Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 12–15

УДК **512.5**

СЕТЬ И ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СЕТЕВАЯ ГРУППА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С НЕРАСЩЕПИМЫМ МАКСИМАЛЬНЫМ ТОРОМ[1]

Н. А. Джусоева

Владимиру Амурхановичу Койбаеву
к его шестидесятилетию

Элементы матриц нерасщепимого максимального тора $T = T(d)$ (связанного с радикальным расширением $k(\sqrt[n]{d})$ степени n основного поля k) порождают некоторое подкольцо $R(d)$ поля k. Пусть R — промежуточное подкольцо, $R(d) \subseteq R \subseteq k$, $d \in R$, $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n$ — цепочка идеалов кольца R, причем $dA_n \subseteq A_1$. Через $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы обозначаем сеть идеалов, определенную формулой $\sigma_{ij} = A_{i+1-j}$ при $j \leqslant i$ и $\sigma_{ij} = dA_{n+i+1-j}$ при $j \geqslant i+1$. Через $G(\sigma)$ и $E(\sigma)$ обозначаются соответственно сетевая и элементарная сетевая группы. Доказывается, что $TG(\sigma)$ и $TE(\sigma)$ — промежуточные подгруппы группы $GL(n,k)$, содержащие тор T.

Ключевые слова: надгруппа, промежуточная подгруппа, элементарная группа, нерасщепимый максимальный тор, трансвекция.

Сеть и элементарная сетевая группа, которые определяются в настоящей заметке, связаны с изучением подгрупп, содержащих нерасщепимый максимальный тор T, в полной линейной группе $G = GL(n,k)$ над полем k (см. [3, 4]).

Пусть $x^n - d$ — неприводимый многочлен степени n над полем $k, d \in k$. Тогда $e_i = \theta^{i-1}$, $\theta = \sqrt[n]{d}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, образуют базис радикального расширения степени n поля $K = k(\sqrt[n]{d})$ над k. Мы рассматриваем нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, который является образом мультипликативной группы поля $K = k(\sqrt[n]{d})$ при регулярном вложении в G. В выбранном базисе тор $T = T(d)$ определяется как матричная группа

$$T = T(d) = \{c(x) : x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n \setminus \bar{0}\},$$

причем элементы матрицы $c(x) = (c_{ij})$ определяются следующим образом: $c_{ij} = x_{i+1-j}$ при $j \leqslant i$ и $c_{ij} = dx_{n+i+1-j}$ при $j \geqslant i+1$. С каждой матрицей $c = c(x) = (c_{ij})$ связана обратная матрица $c^{-1} = c(y) = (c'_{ij})$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in k^n$, где $y_i = \frac{C_{1i}}{|C(x)|}$, причем C_{1i} — алгебраическое дополнение элемента c_{1i} матрицы $c = c(x)$. Рассматриваем унитальное подкольцо $R_0 = R(d)$ поля k, порожденное элементами $x_i y_j$, $dx_r y_s$:

$$R_0 = R(d) = \operatorname{ring}\langle x_i y_j, dx_r y_s : \ i+j \leqslant n+1, \ r+s > n+1, \ \ x \in k^n \setminus \bar{0}\rangle.$$

[1]Результаты настоящей заметки были получены в рамках государственного задания Минобрнауки России.

Пусть R — промежуточное подкольцо, $R_0 \subseteq R \subseteq k$. Пусть, далее, $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n$ — цепочка идеалов кольца R, причем $dA_n \subseteq A_1$. Через $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы обозначаем сеть идеалов, определенную формулой

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j \leqslant i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j \geqslant i+1. \end{cases}$$

Через $G(\sigma)$ обозначается сетевая группа [1].

Сеть σ мы называем *сетью, ассоциированной с тором T*. Подгруппу $E(\sigma)$, порожденную всеми (общими) трансвекциями из $G(\sigma)$, мы называем *элементарной сетевой группой, ассоциированной с тором T*.

Напомним, что (общая) трансвекция — это матрица $(\delta_{ij} + \alpha_i\beta_j)$, у которой

$$\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n = 0, \quad \alpha_i, \beta_j \in k,$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Частным случаем (общей) трансвекции является элементарная трансвекция, а именно — это матрица $t_{rs}(\alpha) = e + \alpha e_{rs}$, где $r \neq s$, $\alpha \in k$, e — единичная матрица, e_{rs} — матрица, у которой на позиции (r, s) стоит 1, а на остальных местах нули.

Доказательство следующей теоремы основано на результатах работы [2].

Теорема. 1) *Тор T нормализует группы $G(\sigma)$ и $E(\sigma)$. Следовательно, $TG(\sigma)$ и $TE(\sigma)$ — промежуточные подгруппы группы $GL(n, k)$, содержащие тор T.*

2) *Если $b = (\delta_{ij} + \alpha_i\beta_j)$ — трансвекция из $TG(\sigma)$, то $\alpha_i\beta_j \in \sigma_{ij}$.*

3) *Группа $TE(\sigma)$ порождается тором T и корневыми подгруппами:*

$$TE(\sigma) = \langle T, t_{i1}(A_i) : 2 \leqslant i \leqslant n \rangle.$$

Более точно, всякая трансвекция из $E(\sigma)$ имеет вид

$$c(x)t_{21}(\alpha_2)t_{31}(\alpha_3)\ldots t_{n1}(\alpha_n)c^{-1}(x)$$

для некоторых $c(x) \in T$, $\alpha_i \in A_i$.

Прежде чем доказывать теорему сформулируем и докажем несколько утверждений.

Лемма 1 [2, теорема 2]**.** *Тор T нормализует группы $G(\sigma)$ и $E(\sigma)$. Следовательно, $TG(\sigma)$ и $TE(\sigma)$ — промежуточные подгруппы, содержащие тор T.*

Лемма 2. *Пусть $b = (\delta_{ij} + \alpha_i\beta_j)$ — трансвекция из $TG(\sigma)$. Тогда $\alpha_i\beta_j \in \sigma_{ij}$.*

$\lhd$ Доказательство этого утверждения разобьем на две части:

а) Матрица b имеет вид матрицы

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \lambda_n & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

По условию $b \in TG(\sigma)$. Покажем, например, что $\lambda_2 \in \sigma_{21} = A_2$. По условию

$$b = C(\bar{x}) \cdot a \in T \cdot G(\sigma),$$

где $a=(a_{ij})\in G(\sigma)$,

$$C(\bar{x})=\begin{pmatrix} x_1 & dx_n & \dots & dx_2\\ x_2 & x_1 & \dots & dx_3\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & x_{n-1} & \dots & x_1\end{pmatrix},$$

$$a=\begin{pmatrix} 1+a_1 & da_n^{(1)} & \dots & da_2^{(n-1)}\\ a_2 & 1+a_1^{(1)} & \dots & da_3^{(n-1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n & a_{n-1}^{(1)} & \dots & 1+a_1^{(n-1)}\end{pmatrix},$$

где $a_i^{(k)}\in A_i$, $i=1,\dots,n$, $k=0,\dots,n-1$, $a_i^{(0)}=a_i$, $x_1,\dots,x_n\in k$. Приравнивая первую строку матрицы b к первой строке матрицы $c(\bar{x})\,a$, мы получим систему из n линейных уравнений относительно $x_1,dx_n,\dots,dx_2$. Из этой системы находим

$$x_1=\frac{A_{11}}{\Delta},\ dx_n=\frac{A_{21}}{\Delta},\ dx_{n-1}=\frac{A_{31}}{\Delta},\ \dots,\ dx_2=\frac{A_{n1}}{\Delta},$$

где $\Delta=\det a\in R^*$, A_{i1} — алгебраические дополнения элементов a_{i1} матрицы $a=(a_{ij})$. Далее,

$$\begin{aligned}\lambda_2&=x_2(1+a_1)+x_1a_2+dx_na_3+\dots+dx_3a_n\\ &=\frac{A_{n1}}{d\Delta}(1+a_1)+\frac{A_{11}}{\Delta}\,a_2+\frac{A_{21}}{\Delta}\,a_3+\frac{A_{31}}{\Delta}\,a_4+\dots+\frac{A_{n-1,1}}{\Delta}\,a_n.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что всякий элемент из A_{n1} содержится в dA_2, либо в $d^2A_k\subseteq d^2A_n\subseteq\mu A_1\subseteq dA_2$, следовательно,

$$\frac{A_{n1}}{d\Delta}(1+a_1)\in A_2.$$

Очевидно, далее, что

$$\frac{A_{11}}{\Delta}\,a_2\in A_2.$$

Далее, нетрудно видеть, что для $i=2,\dots,n$

$$A_{i1}\in dA_k\subseteq A_1\subseteq A_2.$$

Отсюда $\lambda_2\in A_2$.

b) $b=(\delta_{ij}+\alpha_i\beta_j)$ — произвольная трансвекция. Согласно предложению 2.1.1 (3) для некоторой матрицы $C\in T$ матрица $C^{-1}bC$ имеет вид (1), а потому в силу уже доказанного пункта a) имеем $C^{-1}bC\in G(\sigma)$. Из леммы 1 тогда мы имеем включение $b\in G(\sigma)$. $\triangleright$

Предложение. *Группа $TE(\sigma)$ порождается тором T и корневыми подгруппами:*

$$TE(\sigma)=\langle T,t_{i1}(A_i):2\leqslant i\leqslant n\rangle.$$

Более точно, всякая трансвекция из $E(\sigma)$ имеет вид

$$C(x)t_{21}(\alpha_2)t_{31}(\alpha_3)\dots t_{n1}(\alpha_n)C^{-1}(x)$$

для некоторых $C(x)\in T$, $\alpha_i\in A_i$.

◁ Пусть $b = (\delta_{ij} + \alpha_{ij}\beta_{ij})$ — трансвекция из $TE(\sigma)$. Тогда согласно лемме 2 $b \in E(\sigma)$. Далее, для некоторой матрицы $C \in T$ матрица $C^{-1}bC$ имеет вид (1), с другой стороны, по лемме 1 $C^{-1}bC \in G(\sigma)$. Следовательно, матрица $C^{-1}bC \in G(\sigma)$ (а потому и матрица b) принадлежит правой части доказываемого равенства. ▷

Теперь, очевидно, теорема вытекает из лемм 1 и 2 и предложения.

Литература

1. *Боревич З. И.* Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН.—1976.—Т. 64.—С. 12–29.
2. *Джусоева Н. А.* Сетевые кольца нормализуемые тором // Тр. ИММ УрО РАН.—2013.—Т. 19, № 3.—С. 113–119.
3. *Койбаев В. А.* Подгруппы группы $GL(2, Q)$, содержащие нерасщепимый максимальный тор // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 312, № 1.—С. 36–38.
4. *Койбаев В. А.* Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор // Алгебра и анализ.—2009.—Т. 21, №5.—С. 70–86.

Статья поступила 12 мая 2015 г.

Джусоева Нонна Анатольевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
ассистент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: `djusoevanonna@rambler.ru`

THE NET AND ELEMENTARY NET GROUP ASSOCIATED WITH NON-SPLIT MAXIMAL TORUS

Djusoeva N. A.

The elements of matrixes of a non-split maximal torus $T = T(d)$ (associated with a radical extension $k(\sqrt[n]{d})$ of degree n of the ground field k) generate some subring $R(d)$ of the field k. Let R be an intermediate subring, $R(d) \subseteq R \subseteq k$, $d \in R$, $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n$ be a chain of ideals of the ring R, and $dA_n \subseteq A_1$. By $\sigma = (\sigma_{ij})$ we denote the net of ideals defined by $\sigma_{ij} = A_{i+1-j}$ with $j \leqslant i$ and $\sigma_{ij} = dA_{n+i+1-j}$ with $j \geqslant i + 1$. By $G(\sigma)$ and $E(\sigma)$ we denote the net and the elementary net group, respectively. It is proved, that $TG(\sigma)$ and $TE(\sigma)$ are intermediate subgroups of $GL(n, k)$ containing the torus T.

Key words: overgroup, intermediate subgroup, elementary group, non-split maximal torus, transvection.