Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 4, С. 16–26

УДК **517.518**

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ ЧЕРЕЗ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ[1]

Р. А. Бандалиев

Основной целью работы является нахождение критерия для двумерного оператора Харди через системы нелинейных дифференциальных уравнений в весовом пространстве Лебега со смешанной нормой. В частности, доказано, что весовые функции являющиеся коэффициентами системы нелинейных дифференциальных уравнений входят в оценку двумерного оператора Харди в этом пространстве.

Ключевые слова: обобщенное неравенство Харди, нелинейные дифференциальные уравнения, пространство Лебега со смешанной нормой, абсолютно непрерывные функции двух переменных.

1. Введение

В современной теории уравнений математической физики широко применяются функциональные методы, берущие начало из классических работ Д. Гильберта. При исследовании эллиптических уравнений важную роль играют теоремы вложения, изученные различными математиками [1]. Далее при исследовании теоремы вложения в произвольных открытых множествах появляется многомерный оператор Харди. А это в свою очередь требует оценить оператор в различных весовых функциональных пространствах. Среди этих пространств важное место занимает весовое пространство Лебега. Оценка многомерного оператора Харди в весовых пространствах Лебега берет начало с работ [2] и [3]. С другой стороны, многомерный оператор Харди имеет приложения в спектральной теории операторов, в теории дифференциальных уравнений с частными производными, в теории интегральных уравнений, в теории функциональных пространств и др. (см. [4, 5, 10]). Поэтому получение оценки для многомерного оператора Харди в пространстве Лебега является актуальной задачей. В одномерном случае отметим известную монографию [11].

В работе доказывается связь системы нелинейных дифференциальных уравнений с двумерным оператором Харди в весовом пространстве Лебега со смешанной нормой. Другими словами, доказывается, что весовые функции, участвующие в определении весового пространства Лебега со смешанной нормой, связывают эту систему с двумерным оператором Харди в этом пространстве.

Теперь перейдем к изложению некоторых обозначений и вспомогательных фактов. Пусть $1 < p_1, p_2 < \infty$ и $\rho_i(t)$ — весовые функции, определенные на $(0,\infty)$, т. е. измеримые по Лебегу, почти всюду положительные и конечные функции на $(0,\infty)$, $i = 1, 2$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке фонда развития науки при Президенте Азербайджанской республики, проект № EIF-2010-1(1)-40/06-1.

Предположим, что $p_i' = \frac{p_i}{p_i-1}$ и $q_i' = \frac{q_i}{q_i-1}$, где $i = 1, 2$. Всюду в дальнейшем будем считать, что рассмотренные функции являются измеримыми по Лебегу. Пусть $f : (0,\infty)^2 \mapsto \mathbb{R}$ произвольная измеримая функция, где $(0,\infty)^2 = (0,\infty) \times (0,\infty)$. Определим весовое пространство Лебега со смешанной нормой. Это пространство обозначается через $L_{(p_1,p_2,\rho_1,\rho_2)}[(0,\infty)^2]$ и состоит из функций, для которых конечна норма [6]

$$\|f\|_{L_{(p_1,p_2,\rho_1,\rho_2)}[(0,\infty)^2]} = \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty |f(x_1,x_2)|^{p_1} \rho_1(x_1)\, dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \rho_2(x_2)\, dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Через $C^1(0,\infty)$ обозначается пространство непрерывно дифференцируемых функций на $(0,\infty)$. Множество всех абсолютно непрерывных функций на каждом компакте интервала $(0,\infty)$ обозначается через $AC^{\mathrm{loc}}(0,\infty)$.

2. Формулировка основного результата

Пусть $v_i(t)$, $\omega_i(t)$ — весовые функции, определенные на $(0,\infty)$, $v_i \in C^1(0,\infty)$ и $\lambda_i > 0$ — некоторые заданные числа, $i = 1, 2$. Рассмотрим систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{d}{dt}\left([v_1(t)]^{\frac{q_1}{p_1}} [y_1'(t)]^{\frac{q_1}{p_1'}} \right) + \omega_1(t)[y_1(t)]^{\frac{q_1}{p_1'}} = 0, \\ \lambda_2 \frac{d}{dt}\left([v_2(t)]^{\frac{q_2}{p_2}} [y_2'(t)]^{\frac{q_2}{p_2'}} \right) + \omega_2(t)[y_2(t)]^{\frac{q_2}{p_2'}} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$y_i(t) > 0,\ y_i'(t) > 0\ (t > 0), \quad y_i'(t) \in AC^{\mathrm{loc}}(0,\infty), \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Под решением задачи (1)–(2), будем понимать пару функций $(y_1(t), y_2(t))$, которая почти всюду на $(0,\infty)$ удовлетворяет системе (1) и условию (2).

Основной теоремой работы является

Теорема 1. *Пусть $1 < p_i \leqslant q_i < \infty$, $v_i(t)$, $\omega_i(t)$ — весовые функции определенные на $(0,\infty)$ и $v_i \in C^1(0,\infty)$, где $i = 1, 2$. Тогда для разрешимости задачи (1)–(2), необходимо и достаточно, существование постоянной $C_0 > 0$ такой, что выполняется неравенство*

$$\|u\|_{L_{(q_1,q_2,\omega_1,\omega_2)}[(0,\infty)^2]} \leqslant C_0^{\frac{1}{q_2}} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right\|_{L_{(p_1,p_2,v_1,v_2)}[(0,\infty)^2]}, \tag{3}$$

где $u : (0,\infty)^2 \mapsto \mathbb{R}$ — произвольная абсолютно непрерывная функция двух переменных, удовлетворяющая условию

$$\begin{cases} u(x_1, 0) = \lim\limits_{t_2 \to +0} u(x_1, t_2) = 0, \\ u(0, x_2) = \lim\limits_{t_1 \to +0} u(t_1, x_2) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Для доказательства теоремы 1 сначала докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $1 < p_i \leqslant q_i < \infty$, $v_i(t)$, $\omega_i(t)$ — весовые функции, определенные на $(0,\infty)$, $v_i \in C^1(0,\infty)$ и $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$. Предположим, что задача (1)–(2) имеет решение $y_i(t)$, $i = 1, 2$.*

Тогда имеет место неравенство

$$\|u\|_{L_{(q_1,q_2,\omega_1,\omega_2)}[(0,\infty)^2]} \leqslant \lambda_1^{\frac{1}{q_1}} \lambda_2^{\frac{1}{q_2}} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right\|_{L_{(p_1,p_2,v_1,v_2)}[(0,\infty)^2]}, \tag{5}$$

где $u : (0,\infty)^2 \mapsto \mathbb{R}$ *произвольная абсолютно непрерывная функция двух переменных, которая удовлетворяет условию* (4).

$\lhd$ Хорошо известно, что для любой абсолютно непрерывной функции двух переменных имеет место представление (см. [8, с. 246])

$$u(x_1,x_2) = u(0,0) + \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\alpha_1,0)}{\partial \alpha_1}\, d\alpha_1 + \int_0^{x_2} \frac{\partial u(0,\alpha_2)}{\partial \alpha_2}\, d\alpha_2 + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \frac{\partial^2 u(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}\, d\alpha_1 d\alpha_2. \tag{6}$$

Очевидно, что из условий (4) следует $u(0,0) = \lim\limits_{\substack{t_1\to+0,\\ t_2\to+0}} u(t_1,t_2) = 0$. Поэтому из равенства (6) в силу (4) получаем $u(x_1,x_2) = \int_0^{x_1} \int\limits_0^{x_2} \frac{\partial^2 u(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\, d\alpha_1 d\alpha_2$. Отметим, что последнее представление определяет двумерный оператор Харди [7]. Предположим, что функция $y(x_1,x_2) = (y_1(x_1), y_2(x_2))$ является решением задачи (1)–(2). Тогда в силу неравенства Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned}
|u(x_1,x_2)|^{q_1}\omega_1(x_1) &= \left| \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\, dt_1 dt_2 \right|^{q_1} \omega_1(x_1) \leqslant \left(\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| dt_1 dt_2 \right)^{q_1} \omega_1(x_1) \\
&= \left(\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| [y_1'(t_1)]^{\frac{1}{p_1'}} [y_1'(t_1)]^{-\frac{1}{p_1'}}\, dt_1 dt_2 \right)^{q_1} \omega_1(x_1) \\
&= \left[\int_0^{x_1} \left(\int_0^{x_2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| [y_1'(t_1)]^{-\frac{1}{p_1'}}\, dt_2 \right) [y_1'(t_1)]^{\frac{1}{p_1'}}\, dt_1 \right]^{q_1} \omega_1(x_1) \\
&\leqslant \left(\int_0^{x_1} y_1'(t_1)\, dt_1 \right)^{\frac{q_1}{p_1'}} \left(\int_0^{x_1} \left(\int_0^{x_2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| [y_1'(t_1)]^{-\frac{1}{p_1'}}\, dt_2 \right)^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{q_1}{p_1}} \omega_1(x_1) \qquad (7) \\
&\leqslant \omega_1(x_1)\, (y_1(x_1))^{\frac{q_1}{p_1'}} \left(\int_0^{x_1} \left(\int_0^{x_2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| [y_1'(t_1)]^{-\frac{1}{p_1'}}\, dt_2 \right)^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{q_1}{p_1}} \\
&= -\lambda_1 \frac{d}{dx_1} \left([v_1(x_1)]^{\frac{q_1}{p_1}} [y_1'(x_1)]^{\frac{q_1}{p_1'}} \right) \left(\int_0^{x_1} \left(\int_0^{x_2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| [y_1'(t_1)]^{-\frac{1}{p_1'}}\, dt_2 \right)^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{q_1}{p_1}} \\
&= \left(\int_0^{x_1} \left[-\lambda_1 \frac{d}{dx_1} \left([v_1(x_1)]^{\frac{q_1}{p_1}} [y_1'(x_1)]^{\frac{q_1}{p_1'}} \right) \right]^{\frac{p_1}{q_1}} \left(\int_0^{x_2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| [y_1'(t_1)]^{-\frac{1}{p_1'}}\, dt_2 \right)^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{q_1}{p_1}}.
\end{aligned}$$

Интегрируя обе части неравенства (7) по переменной x_1 и применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\Big(\int\limits_0^\infty |u(x_1,x_2)|^{q_1}\omega_1(x_1)\,dx_1\Big)^{\frac{p_1}{q_1}}$$

$$\leqslant\Bigg\{\int\limits_0^\infty\Bigg(\int\limits_0^{x_1}\Big[-\lambda_1\frac{d}{dx_1}\Big([v_1(x_1)]^{\frac{q_1}{p_1}}[y_1'(x_1)]^{\frac{q_1}{p_1'}}\Big)\Big]^{\frac{p_1}{q_1}}\Big(\int\limits_0^{x_2}\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Big|[y_1'(t_1)]^{-\frac{1}{p_1'}}dt_2\Big)^{p_1}dt_1\Bigg)^{\frac{q_1}{p_1}}dx_1\Bigg\}^{\frac{p_1}{q_1}}$$

$$\leqslant\int\limits_0^\infty\Bigg(\int\limits_{t_1}^\infty-\lambda_1\frac{d}{dx_1}\Big([v_1(x_1)]^{\frac{q_1}{p_1}}[y_1'(x_1)]^{\frac{q_1}{p_1'}}\Big)\Big(\int\limits_0^{x_2}\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Big|[y_1'(t_1)]^{-\frac{1}{p_1'}}dt_2\Big)^{q_1}dx_1\Bigg)^{\frac{p_1}{q_1}}dt_1$$

$$=\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^{x_2}\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Big|[y_1'(t_1)]^{-\frac{1}{p_1'}}dt_2\Big)^{p_1}\Bigg(\int\limits_{t_1}^\infty-\lambda_1\frac{d}{dx_1}\Big([v_1(x_1)]^{\frac{q_1}{p_1}}[y_1'(x_1)]^{\frac{q_1}{p_1'}}\Big)dx_1\Bigg)^{\frac{p_1}{q_1}}dt_1$$

$$\leqslant\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^{x_2}\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Big|[y_1'(t_1)]^{-\frac{1}{p_1'}}dt_2\Big)^{p_1}\Big[\lambda_1[v_1(t_1)]^{\frac{q_1}{p_1}}[y_1'(t_1)]^{\frac{q_1}{p_1'}}\Big]^{\frac{p_1}{q_1}}dt_1$$

$$=\lambda_1^{\frac{p_1}{q_1}}\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^{x_2}\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Big|dt_2\Big)^{p_1}[y_1'(t_1)]^{-\frac{p_1}{p_1'}}v_1(t_1)[y_1'(t_1)]^{\frac{p_1}{p_1'}}dt_1$$

$$=\lambda_1^{\frac{p_1}{q_1}}\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^{x_2}\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Big|dt_2\Big)^{p_1}v_1(t_1)\,dt_1.$$

Таким образом, получили неравенство

$$\Big(\int\limits_0^\infty |u(x_1,x_2)|^{q_1}\omega_1(x_1)\,dx_1\Big)^{\frac{1}{q_1}}\leqslant\lambda_1^{\frac{1}{q_1}}\Big(\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{x_2}\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Big|dt_2)^{p_1}v_1(t_1)\,dt_1\Big)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Снова, применяя обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$\Big(\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^{x_2}\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Big|dt_2\Big)^{p_1}v_1(t_1)\,dt_1\Big)^{\frac{1}{p_1}}\leqslant\int\limits_0^{x_2}\Big(\int\limits_0^\infty\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Big|^{p_1}v_1(t_1)\,dt_1\Big)^{\frac{1}{p_1}}dt_2.$$

Таким образом,

$$\Big(\int\limits_0^\infty |u(x_1,x_2)|^{q_1}\omega_1(x_1)\,dx_1\Big)^{\frac{1}{q_1}}\leqslant\lambda_1^{\frac{1}{q_1}}\int\limits_0^{x_2}\Big(\int\limits_0^\infty\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Big|^{p_1}v_1(t_1)\,dt_1\Big)^{\frac{1}{p_1}}dt_2.$$

Далее, из последнего неравенства получим

$$\Big(\int\limits_0^\infty |u(x_1,x_2)|^{q_1}\omega_1(x_1)\,dx_1\Big)^{\frac{q_2}{q_1}}\omega_2(x_2)\leqslant\lambda_1^{\frac{q_2}{q_1}}\omega_2(x_2)\Big(\int\limits_0^{x_2}\Big(\int\limits_0^\infty\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Big|^{p_1}v_1(t_1)\,dt_1\Big)^{\frac{1}{p_1}}dt_2\Big)^{q_2}.$$

Теперь оценим выражение $\omega_2(x_2)\Big(\int_0^{x_2}\Big(\int_0^{\infty}\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\Big|^{p_1}v_1(t_1)\,dt_1\Big)^{\frac{1}{p_1}}dt_2\Big)^{q_2}$. Повторяя процесс доказательства неравенства (7), имеем

$$\omega_2(x_2)\Bigg(\int\limits_0^{x_2}\Bigg(\int\limits_0^{\infty}\bigg|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\bigg|^{p_1}v_1(t_1)\,dt_1\Bigg)^{\frac{1}{p_1}}dt_2\Bigg)^{q_2}$$

$$\leqslant\Bigg(\int\limits_0^{x_2}\bigg[-\lambda_2\frac{d}{dx_2}\Big([v_2(x_2)]^{\frac{q_2}{p_2}}[y_1'(x_1)]^{\frac{q_2}{p_2'}}\Big)\bigg]^{\frac{p_2}{q_2}}\Bigg(\int\limits_0^{\infty}\bigg|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\bigg|^{p_1}v_1(t_1)\,[y_2'(t_2)]^{-\frac{1}{p_2'}}dt_1\Bigg)^{\frac{p_2}{p_1}}dt_2\Bigg)^{\frac{q_2}{p_2}}.$$

Поэтому

$$\Bigg(\int\limits_0^{\infty}|u(x_1,x_2)|^{q_1}\omega_1(x_1)\,dx_1\Bigg)^{\frac{q_2}{q_1}}\omega_2(x_2)\leqslant\lambda_1^{\frac{q_2}{q_1}}\Bigg(\int\limits_0^{x_2}\bigg[-\lambda_2\frac{d}{dx_2}\Big([v_2(x_2)]^{\frac{q_2}{p_2}}[y_1'(x_1)]^{\frac{q_2}{p_2'}}\Big)\bigg]^{\frac{p_2}{q_2}}$$

$$\times\Bigg(\int\limits_0^{\infty}\bigg|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\bigg|^{p_1}v_1(t_1)\,[y_2'(t_2)]^{-\frac{1}{p_2'}}dt_1\Bigg)^{\frac{p_2}{p_1}}dt_2\Bigg)^{\frac{q_2}{p_2}}.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по переменной x_2 и применяя обобщенное неравенство Минковского, получим неравенство (5). $\rhd$

Положим

$$M_i=\frac{p_i'}{q_i}\inf\sup_{t>0}\frac{1}{g_i(t)-\int\limits_0^t(v_i(s))^{1-p_i'}ds}\int\limits_0^t\omega_i(s)(g_i(s))^{\frac{q_i}{p_i'}+1}ds,\tag{8}$$

где инфимум берется по всем измеримым функциям g_i таким, что для всех $t>0$ $g_i(t)>\int\limits_0^t(v_i(s))^{1-p_i'}ds$, $i=1,2$.

Следующая лемма устанавливает связь задачи (1)–(2) с числами M_i $(i=1,2)$.

Лемма 1. *Пусть $\lambda_i>0$ — числа, заданные в теореме 1, и M_i — величины, определенные равенством (8), $i=1,2$. Предположим, что v_i и ω_i — весовые функции, определенные на $(0,\infty)$, и для всех $t\in(0,\infty)$ существует производная $v_i'(t)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) если задача (1)–(2) имеет решение с локально абсолютно непрерывным производным первого порядка, то $\lambda_i\geqslant M_i$;

(b) если $M_i<+\infty$, то задача (1)–(2) имеет решение для каждого $\lambda_i>M_i$, $i=1,2$.

$\lhd$ Докажем пункт (a). Пусть $y(t)=(y_1(t),y_2(t))$ является решением задачи (1)–(2). Возьмем $w_i=\frac{y_i}{y_i'}v_i^{1-p_i'}$. Тогда функция $w(t)=(w_1(t),w_2(t))$ является положительным решением системы

$$\begin{cases}w_1'(t)=\frac{p_1'}{q_1\lambda_1}\,\omega_1(t)\,(w_1(t))^{\frac{q_1}{p_1'}+1}+[v_1(t)]^{1-p_1'},\\ w_2'(t)=\frac{p_2'}{q_2\lambda_2}\,\omega_2(t)\,(w_2(t))^{\frac{q_2}{p_2'}+1}+[v_2(t)]^{1-p_2'}.\end{cases}\tag{9}$$

Из (9) вытекает, что

$$w_i(t)\geqslant\int\limits_0^t w_i'(s)\,ds=\frac{p_i'}{q_i\lambda_i}\int\limits_0^t\omega_i(s)(w_i(s))^{\frac{q_i}{p_i'}+1}ds+\int\limits_0^t[v_i(s)]^{1-p_i'}ds,\quad i=1,2.\tag{10}$$

Из (10) получим $w_i(t) \geqslant \int\limits_0^t [v_i(s)]^{1-p_i'}\,ds$ и

$$\lambda_i \geqslant \frac{p_i'}{q_i}\,\frac{1}{w_i(t) - \int\limits_0^t (v_i(s))^{1-p_i'}\,ds}\int\limits_0^t \omega_i(s)(w_i(s))^{\frac{q_i}{p_i'}+1}\,ds. \tag{11}$$

Из (11) и (8) вытекает, что $\lambda_i \geqslant M_i$ и доказательство пункта (a) завершено.

Теперь докажем пункт (b). Фиксируем числа $\lambda_i > M_i$, $i = 1,2$. По определению величин M_i существуют лебеговы измеримые функции $g_i(x_i)$ такие, что

$$g_i(t) \geqslant \int\limits_0^t (v_i(s))^{1-p_i'}\,ds + \frac{p_i'}{q_i\,\lambda_i}\int\limits_0^t \omega_i(s)(w_i(s))^{\frac{q_i}{p_i'}+1}\,ds, \quad i = 1,2. \tag{12}$$

Определим последовательность функций $w_{n,i}(t)$ $(i = 1,2)$ следующим образом:

$$w_{0,i}(t) = g_i(t),$$

$$w_{n+1,i}(t) = \int\limits_0^t (v_i(s))^{1-p_i'}ds + \frac{p_i'}{q_i\,\lambda_i}\int\limits_0^t \omega_i(s)(w_{n,i}(s))^{\frac{q_i}{p_i'}+1}ds, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Из (12) вытекает, что $w_{0,i}(t) \geqslant w_{1,i}(t)$. Положим $w_{n-1,i}(t) \geqslant w_{n,i}(t)$. Докажем, что последовательности $\{w_{n,1}(t)\}$ и $\{w_{n,2}(x)\}$ являются убывающими. Имеем

$$w_{n,i}(t) - w_{n+1,i}(t) = \frac{p_i'}{q_i\,\lambda_i}\int\limits_0^t \omega_i(s)\Big[(w_{n-1,i}(s))^{\frac{q_i}{p_i'}+1} - (w_{n,i}(s))^{\frac{q_i}{p_i'}+1}\Big]\,ds \geqslant 0.$$

Так как $w_{n,i}(t) \geqslant 0$, то последовательности (13) сходятся. Обозначим их пределы через $w_i(t)$. По теореме Леви о монотонной сходимости отсюда следует, что w_i являются неотрицательными решениями уравнений

$$w_i(t) = \int\limits_0^t (v_i(s))^{1-p_i'}ds + \frac{p_i'}{q_i\,\lambda_i}\int\limits_0^t \omega_i(s)(w_i(s))^{\frac{q_i}{p_i'}+1}ds, \quad i = 1,2.$$

Отсюда, получаем, что w_i являются абсолютно непрерывными и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$w_i'(t) = (v_i(t))^{1-p_i'} + \frac{p_i'}{q_i\,\lambda_i}\,\omega_i(t)(w_i(t))^{\frac{q_i}{p_i'}+1}, \quad i = 1,2.$$

Поэтому функции

$$y_i(t) = e^{\int\limits_{a_i}^t [w_i(s)]^{-1}(v_i(s))^{1-p_i'}\,ds}, \quad i = 1,2,$$

удовлетворяют условиям задачи (1)–(2). $\triangleright$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p_i \leqslant q_i < \infty$, $M_i < \infty$ *и* $v_i(t)$, $\omega_i(t)$ *— весовые функции, определенные на* $(0,\infty)$, *где* $i = 1,2$. *Предположим, что* $C > 0$ *наименьшая постоянная такая, что имеет место неравенство*

$$\|u\|_{L_{(q_1,q_2,\omega_1,\omega_2)}[(0,\infty)^2]} \leqslant C^{\frac{1}{q_2}}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right\|_{L_{(p_1,p_2,v_1,v_2)}[(0,\infty)^2]}, \tag{14}$$

где $u:(0,\infty)^2\mapsto\mathbb{R}$ — произвольная абсолютно непрерывная функция двух переменных, которая удовлетворяет условию (4). Тогда $C\leqslant M_1\,M_2$.

$\triangleleft$ Обозначим $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}=r(x_1,x_2)$. Далее, при выполнении условий (4) получим $u(x_1,x_2)=\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}r(t_1,t_2)\,dt_1dt_2$. Очевидно, что

$$C=\sup\int\limits_0^\infty\Bigg(\int\limits_0^\infty\Bigg(\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}r(t_1,t_2)\,dt_1dt_2\Bigg)^{q_1}\omega_1(x_1)\,dx_1\Bigg)^{\frac{q_2}{q_1}}\omega_2(x_2)\,dx_2,\tag{15}$$

где супремум берется по всем измеримым положительным функциям r таким, что

$$\int\limits_0^\infty\Bigg(\int\limits_0^\infty(r(x_1,x_2))^{p_1}v_1(x_1)\,dx_1\Bigg)^{\frac{p_2}{p_1}}v_2(x_2)\,dx_2=1.\tag{16}$$

Предположим обратное. Пусть $C>M_1M_2$. Тогда существуют числа $\mu_1>0$ и $\mu_2>0$ такие, что $\sqrt{C}>\mu_i>M_i$, $i=1,2$. Так как $M_i<\infty$, то в силу пункта b) леммы 1 задача (1)–(2) имеет решение. Поэтому в силу теоремы 2 получим, что неравенство (5) справедливо с постоянной $\mu_1^{\frac{1}{q_1}}\mu_2^{\frac{1}{q_2}}$ для каждой абсолютно непрерывной функции $u(x_1,x_2)$, удовлетворяющей условиям (4). Отсюда следует, что C не является наименьшей постоянной в неравенстве (14). Полученное противоречие доказывает теорему 3. $\triangleright$

Следствие 1. *Пусть выполняется все условия теоремы 2. Тогда по определению чисел M_i $(i=1,2)$*

$$C\leqslant\frac{p_i'}{q_i}\sup_{t>0}\frac{1}{g_i(t)-\int\limits_0^t(v_i(s))^{1-p_i'}\,ds}\int\limits_0^t\omega_i(s)(g_i(s))^{\frac{p_i'}{q_i}+1}\,ds,$$

где $g_i(t)$ положительные измеримые функции такие, что $g_i(t)>\int\limits_0^t(v_i(s))^{1-p_i'}\,ds$.

Следствие 2. *Пусть*

$$B_i=\sup_{x_i>0}\int\limits_{x_i}^\infty\omega_i(s)\,ds\Bigg[\int\limits_0^{x_i}(v_i(s))^{1-p_i'}\,ds\Bigg]^{\frac{q_i}{p_i'}},\quad i=1,2.$$

Тогда

$$B_1B_2\leqslant C\leqslant M_1\,M_2\leqslant\prod_{i=1}^2\left(q_i(q_i')^{\frac{q_i}{p_i'}}\right)B_1B_2\tag{17}$$

и

$$M_1\,M_2\leqslant\prod_{i=1}^2\left(q_i(q_i')^{\frac{q_i}{p_i'}}\right)C.\tag{18}$$

$\triangleleft$ Положим

$$s(x_1,x_2)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^2\Bigg(\int\limits_0^{\xi_i}[v_i(t_i)]^{1-p_i'}\,dt_i\Bigg)^{-\frac{1}{p_i}}[v_i(x_i)]^{1-p_i'}, & (x_1,x_2)\in P_{\xi_1\xi_2};\\ 0, & (x_1,x_2)\notin P_{\xi_1\xi_2},\end{cases}$$

где $P_{\xi_1\xi_2} = \{(x_1, x_2) \in (0,\infty)^2 : 0 < x_1 < \xi_1,\, 0 < x_2 < \xi_2\}$ и (ξ_1, ξ_2) некоторая фиксированная точка в $(0,\infty)^2$. Очевидно, что

$$\int\limits_0^\infty \Bigl(\int\limits_0^\infty (s(x_1,x_2))^{p_1} v_1(x_1)\,dx_1\Bigr)^{\frac{p_2}{p_1}} v_2(x_2)\,dx_2$$
$$= \int\limits_0^{\xi_2} \Bigl(\int\limits_0^{\xi_1} \Bigl[\prod_{i=1}^2 \Bigl(\int\limits_0^{\xi_i} [v_i(t_i)]^{1-p_i'}\,dt_i\Bigr)^{-\frac{1}{p_i}} [v_i(x_i)]^{1-p_i'}\Bigr]^{p_1} v_1(x_1)\,dx_1\Bigr)^{\frac{p_2}{p_1}} v_2(x_2)\,dx_2 = 1.$$

Поэтому функция s удовлетворяет равенству (16). Тогда из равенства (15) получим

$$C \geqslant \int\limits_0^\infty \Bigl(\int\limits_0^\infty \Bigl(\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2} s(t_1,t_2)\,dt_1dt_2\Bigr)^{q_1} \omega_1(x_1)\,dx_1\Bigr)^{\frac{q_2}{q_1}} \omega_2(x_2)\,dx_2$$
$$\geqslant \int\limits_{\xi_2}^\infty \Bigl(\int\limits_{\xi_1}^\infty \Bigl(\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2} s(t_1,t_2)\,dt_1dt_2\Bigr)^{q_1} \omega_1(x_1)\,dx_1\Bigr)^{\frac{q_2}{q_1}} \omega_2(x_2)\,dx_2$$
$$= \int\limits_{\xi_2}^\infty \Bigl(\int\limits_{\xi_1}^\infty \Bigl(\int\limits_0^{\xi_1}\int\limits_0^{\xi_2} \prod_{i=1}^2 \Bigl(\int\limits_0^{\xi_i} [v_i(y_i)]^{1-p_i'} dy_i\Bigr)^{-\frac{1}{p_i}} [v_i(t_i)]^{1-p_i'}\,dt_1dt_2\Bigr)^{q_1} \omega_1(x_1)dx_1\Bigr)^{\frac{q_2}{q_1}} \omega_2(x_2)\,dx_2$$
$$= \prod_{i=1}^2 \Bigl(\int\limits_0^{\xi_i} [v_i(y_i)]^{1-p_i'} dy_i\Bigr)^{\frac{q_i}{p_i'}} \int\limits_{\xi_i}^\infty \omega_i(x_i)\,dx_i.$$

Переходя к супремуму в последнем неравенстве (относительно переменных ξ_1 и ξ_2), получаем, что $C \geqslant B_1B_2$. Неравенство $C \leqslant M_1M_2$ вытекает из теоремы 3.

Теперь докажем, что $M_i \leqslant q_i(q_i')^{\frac{q_i}{p_i'}} B_i$, $i = 1, 2$. Прежде всего из определения величин B_i вытекает, что

$$B_i^{\frac{p_i'}{q_i}} \Bigl(\int\limits_{x_i}^\infty \omega_i(y_i)\,dy_i\Bigr)^{-\frac{p_i'}{q_i}} > \int\limits_0^{x_i} [v_i(t_i)]^{1-p_i'}\,dt_i.$$

Положив в равенствах (8)

$$g_i(x_i) = q_i' B_i^{\frac{p_i'}{q_i}} \Bigl(\int\limits_{x_i}^\infty \omega_i(y_i)\,y_i\Bigr)^{-\frac{p_i'}{q_i}}, \quad i = 1, 2,$$

находим, что

$$M_i = \frac{p_i'}{q_i} \inf \sup_{x_i>0} \frac{1}{q_i' B_i^{\frac{p_i'}{q_i}} \Big(\int\limits_{x_i}^{\infty} \omega_i(t_i)\,dt_i\Big)^{-\frac{p_i'}{q_i}} - \int\limits_0^{x_i} [v_i(t_i)]^{1-p_i'}\,dt_i}$$

$$\times \int\limits_0^{x_i} \omega_i(t_i) \bigg(q_i' B_i^{\frac{p_i'}{q_i}} \bigg(\int\limits_{t_i}^{\infty} \omega_i(y_i)\,dy_i \bigg)^{-\frac{p_i'}{q_i}} \bigg)^{\frac{q_i}{p_i'}+1} dt_i$$

$$\leqslant \sup_{x_i>0} \frac{(q_i')^{\frac{q_i}{p_i'}+1} B^{1+\frac{p_i'}{q_i}}}{q_i' B_i^{\frac{p_i'}{q_i}} \Big(\int\limits_{x_i}^{\infty} \omega_i(t_i)\,dt_i\Big)^{-\frac{p_i'}{q_i}} - \int\limits_0^{x_i} [v_i(t_i)]^{1-p_i'}\,dt_i} \int\limits_0^{x_i} \frac{d}{dt_i} \bigg[\bigg(\int\limits_{t_i}^{\infty} \omega_i(y_i)\,dy_i \bigg)^{-\frac{p_i'}{q_i}} \bigg]$$

$$\leqslant (q_i')^{\frac{q_i}{p_i'}+1} B^{1+\frac{p_i'}{q_i}} \sup_{x_i>0} \frac{\Big(\int\limits_{x_i}^{\infty} \omega_i(t_i)\,dt_i\Big)^{-\frac{p_i'}{q_i}}}{q_i' B_i^{\frac{p_i'}{q_i}} \Big(\int\limits_{x_i}^{\infty} \omega_i(t_i)\,dt_i\Big)^{-\frac{p_i'}{q_i}} - \int\limits_0^{x_i} [v_i(t_i)]^{1-p_i'}\,dt_i}.$$

Из определения величин B_i вытекает, что

$$\int\limits_0^{x_i} [v_i(y_i)]^{1-p_i'} dy_i \leqslant B^{\frac{p_i'}{q_i}} \bigg(\int\limits_{x_i}^{\infty} \omega_i(y_i)\,dy_i \bigg)^{-\frac{p_i'}{q_i}}.$$

Поэтому

$$q_i' B_i^{\frac{p_i'}{q_i}} \bigg(\int\limits_{x_i}^{\infty} \omega_i(t_i)\,dt_i \bigg)^{-\frac{p_i'}{q_i}} - \int\limits_0^{x_i} [v_i(t_i)]^{1-p_i'}\,dt_i \geqslant (q_i' - 1) B_i^{\frac{p_i'}{q_i}} \bigg(\int\limits_{x_i}^{\infty} \omega_i(t_i)\,dt_i \bigg)^{-\frac{p_i'}{q_i}}.$$

Таким образом,

$$M_i \leqslant \frac{(q_i')^{\frac{q_i}{p_i'}+1} B_i^{1+\frac{p_i'}{q_i}}}{(q_i'-1) B_i^{\frac{p_i'}{q_i}}} = q_i (q_i')^{\frac{q_i}{p_i'}} B_i, \quad i = 1, 2.$$

А это означает, что неравенство (17) доказано. Неравенство (18) автоматически следует из неравенства (17). $\rhd$

Замечание 2. Из следствия 2 вытекает, что для справедливости неравенства (14), необходимо и достаточно, чтобы $B_i < +\infty$, $i = 1, 2$. В одномерном случае неравенство типа Харди подробно изучено в монографии [10] (см. также [5]).

Следствие 3. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1. *Предположим, что* $p_1 = p_2 = p$ *и* $q_1 = q_2 = q$. *Тогда теорема* 1 *справедлива в обычном весовом пространстве Лебега с весами* $v(x_1, x_2) = v_1(x_1) v_2(x_2)$ *и* $\omega(x_1, x_2) = \omega_1(x_1) \omega_2(x_2)$.

$\lhd$ Достаточность непосредственно следует из теоремы 2. Докажем необходимость. Пусть выполняется неравенство (3) для каждой абсолютно непрерывной функции $u(x_1, x_2)$, удовлетворяющей условию (4). Тогда $C \leqslant C_0 < \infty$, где C — постоянная в равенстве (15). Из неравенства (17) следует, что $M_i < \infty$, $i = 1, 2$. Тогда в силу пункта b) леммы 1 задача (1)–(2) имеет решение для каждого $\lambda_i > M_i$, $i = 1, 2$. $\rhd$

Пример. Пусть $1 < p_i \leqslant q_i < \infty$, $v_i(x_i) = x_i^{\alpha_i}$, $\omega_i(x_i) = x_i^{\frac{q_i}{p_i}(p_i-1-\alpha_i)-1}$, $i = 1,2$. Тогда для справедливости неравенства (14), необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_i < p_i - 1$, $i = 1,2$.

Аналогичным путем можно показать, что теорема 1 имеет место для пространства Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости. А именно, имеет место следующая

Теорема 4. *Пусть $1 < p_1 \leqslant q_1(x) \leqslant \overline{q}_1 < \infty$ и $1 < p_2 \leqslant q_2(x_2) \leqslant \overline{q}_2 < \infty$. Предположим, что v_i и ω_i — весовые функции, определенные на $(0,\infty)$, и для всех $t \in (0,\infty)$ существует производная $\omega_i'(t)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

a) существует положительное решение следующей системы с локально абсолютно непрерывным производным первого порядка уравнения

$$\begin{cases} \|v_1\, y_1^{1/p_1'}\|_{L_{q_1(\cdot,x_2)}(x_1>t)} - \lambda_1\omega_1(t)(y_1'(t))^{1/p_1'} = 0, \\ \|v_2\, y_2^{1/p_2'}\|_{L_{q_2(x_2)}(x_2>t)} - \lambda_2\omega_2(t)(y_2'(t))^{1/p_2'} = 0, \end{cases}$$

$$y_i(t) > 0, \quad y_i'(t) > 0, \quad y_i \in AC(0,\infty), \quad \lambda_i > 0;$$

b) имеет место весовая оценка

$$\Big\| \|u\|_{q_1,v_1,x_1} \Big\|_{q_2,v_2\,x_2} \leqslant C_0 \Big\| \Big\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \Big\|_{p_1,\omega_1} \Big\|_{p_2,\omega_2},$$

где $u \in AC(\mathbb{R}^2_{++})$,

$$\begin{cases} u(0,x_2) = \lim_{x_1\to+0} u(x_1,x_2) = 0, \\ u(x_1,0) = \lim_{x_2\to+0} u(x_1,x_2) = 0. \end{cases}$$

$C_0 > 0$ — постоянная, не зависящая от u, и $\mathbb{R}^2_{++} = (0,\infty)\times(0,\infty)$.

Литература

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физики.—Л.: Изд. ЛГУ, 1950.—255 с.
2. *Седов В. Н.* Весовые пространства. Теорема вложения // Диф. уравнения.—1972.—Т. 8, № 8.—С. 1452–1462.
3. *Сысоева Ф. А.* Обобщение некоторого неравенства Харди // Изв. вузов. Сер. мат.—1965.—Т. 49.—№ 6.—С. 140–143.
4. *Никольский Ю. С.* К задаче Дирихле для уравнения с вырождением на бесконечности // Диф. уравнения.—1967.—Т. 3, № 7.—С. 1166–1179.
5. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева.—Л.: Изд. ЛГУ, 1985.—415 с.
6. *Benedek A., Panzone R.* The spaces L_p, with mixed norm // Duke Math. J.—1961.—Vol. 28, № 3.—P. 302–324.
7. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $\mathscr{L}^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки.—1979.—Т. 26, № 4.—С. 613–637.
8. *Бандалиев Р. А.* Об одном неравенстве в пространстве Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости // Мат. заметки.—2008.—Т. 84, № 3.—С. 323–333.
9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 5.—М.: Физматгиз, 1959.—655 с.
10. *Kufner A., Persson L.-E.* Weighted inequalities of Hardy type.—New Jersey–London: World Scientific Publishing Co, 2003.
11. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г. П.* Неравенства.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1948.

Статья поступила 3 июля 2013 г.

Бандалиев Ровшан Алифага оглы
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ведущий научный сотрудник
АЗЕРБАЙДЖАН, AZ1141 1, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9
E-mail: `bandalievr@rambler.ru`

INVESTIGATION OF GENERALIZED HARDY INEQUALITY VIA A SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN WEIGHTED LEBESGUE SPACES WITH MIXED NORM

Bandaliev R. A.

The main goal of this paper is to found a criteria for two dimensional Hardy operator via a system of nonlinear differential equations in weighted Lebesgue spaces with mixed norm. In particular, it is proved that the weight functions that are the coefficients of a system of nonlinear differential equations are included in the estimate of the two-dimensional Hardy operator in this space.

Key words: generalized Hardy inequality, nonlinear differential equations, Lebesgue spaces with mixed norm, absolutely continuous function of two variables.