_n$. $\triangleright$

Литература

1. *Боревич З. И., Койбаев В. А.* О кольцах множителей, связанных с промежуточными подгруппами для квадратичных торов // Вестн. СПбГУ.—1993.—Т. 1, № 2.—С. 5–10.
2. *Боревич З. И., Койбаев В.А., Чан Нгок Хой.* Решетки подгрупп в $GL(2, Q)$, содержащих нерасщепимый тор // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—1991.—Т. 191.—С. 24–43.
3. *Джусоева Н. А.* Сетевые кольца нормализуемые тором // Труды ИММ УрО РАН.—2013.—Т. 19, № 3.—С. 113–119.
4. *Джусоева Н. А., Койбаев В. А.* Максимальные подгруппы, содержащие тор, связанные с полем отношений дедекиндовой области // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—2002.—Т. 289.—С. 149–153.
5. *Койбаев В. А.* Подгруппы группы $GL(2, Q)$, содержащие нерасщепимый максимальный тор // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 312, № 1.—С. 36–38.
6. *Койбаев В. А.* Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор // Алгебра и анализ.—2009.—Т. 21, № 5.—С. 70–86.
7. *Ленг С.* Алгебра.—М.: Наука.—1968.—572 с.

Статья поступила 16 июня 2014 г.

Джусоева Нонна Анатольевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
ассистент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Россия, ул. Ватутина, 46
E-mail: djusoevanonna@rambler.ru

Койбаев Владимир Амурханович
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Россия, ул. Ватутина, 46;

Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ведущий научный сотрудник отдела функц. анализа
РОССИЯ, 362025, Россия, ул. Маркуса, 22
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru

TRANSVECTION MODULES IN THE OVERGROUPS OF A NON-SPLIT MAXIMAL TORUS

Dzhusoeva N. A., Koibaev V. A.

The aim of this article is to investigate the modules of transvections and rings of multipliers subgroups of the general linear group $G = GL(n, k)$ of degree n over a field k, containing non-split maximal torus $T = T(d)$, associated with a radical extension of $k(\sqrt[n]{d})$ of the degree n of the ground field k of an odd characteristic (minisotropic torus). We find a full list of $2 \cdot [(\frac{n-1}{2})^2]$ relations ($[\cdot]$ — integer part) of the modules of transvections. We prove that all ring of multipliers coincide, and all modules transvections are ideals of the ring of multipliers. All results were proved by the assumption that the ground field k is the field of fractions of a principal ideal domain.

Key words: overgroups, intermediate subgroups, non-split maximal torus, transvection, module transvections.