Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 4, С. 54–60

УДК **517.9**

КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ МЕТОДА СГЛАЖИВАНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. С. Пилиди

Для полного сингулярного интегрального оператора с кусочно-непрерывными коэффициентами на вещественной оси получен критерий применимости приближенного метода по семейству полных сингулярных интегральных операторов с коэффициентами, непрерывными на одноточечной компактификации вещественной оси.

Ключевые слова: полный сингулярный интегральный оператор, кусочно-непрерывные коэффициенты, сходимость приближенного метода, равномерная обратимость, локальный принцип.

Как обычно, определенную на вещественной оси $\mathbb{R}$ комплекснозначную функцию a будем называть кусочно-непрерывной, если она непрерывна всюду, кроме конечного числа точек, в которых имеет разрывы первого рода, и существуют конечные пределы $a(\pm\infty) = \lim_{x\to\pm\infty} a(x)$. Введем действующий в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$ обратимый полный сингулярный интегральный оператор

$$A = a_+P_+ + a_-P_- + T, \tag{1}$$

где $a_\pm$ — кусочно-непрерывные функции на $\mathbb{R}$, $P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$, S — оператор сингулярного интегрирования, T — компактный оператор в пространстве $L_p(\mathbb{R})$.

Рассмотрим следующую задачу. Найти последовательность $\{A_n\}$ полных сингулярных интегральных операторов с коэффициентами, непрерывными на одноточечной компактификации $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ вещественной оси $\mathbb{R}$, такую, что к оператору A применим приближенный метод по семейству операторов $\{A_n\}$ при $n \to \infty$. Последнее означает [1], что операторы A_n обратимы при всех достаточно больших n и для любой функции $g \in L_p(\mathbb{R})$ решения $f_n \in L_p(\mathbb{R})$ уравнений $A_nf_n = g$, находимые единственным образом при указанных значениях n, сходятся по норме при $n \to \infty$ к решению f уравнения $Af = g$. Сходимость приближенного метода равносильна существованию такого n_1, что все операторы A_n обратимы при $n \geqslant n_1$ и $\sup_{n\geqslant n_1} \|A_n^{-1}\| < \infty$. Последнее свойство называется *равномерной обратимостью* семейства $\{A_n\}_{n\geqslant n_1}$.

Работа является продолжением исследования, начатого в [2]. В отличие от [2], здесь рассматриваются широкие классы аппроксимаций и получен критерий сходимости приближенного метода. В [2] рассматривалась фиксированная схема приближения, и вопрос о критерии там не возникал. Результаты работы докладывались на международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-IV» [3].

Обозначим через Φ множество всех функций φ, определенных и непрерывных на отрезке $[-1;1]$ и удовлетворяющих условиям $\varphi(-1)=0$, $\varphi(1)=1$. Пусть a — кусочно-непрерывная функция на $\mathbb{R}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — все ее (конечные) точки разрыва. Для $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ обозначим

$$U_i(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_i| < \varepsilon\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

$$U_\infty(N) := \{x \in \mathbb{R} : |x| > N\}. \tag{3}$$

Выберем такие $\varepsilon_0 > 0$, $N_0 > 0$, чтобы окрестности $U_i(\varepsilon_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $U_\infty(N_0)$ попарно не пересекались. Обозначим через $U(\varepsilon, N)$ объединение всех окрестностей (2), (3) при фиксированных $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $N \in (N_0, \infty)$. Выберем произвольные функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, $\varphi_\infty \in \Phi$. Определим функции $a^{(\varepsilon,N)}$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0,\ N > N_0)$ условиями: $a^{(\varepsilon,N)}(x) = a(x)$, если $x \notin U(\varepsilon, N)$,

$$a^{(\varepsilon,N)}(x) = \left(1 - \varphi_i\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon}\right)\right) a(x_i - \varepsilon) + \varphi_i\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon}\right) a(x_i + \varepsilon),$$

если $x \in U_i(\varepsilon, N)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$a^{(\varepsilon,N)}(x) = \left(1 - \varphi_\infty\left(\frac{N}{x}\right)\right) a(-N) + \varphi_\infty\left(\frac{N}{x}\right) a(N),$$

если $x \in U_\infty(N)$.

Отметим, что функции $a^{(\varepsilon,N)}(x)$ непрерывны на $\dot{\mathbb{R}}$.

Для той же функции a введем семейство определенных на $\mathbb{R}$ функций $a^{(\xi)}$, $\xi \in \dot{\mathbb{R}}$, условиями: $a^{(\xi)}(x) = a(\xi)$, $x \in \mathbb{R}$, если $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$,

$$a^{(x_i)}(x) = \begin{cases} (1 - \varphi_i(x - x_i))\, a(x_i - 0) + \varphi_i(x - x_i)\, a(x_i + 0), & |x - x_i| < 1, \\ a(x_i - 0), & x \leqslant x_i - 1, \\ a(x_i + 0), & x \geqslant x_i + 1, \end{cases}$$

$$a^{(\infty)}(x) = \begin{cases} \left(1 - \varphi_\infty\left(\frac{1}{x}\right)\right) a(-\infty) + \varphi_\infty\left(\frac{1}{x}\right) a(+\infty), & |x| > 1, \\ a(-\infty), & -1 \leqslant x < 0, \\ a(+\infty), & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Оператору (1) поставим в соответствие действующие в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ операторы

$$A_{\varepsilon,N} = a_+^{(\varepsilon,N)} P_+ + a_-^{(\varepsilon,N)} P_- + T,$$

$$A^{(\xi)} = a_+^{(\xi)} P_+ + a_-^{(\xi)} P_-, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

$$A^{(\infty)} = a_+^{(\infty)} P_+ + a_-^{(\infty)} P_-.$$

При этом предполагается, что для функций $a_+^{(\varepsilon,N)}$ и $a_-^{(\varepsilon,N)}$ в случае совпадения точек разрыва соответствующие функции класса Φ могут быть выбраны независимо друг от друга. Подчеркнем, что введенные операторы $A^{(\xi)}$, $A^{(\infty)}$ являются характеристическими сингулярными интегральными операторами с кусочно-непрерывными коэффициентами, для которых критерий обратимости может быть сформулирован в стандартных эффективных терминах [5] (необращение в нуль некоторых функций и равенство нулю индекса функции). Отметим также, что при $\varepsilon \to 0$, $N \to \infty$ операторы $A_{\varepsilon,N}$ сходятся к оператору A в сильной операторной топологии и аналогичное соотношение связывает соответствующие сопряженные операторы.

В приводимой ниже теореме речь идет о применимости к оператору A приближенного метода по семейству операторов $\{A_{\varepsilon,N}\}$ при $\varepsilon \to 0$, $N \to \infty$. Определение этого свойства аналогично приведенному выше для простейшего случая последовательностей операторов с заменой условия $n > n_1$ условием $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, $N > N_1$. Аналогичная замена имеет место в утверждении о равносильности сходимости приближенного метода и равномерной обратимости некоторого подсемейства аппроксимирующего семейства.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *К действующему в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$ обратимому полному сингулярному интегральному оператору A с кусочно-непрерывными коэффициентами применим приближенный метод по семейству операторов $\{A_{\varepsilon,N}\}$ при $\varepsilon \to 0$, $N \to \infty$ в том и только том случае, когда для каждой точки $\xi \in \mathbb{R}$, в которой хотя бы одна из функций a_+, a_- терпит разрыв, обратим оператор $A^{(\xi)}$ и обратим оператор $A^{(\infty)}$.*

Доказательство теоремы 1. Оно использует конструкции, предложенные в [2, 4]. Поэтому мы достаточно кратко останавливаемся на них, уделяя внимание только существенным особенностям. Заметим также, что в [4] имеются подробные ссылки на предшествующие работы по теории сходимости приближенных методов, а также приведено изложение основных определений и утверждений используемого ниже локального принципа Гохберга — Крупника. Слово «оператор» в доказательстве теоремы всюду означает «линейный непрерывный оператор, действующий в пространстве $L_p(\mathbb{R})$». Через A будем обозначать введенный выше *обратимый* полный сингулярный интегральный оператор с кусочно-непрерывными коэффициентами, а через $A_{\varepsilon,N}$ $(\varepsilon > 0,\ N > 0)$ — введенное семейство полных сингулярных интегральных операторов с коэффициентами, непрерывными на $\dot{\mathbb{R}}$.

В дальнейшем считаем, что все пределы имеют место при $\varepsilon \to 0$, $N \to \infty$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех семейств $\{B_{\varepsilon,N} : \varepsilon > 0,\ N > 0\}$ операторов, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\sup\big\{\|B_{\varepsilon,N}\| : \varepsilon > 0,\ N > 0\big\} < \infty,$$

существует предел операторов $B_{\varepsilon,N}$ в сильной операторной топологии, который мы обозначаем через $s\text{-}\lim B_{\varepsilon,N}$, и аналогичный предел существует для семейства сопряженных операторов. Множество $\mathfrak{A}$ с «покоординатно» выполняемыми операциями и нормой

$$\{B_{\varepsilon,N}\} \to \sup\big\{\|B_{\varepsilon,N}\| : \varepsilon > 0,\ N > 0\big\}$$

становится банаховой алгеброй.

Введем следующие подмножества множества $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{I}_0 = \big\{\{B_{\varepsilon,N}\} \in \mathfrak{A} : \lim \|B_{\varepsilon,N}\| = 0\big\},$$

$$\mathfrak{I}_s = \big\{\{B_{\varepsilon,N}\} \in \mathfrak{A} : s\text{-}\lim\ B_{\varepsilon,N} = 0\big\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{I}_k$ множество всех семейств операторов вида

$$\big\{T + \Delta_{\varepsilon,N} : \varepsilon > 0,\ N > 0\big\},$$

где T — компактный оператор, $\{\Delta_{\varepsilon,N}\} \in \mathfrak{I}_0$.

Множества $\mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{I}_s$, $\mathfrak{I}_k$ являются собственными замкнутыми двусторонними идеалами в алгебре $\mathfrak{A}$. Имеет место равенство $\mathfrak{I}_s \cap \mathfrak{I}_k = \mathfrak{I}_0$. Из него следует, что для элемента $\{B_{\varepsilon,N}\} \in \mathfrak{A}$ обратимость смежного класса

$$\{B_{\varepsilon,N}\} + \mathfrak{I}_0 \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}_0$$

равносильна обратимости двух смежных классов

$$\{B_{\varepsilon,N}\} + \mathfrak{I}_k \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}_k, \quad \{B_{\varepsilon,N}\} + \mathfrak{I}_s \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}_s.$$

Обратимость последнего смежного класса равносильна обратимости оператора $s\text{-}\lim B_{\varepsilon,N}$.

Применимость к рассматриваемому оператору A приближенного метода по семейству операторов $A_{\varepsilon,N}$ при $\varepsilon \to 0$, $N \to \infty$ равносильна равномерной обратимости семейства

$$\{A_{\varepsilon,N} : 0 < \varepsilon < \varepsilon_1, \ N > N_1\}$$

при подходящих $\varepsilon_1, N_1 > 0$. Последнее свойство равносильно обратимости смежного класса

$$\{A_{\varepsilon,N}\} + \mathfrak{I}_0 \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}_0. \tag{4}$$

Из обратимости оператора A следует, что смежный класс (4) обратим тогда и только тогда, когда обратим смежный класс

$$\{A_{\varepsilon,N}\} + \mathfrak{I}_k \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}_k. \tag{5}$$

Мы получим критерий обратимости последнего смежного класса.

Замечание. Несовпадение областей определения операторов $A_{\varepsilon,N}$ и операторов из алгебры $\mathfrak{A}$ несущественно, поскольку рассматриваемые смежные классы не зависят от продолжения семейства $A_{\varepsilon,N}$ на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Для получения критерия обратимости смежного класса (5) воспользуемся локальным принципом Гохберга — Крупника [5], основные положения которого предполагаются известными.

Обозначим через $\mathfrak{M}_\xi$ ($\xi \in \dot{\mathbb{R}}$) множество всех определенных и непрерывных на $\dot{\mathbb{R}}$ функций φ, обладающих следующими свойствами: $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \dot{\mathbb{R}}$, множество $\varphi^{-1}(\{1\}) \subset \dot{\mathbb{R}}$ является некоторой окрестностью точки ξ. Пусть M_ξ ($\xi \in \dot{\mathbb{R}}$) — множество всех элементов алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}_k$ вида $\{\varphi I : \varepsilon > 0, N > 0\} + \mathfrak{I}_k$, где $\varphi \in \mathfrak{M}_\xi$. Элементы этих смежных классов порождаются семействами, не зависящими от ε и N. Семейство $\{M_\xi\}_{\xi \in \dot{\mathbb{R}}}$ является покрывающей системой локализующих классов в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}_k$ и анализируемый смежный класс $\{A_{\varepsilon,N}\} + \mathfrak{I}_k$ коммутирует со всеми элементами этих локализующих классов.

Введем операторы U_λ ($\lambda > 0$) и H_ξ ($\xi \in \mathbb{R}$), действующие в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ по формулам

$$(U_\lambda f)(x) = \lambda^{1/p} f(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R},$$
$$(H_\xi f)(x) = f(x - \xi), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Это изометрические обратимые операторы, коммутирующие с оператором S, а, следовательно, и с операторами $P_\pm$.

Для $\xi \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ определим операторы $\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)}$ формулой

$$\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)} = H_\xi U_{1/\varepsilon} A^{(\xi)} U_\varepsilon H_{-\xi}.$$

Определим операторы $\tilde{A}_N^{(\infty)}$ ($N > 0$) формулой $\tilde{A}_N^{(\infty)} = U_{1/N} A^{(\infty)} U_N$.

Приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Для любого $\xi \in \mathbb{R}$ смежные классы $\{A_{\varepsilon,N}\} + \mathfrak{I}_k$ и*

$$\{\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)} : \varepsilon > 0,\ N > 0\} + \mathfrak{I}_k$$

являются M_ξ-эквивалентными.

$\lhd$ Достаточно рассмотреть частный случай $A = aI$, где a — кусочно-непрерывная функция на $\mathbb{R}$. Если ξ — точка непрерывности функции a, то $\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)} = a(\xi)I$. В этом случае утверждение тривиально.

Предположим, что ξ — точка разрыва функции a. Пусть $\varphi \in \Phi$ — функция, определяющая функцию $a^{(\varepsilon,N)}$ в окрестности точки ξ, т. е.

$$a^{(\varepsilon,N)}(x) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}\right)\right) a(\xi - \varepsilon) + \varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}\right) a(\xi + \varepsilon),$$

если $|x - \xi| < \varepsilon$.

Оператор $\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)}$ является оператором умножения на функцию $b_\varepsilon(x)$, задаваемую в окрестности $\{x : |x - \xi| < \varepsilon\}$ формулой

$$b_\varepsilon(x) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}\right)\right) a(\xi - 0) + \varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}\right) a(\xi + 0).$$

Требуемая локальная эквивалентность следует из равенства

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sup_{|x-\xi|<\varepsilon} |a^{(\varepsilon,N)}(x) - b_\varepsilon(x)| = 0. \rhd$$

Лемма 2. *Смежные классы $\{A_{\varepsilon,N}\} + \mathfrak{I}_k$ и*

$$\left\{\tilde{A}_N^{(\infty)} : \varepsilon > 0,\ N > 0\right\} + \mathfrak{I}_k$$

являются M_∞-эквивалентными.

$\lhd$ Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1, и мы его опускаем. $\rhd$

Лемма 3. *Смежный класс $\{\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)}\} + \mathfrak{I}_k$ ($\xi \in \mathbb{R}$) M_ξ-обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $A^{(\xi)}$.*

$\lhd$ Предположим, что $\xi \in \mathbb{R}$ и обратим оператор $A^{(\xi)}$. В силу обратимости и изометричности операторов H_ξ и U_ε, семейство $\{\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)} : \varepsilon > 0\}$ равномерно обратимо. Тогда обратим и элемент

$$\left\{\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)} : \varepsilon > 0,\ N > 0\right\} \in \mathfrak{A}.$$

Следовательно, обратим, а тогда и M_ξ-обратим смежный класс $\{\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)}\} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}_k$.

Обратное утверждение докажем от противного. Предположим, что смежный класс $\{\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)}\} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}_k$ M_ξ-обратим, а оператор $A^{(\xi)}$ необратим. Последнее означает, что

$$\inf\left\{\|A^{(\xi)}f\| : f \in L_p(\mathbb{R}),\ \|f\| = 1\right\} = 0 \tag{6}$$

или аналогичное утверждение верно для оператора, сопряженного к $A^{(\xi)}$. Мы рассмотрим первый случай, второй рассматривается аналогично.

Выпишем условие M_ξ-обратимости элемента $\{\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)}\} + \mathfrak{I}_k$ слева:

$$B_{\varepsilon,N}\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)}\varphi I = \varphi I + T + \Delta_{\varepsilon,N}, \tag{7}$$

где $\{B_{\varepsilon,N}\} \in \mathfrak{A}$, $\varphi \in \mathfrak{M}_\xi$, T — компактный оператор в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $\{\Delta_{\varepsilon,N}\} \in \mathfrak{I}_0$.

Пусть $\{\psi_n\}$ — последовательность функций из $\mathfrak{M}_\xi$, носители которых стягиваются к точке ξ. Операторы, сопряженные к $\psi_n I$, сильно сходятся к нулевому оператору. Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} \|T\psi_n I\| = 0$. Выберем функцию ψ из этой последовательности, такую, что $\varphi\psi = \psi$ и $\|T\psi I\| \leqslant \frac{1}{4}$. Умножая обе части (7) справа на оператор ψI, получаем:

$$B_{\varepsilon,N}\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)}\psi I = \psi I + T\psi I + \Delta_{\varepsilon,N}\psi I. \tag{8}$$

Выберем такие $\tilde{\varepsilon}, \tilde{N} > 0$, чтобы выполнялось неравенство $\|\Delta_{\varepsilon,N}\| \leqslant \frac{1}{4}$ для всех $\varepsilon \in (0,\tilde{\varepsilon})$, $N \in (\tilde{N},\infty)$. Тогда для тех же значений ε, N соотношение (8) с учетом вида операторов $\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)}$ может быть переписано так:

$$B_{\varepsilon,N}H_\xi U_{1/\varepsilon}A^{(\xi)}U_\varepsilon H_{-\xi}\psi I = \psi I + \tilde{\Delta}_{\varepsilon,N}, \tag{9}$$

где $\tilde{\Delta}_{\varepsilon,N} = T\psi I + \Delta_{\varepsilon,N}I$. Следовательно, $\|\tilde{\Delta}_{\varepsilon,N}\| < \frac{1}{2}$.

Обозначим $c = \sup_{\varepsilon,N}\|B_{\varepsilon,N}\|$. Выберем функцию $f \in L_p(\mathbb{R})$ такую, что $\|f\| = 1$, $\|A^{(\xi)}f\| < \frac{1}{4c}$. Не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что функция f финитная.

Рассмотрим семейство функций $g_\varepsilon = H_\xi U_{1/\varepsilon} f$, $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon \to 0$ носители функций g_ε стягиваются к точке ξ. Выберем и зафиксируем такое ε, $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$, чтобы выполнялось равенство $\psi g_\varepsilon = g_\varepsilon$. Применяя к функции g_ε операторы в левой и правой частях (9), соответственно получаем:

$$\|B_{\varepsilon,N}H_\xi U_{1/\varepsilon}A^{(\xi)}U_\varepsilon H_{-\xi}\psi g_\varepsilon\| \leqslant c\|A^{(\xi)}U_\varepsilon H_{-\xi}\psi g_\varepsilon\| = c\|A^{(\xi)}f\| \leqslant \frac{1}{4},$$
$$\|(\psi I + \tilde{\Delta}_{\varepsilon,N})g_\varepsilon\| \geqslant \|\psi g_\varepsilon\| - \|\tilde{\Delta}_{\varepsilon,N}g_\varepsilon\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Полученные неравенства противоречат соотношению (9).

В случае, когда аналог соотношения (6) выполняется для оператора, сопряженного к $A^{(\xi)}$, выписывается условие M_ξ-обратимости смежного класса $\{\tilde{A}_\varepsilon^{(\xi)}\}+\mathfrak{I}_k$ справа. В нем нужно перейти к сопряженным операторам, остальные построения проводятся по той же схеме. ▷

По аналогии с леммой 3 доказывается следующее утверждение.

Лемма 4. *Смежный класс $\{\tilde{A}_N^{(\infty)}\} + \mathfrak{I}_k$ M_∞-обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $A^{(\infty)}$.*

Завершим доказательство теоремы. Необходимость условий теоремы вытекает из лемм 1–4 и локального принципа Гохберга — Крупника.

Для доказательства достаточности отметим дополнительно, что из обратимости оператора A следует выполнение условия $a_\pm(\xi) \neq 0$ во всех точках, в которых обе эти функции непрерывны. Поэтому для этих точек обратимы операторы $A^{(\xi)}$. Следовательно, равномерно обратимо семейство $\{A_\varepsilon^{(\xi)} : \varepsilon > 0\}$. Отсюда вытекает обратимость, а тогда и M_ξ-обратимость смежного класса

$$\{A_\varepsilon^{(\xi)}\} + \mathfrak{I}_k \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}_k.$$

Остается воспользоваться леммами 1–4 и рассматриваемым локальным принципом. Теорема 1 доказана.

Приведенные построения могут быть перенесены на случай пространств $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ в предположении, что Γ — контур в комплексной плоскости, состоящий из конечного числа простых замкнутых попарно непересекающихся кривых, удовлетворяющих условию Ляпунова. Соответствующие построения для частного случая приведены в [2], и мы не будем на этом останавливаться.

Литература

1. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—432 с.
2. *Пилиди В. С.* Обоснование метода сглаживания коэффициентов для сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами // Изв. высших учебных заведений. Сев.-Кавк. рег.—2004.—Vol. 128, № 4.—С. 9–12.
3. *Пилиди В. С.* О методе сглаживания коэффициентов для сингулярных интегральных операторов // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-IV. Тезисы докладов.—Ростов н/Д: ЗАО «Центр универсальной полиграфии», 2014.—С. 38.
4. *Пилиди В. С.* Критерии равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1990.—Т. 54, № 6.—С. 1270–1294.
5. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.—Кишинев: «Штиинца», 1973.—426 с.

Статья поступила 19 июня 2014 г.

Пилиди Владимир Ставрович
Южный федеральный университет,
зав. кафедрой информатики и вычислительного эксперимента
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: pilidi@sfedu.ru

A CONVERGENCE CRITERION OF A SMOOTHING METHOD FOR SINGULAR INTEGRAL OPERATORS WITH PIECEWISE CONTINUOUS COEFFICIENTS

Pilidi V. S.

For a complete singular integral operator with piecewise continuous coefficients on the real axis a criterion of convergence of an approximation method by a family of complete singular integral operators with the coefficients being continuous on the one-point compactification of the real axis is obtained.

Key words: complete singular integral operator, piecewise continuous coefficients, convergence of the approximation method, uniform invertibility, local principle.