Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 84–92

УДК **517.984.64**

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРА РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ

С. А. Унучек

В работе рассматривается задача восстановления k-й разделенной разности последовательности при условии, что приближенно известно преобразование Фурье этой последовательности на интервале. Построен оптимальный метод восстановления.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, экстремальная задача, разделенная разность, преобразование Фурье.

1. Введение

Задача оптимального восстановления линейного функционала по значениям других линейных функционалов впервые была поставлена С. А. Смоляком [1] в 1965 г. В основе этой работы лежали идеи А. Н. Колмогорова о наилучшем приближении на классе функций, изложенные в работах [2] и [3]. Задача об оптимальном восстановлении по неточно заданной информации была поставлена в работе [4]. В данной работе изучается задача восстановления самой последовательности или ее k-й разделенной разности $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ в среднеквадратичной норме по неточно заданному на интервале преобразованию Фурье данной последовательности в равномерной норме на классе последовательностей с ограниченной n-й разделенной разностью. Задача одновременного восстановления нескольких разделенных разностей различного порядка по неточно заданной последовательности с ограниченной n-й разделенной разностью в среднеквадратичной норме рассматривалась в работе [5]. Задача восстановления функции и ее k-й производной по неточно заданному преобразованию Фурье этой функции рассматривалась в работе [6]. Результат, полученный в данной работе, в предельном случае переходит в результат, полученный в работе [6].

2. Основные понятия

Рассмотрим пространство $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$, всех последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ таких, что

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty, \quad \|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \left(h \sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2\right)^{1/2}.$$

Напомним определение оператора разделенных разностей:

$$\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{\frac{x_{j+1} - x_j}{h}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}, \quad \Delta_h^k x = \Delta_h\big(\Delta_h^{k-1} x\big).$$

Обозначим

$$\mathscr{L}^n_{2,h}(\mathbb{Z}) = \big\{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) : \|\Delta^n_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leqslant 1\big\},$$

$$\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}) = \big\{x \in \mathscr{L}^n_{2,h}(\mathbb{Z}) : (Fx)(\cdot) \in L_\infty([-\pi/h, \pi/h])\big\},$$

где образом Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ является функция

$$(Fx)(\omega) = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} \in L_2([-\pi/h, \pi/h]).$$

Образами Фурье для операторов разделенных разностей являются функции

$$(F\Delta_h x)(\omega) = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{x_{j+1}-x_j}{h}\, e^{-ijh\omega}$$

$$= \frac{1}{h}\left(h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_{j+1}e^{-i(j+1)h\omega}e^{ih\omega} - h\sum_{j\in Z} x_j e^{-ijh\omega}\right)$$

$$= \frac{e^{ih\omega}}{h}\cdot h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_{j+1}e^{-i(j+1)h\omega} - \frac{1}{h}\cdot h\sum_{j\in Z} x_j e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega}-1}{h}\,(Fx)(w).$$

Следовательно,

$$\big(F\Delta^k_h x\big)(\omega) = \frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}\,(Fx)(\omega).$$

Пусть для каждой последовательности $x \in \mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$ также приближенно известно ее преобразование Фурье на множестве $(-\sigma;\sigma)$, $\sigma \leqslant \pi/h$, в метрике $L_\infty(-\sigma;\sigma)$, т. е. известна некоторая функция $y \in L_\infty(-\sigma;\sigma)$ такая, что

$$\big\|(Fx)(\cdot) - y(\cdot)\big\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \leqslant \delta.$$

Задача состоит в оптимальном восстановлении либо самой последовательности, либо оператора разделенной разности k-го порядка последовательности $x \in \mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$.

В качестве метода восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$m(y) :\ L_\infty(-\sigma;\sigma) \to l_{2,h}(\mathbb{Z}).$$

Погрешностью метода m будем называть величину

$$e\big(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta, m\big) = \sup_{\substack{x\in\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),\\ y\in L_\infty(-\sigma;\sigma),\\ \|(Fx)(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\leqslant\delta}} \big\|(\Delta^k_h x) - m(y(\cdot))\big\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E\big(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta\big) = \inf_{m:\,L_\infty(-\sigma;\sigma)\to l_{2,h}(\mathbb{Z})} e\big(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta, m\big).$$

Метод m, на котором достигается нижняя грань, будем называть *оптимальным методом.*

3. Основной результат

Положим
$$g(\omega)=\frac{|e^{ih\omega}-1|^2}{h^2}=\left(\frac{2\sin\frac{h\omega}{2}}{h}\right)^2,$$
$\widehat{\sigma}$ — решение уравнения $\int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^n(\omega)d\omega=\frac{2\pi}{\delta^2}$, $\sigma_0=\min(\sigma,\widehat{\sigma})$.

Теорема 1. *Погрешность оптимального восстановления равна*
$$E\bigl(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta\bigr)=\begin{cases}\sqrt{\Omega}, & \sigma_0<\pi/h,\\ \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)\,d\omega}, & \sigma_0=\pi/h,\end{cases}\tag{1}$$
где
$$\Omega=\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} g^k(\omega)\,d\omega+g^{k-n}(\sigma_0)\left(1-\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} g^n(\omega)\,d\omega\right).$$

При $\sigma_0<\pi/h$ метод $\widehat{m}(y)$ такой, что
$$F\widehat{m}(y)=\begin{cases}\alpha(\omega)y(\omega), & |\omega|\leqslant\sigma_0,\\ 0, & |\omega|>\sigma_0,\end{cases}$$
где
$$\alpha(\omega)=\left(1-\left(\frac{g(\omega)}{g(\sigma_0)}\right)^{n-k}\right)\cdot\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k},$$
является оптимальным. При $\sigma_0=\pi/h$ метод $\widehat{m}(y)$ такой, что
$$F\widehat{m}(y)=\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}\,y(\omega),$$
является оптимальным.

4. Доказательство

Лемма 1. *Имеет место неравенство*
$$E\bigl(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta\bigr)\geqslant\sup_{\substack{x\in\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),\\ \|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\leqslant\delta}}\bigl\|\Delta^k_h x\bigr\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.\tag{2}$$

$\triangleleft$ Для любой последовательности $x\in\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$ такой, что выполнено неравенство $\|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\leqslant\delta$, и для любого метода m имеем
$$2\bigl\|\Delta^k_h x\bigr\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}=\bigl\|\Delta^k_h(x)-\Delta^k(-x)+m(0)-m(0)\bigr\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}$$
$$\leqslant\bigl\|\Delta^k_h(x)-m(0)\bigr\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}+\bigl\|\Delta^k_h(-x)-m(0)\bigr\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\leqslant 2e\bigl(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta,m\bigr),$$
т. е. для любого метода m
$$e\bigl(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta,m\bigr)\geqslant\sup_{\substack{x\in\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),\\ \|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\leqslant\delta}}\bigl\|\Delta^k_h x\bigr\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$
Отсюда следует неравенство (2). $\triangleright$

Доказательство теоремы 1. Из леммы 1 следует, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\begin{gathered} \left\|\Delta_h^k x\right\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to \max, \\ \left\|\Delta_h^n x\right\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leqslant 1, \quad \left\|(Fx)(\omega)\right\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \leqslant \delta. \end{gathered} \tag{3}$$

Перейдем к квадрату задачи (3) и запишем ее в образах Фурье. По теореме Планшереля имеем

$$\left\|\Delta_h^m x\right\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \frac{1}{2\pi}\left\|F(\Delta_h^m x)(\omega)\right\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])},$$

$$\left\|\Delta_h^m x\right\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h}\frac{|e^{ih\omega}-1|^{2m}}{h^{2m}}\,|Fx(\omega)|^2\,d\omega.$$

Тем самым, приходим к следующей задаче:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h}\frac{|e^{ih\omega}-1|^{2k}}{h^{2k}}\,|(Fx)(\omega)|^2\,d\omega \to \max; \\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h}\frac{|e^{ih\omega}-1|^{2n}}{h^{2n}}\,|(Fx)(\omega)|^2\,d\omega \leqslant 1, \quad |(Fx)(\omega)|^2 \leqslant \delta^2 \end{gathered} \tag{4}$$

для почти всех $\omega \in (-\sigma;\sigma)$, $x \in \mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$.

Пусть $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$. Покажем, что значение задачи (4) не меньше, чем

$$\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^k(\omega)\,d\omega.$$

Введем функцию $p(\omega) = \frac{1}{2\pi}|(Fx)(\omega)|^2 d\omega \geqslant 0$. Тогда задача (4) принимает вид

$$\begin{gathered} \int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)p(\omega)\,d\omega \to \max; \\ \int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^n(\omega)p(\omega)\,d\omega \leqslant 1, \quad p(\omega) \leqslant \frac{\delta^2}{2\pi}. \end{gathered} \tag{5}$$

Положим $\widehat{p}(\omega) = \begin{cases} \frac{\delta^2}{2\pi}, & \omega \in (-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}), \\ 0, & \omega \notin (-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}). \end{cases}$

Так как

$$\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^n(\omega)\,\widehat{p}(\omega)\,d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^n(\omega)\,d\omega = 1,$$

то функция $\widehat{p}(\omega)$ допустима в задаче (5), т. е. значение этой задачи не меньше, чем

$$\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)\,\widehat{p}(\omega)\,d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^k(\omega)\,d\omega.$$

При $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$ имеем, что

$$E^2\big(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta\big) \geqslant \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^k(\omega)\,d\omega,$$

т. е. получена оценка снизу при $\sigma_0 = \widehat{\sigma}$.

Рассмотрим случай $\sigma < \widehat{\sigma}$, $\sigma < \pi/h$. Положим

$$S(m) = \sqrt{\frac{\pi m}{g^n\left(\frac{\sigma+\frac{1}{m}}{2}\right)}\left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\sigma} g^n(\omega)\,d\omega\right)}.$$

Пусть m достаточно большое натуральное число такое, что выполняется неравенство $\sigma + \frac{1}{m} < \frac{\pi}{h}$. Рассмотрим последовательность функций x_m, для которой

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} \delta, & \omega \in (-\sigma;\sigma),\\ S(m), & \sigma < |\omega| < \sigma + \frac{1}{m},\\ 0, & |\omega| \geqslant \sigma + \frac{1}{m}.\end{cases}$$

Неравенство $\frac{1}{2\pi}|(Fx_m)(\omega)|^2 \leqslant \frac{\delta^2}{2\pi}$ выполнено для всех $|\omega| < \sigma$. Далее, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^n(\omega)|(Fx_m)(\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(2\delta^2\int\limits_0^{\sigma} g^n(\omega)\,d\omega + 2S^2(m)\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}} g^n(\omega)\,d\omega\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\left(\delta^2\int\limits_0^{\sigma} g^n(\omega)\,d\omega + \frac{\pi m}{g^n\big(\sigma+\frac{1}{m}\big)}\cdot\left(1 - \frac{\delta^2}{\pi}\int\limits_0^{\sigma} g^n(\omega)\,d\omega\right)\cdot\frac{1}{m}\,g^n\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)\right) = 1,$$

т. е. последовательность функций x_m допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)|(Fx_m)(\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(2\delta^2\int\limits_0^{\sigma} g^k(\omega)\,d\omega + 2S^2(m)\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}} g^k(\omega)\,d\omega\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi}\left(\delta^2\int\limits_0^{\sigma} g^k(\omega)\,d\omega + \frac{\pi m}{g^n\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}\cdot\left(1 - \frac{\delta^2}{\pi}\int\limits_0^{\sigma} g^n(\omega)\,d\omega\right)\cdot\frac{1}{m}\,g^k(\sigma)\right).$$

При $m \to \infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к

$$\Omega = \left(\frac{\delta^2}{\pi}\int\limits_0^{\sigma} g^k(\omega)\,d\omega + g^{k-n}(\sigma)\cdot\left(1 - \frac{\delta^2}{\pi}\int\limits_0^{\sigma} g^n(\omega)\,d\omega\right)\right).$$

Тем самым, мы показали, что при $\sigma < \widehat{\sigma}$, $\sigma < \pi/h$ справедливо неравенство $E^2(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta) \geqslant \Omega$.

В случае $\sigma = \frac{\pi}{h} < \widehat{\sigma}$ положим $(Fx)(\omega) = \delta$, $|\omega| < \frac{\pi}{h}$. Тогда, поскольку выполнено равенство $\frac{\delta^2}{2\pi}\int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} g^n(\omega)\,d\omega = 1$, $\widehat{\sigma} > \frac{\pi}{h}$, функция $g^n(\omega)$ неотрицательная, то выполнено неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^n(\omega)|(Fx_m)(\omega)|^2\,d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^n(\omega)\,d\omega < 1.$$

Это означает, что функция $x(\cdot)$ допустима в задаче (4) и значение задачи не менее величины

$$\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)\,d\omega.$$

Тем самым мы показали, что

$$E\big(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),k,\delta\big)\geqslant\begin{cases}\sqrt{\Omega}, & \sigma_0<\pi/h,\\ \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)\,d\omega}, & \sigma_0=\pi/h.\end{cases}$$

Пусть $\sigma_0=\min(\sigma,\widehat{\sigma})$, $\sigma_0<\pi/h$. Покажем, что метод $\widehat{m}:L_\infty(-\sigma;\sigma)\to l_{2,h}(\mathbb{Z})$ такой, что

$$F\widehat{m}(y)=\begin{cases}\alpha(\omega)y(\omega), & |\omega|<\sigma_0,\\ 0, & |\omega|\geqslant\sigma_0,\end{cases}$$

является оптимальным.

Для оценки оптимальной погрешности восстановления разделенных разностей рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered}\big\|\Delta^k_h x-\widehat{m}_k(y)\big\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\to\max,\quad \big\|(Fx)(\cdot)-y(\cdot)\big\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\leqslant\delta,\\ x\in\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),\quad y\in L_\infty(-\sigma;\sigma).\end{gathered}\tag{6}$$

В образах Фурье квадрат задачи принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\Bigg(\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}\,Fx(\omega)-\alpha(\omega)y(\omega)\right|^2d\omega\\ +\int\limits_{\sigma_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi/h}\frac{|e^{ih\omega}-1|^{2k}}{h^{2k}}\,|Fx(\omega)|^2d\omega\Bigg)\to\max,\\ |Fx(\omega)-y(\omega)|^2\leqslant\delta^2\end{gathered}\tag{7}$$

для почти всех $\omega\in(-\sigma,\sigma)$,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h}\frac{|e^{ih\omega}-1|^{2n}}{h^{2n}}\,|Fx(\omega)|^2\,d\omega\leqslant 1.$$

Положим $z(\omega)=Fx(\omega)-y(\omega),|z(\omega)|\leqslant\delta$. Тогда максимизируемое выражение можно представить в виде

$$\begin{gathered}D=\frac{1}{2\pi}\Bigg(\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\left|\left(\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)\right)\cdot Fx(\omega)+\alpha(\omega)z(\omega)\right|^2d\omega\\ +\int\limits_{\sigma_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi/h} g^k(\omega)\big|Fx(\omega)\big|^2d\omega\Bigg)\to\max.\end{gathered}$$

Оценим подынтегральное выражение из первого интеграла, применив неравенство Коши — Буняковского:

$$\left|\left(\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)\right)\cdot Fx(\omega)+\alpha(\omega)z(\omega)\right|^2$$
$$=\left|\frac{\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1(\omega)}}\cdot\sqrt{\widehat{\lambda}_1(\omega)}Fx(\omega)+\frac{\alpha(\omega)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2(\omega)}}\cdot\sqrt{\widehat{\lambda}_2(\omega)}z(\omega)\right|^2$$
$$\leqslant\left(\frac{\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)\right|^2}{\widehat{\lambda}_1(\omega)}+\frac{|\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2(\omega)}\right)\cdot\left(\widehat{\lambda}_1(\omega)|Fx(\omega)|^2+\widehat{\lambda}_2(\omega)|z(\omega)|^2\right),$$

где $\widehat{\lambda}_1(\omega)>0$, $\widehat{\lambda}_2(\omega)>0$ для почти всех $\omega<\sigma_0$.

Пусть

$$Q(\omega)=\frac{\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)\right|^2}{\widehat{\lambda}_1(\omega)}+\frac{|\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2(\omega)}\leqslant 1. \tag{8}$$

Тогда значение задачи не больше, чем

$$D\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\widehat{\lambda}_1(\omega)|Fx(\omega)|^2\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\widehat{\lambda}_2(\omega)|z(\omega)|^2\,d\omega$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi/h}g^k(\omega)|Fx(\omega)|^2\,d\omega.$$

Пусть

$$\widehat{\lambda}_1(\omega)=\frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)},\quad \widehat{\lambda}_2(\omega)=g^k(\omega)-\widehat{\lambda}_1(\omega).$$

Тогда

$$D\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)}\,|Fx(\omega)|^2\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi/h}g^k(\omega)|Fx(\omega)|^2\,d\omega$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\left(g^k(\omega)-\frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)}\right)|z(\omega)|^2\,d\omega.$$

Учитывая, что функция $g^{k-n}(\omega)$ неотрицательная, четная и убывающая при $\omega>0$, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi/h}g^k(\omega)|Fx(\omega)|^2\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi/h}g^{k-n}(\omega)\cdot g^n(\omega)|Fx(\omega)|^2\,d\omega$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\,g^{k-n}(\sigma_0)\int\limits_{\sigma_0\leqslant|\omega|\leqslant\pi/h}g^n(\omega)|Fx(\omega)|^2\,d\omega.$$

Таким образом, получаем

$$D\leqslant\frac{g^{k-n}(\sigma_0)}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leqslant\pi/h}g^n(\omega)|Fx(\omega)|^2\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0}\left(g^k(\omega)-\frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)}\right)|z(\omega)|^2\,d\omega.$$

Учитывая условия в задаче (7), получаем

$$D \leqslant g^{k-n}(\sigma_0) \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \leqslant \pi/h} g^n(\omega)\, d\omega\right) + \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega| < \sigma_0} g^k(\omega)\, d\omega.$$

Так как верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, метод $\widehat{m}$ — оптимальный.

Покажем, что условие (8) выполнимо. Пусть

$$\alpha(\omega) = \frac{\widehat{\lambda}_2(\omega)}{\widehat{\lambda}_1(\omega) + \widehat{\lambda}_2(\omega)} \cdot \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k}.$$

Тогда

$$Q(\omega) = \frac{\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k} - \alpha(\omega)\right|^2}{\widehat{\lambda}_1(\omega)} + \frac{|\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2(\omega)} = \frac{g^k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1(\omega) + \widehat{\lambda}_2(\omega)} = 1,$$

и условие выполняется.

Покажем, что при $\sigma = \frac{\pi}{h} < \widehat{\sigma}$ метод $\widehat{m} : L_\infty(-\sigma; \sigma) \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$ такой, что

$$F\widehat{m}(y) = \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k}\, y(\omega), \quad |\omega| < \frac{\pi}{h}$$

оптимален. В этом случае квадрат задачи (7) имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \leqslant \pi/h} \left| \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k}\, Fx(\omega) - \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k}\, y(\omega)\right|^2 d\omega \to \max, \\ |Fx(\omega) - y(\omega)|^2 \leqslant \delta^2 \end{gathered} \tag{9}$$

для почти всех $\omega \in (-\pi/h, \pi/h)$,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \leqslant \pi/h} \frac{|e^{ih\omega} - 1|^{2n}}{h^{2n}}\, |Fx(\omega)|^2\, d\omega \leqslant 1.$$

Учитывая ограничения в задаче (9), оценим первый интеграл:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \leqslant \pi/h} \left| \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k}\, Fx(\omega) - \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k}\, y(\omega)\right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \leqslant \pi/h} g^k(\omega) |Fx(\omega) - y(\omega)|^2\, d\omega \leqslant \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \leqslant \pi/h} g^k(\omega)\, d\omega. \end{aligned}$$

Верхняя и нижняя оценки снова совпали, метод оптимален.

Пусть

$$\mathscr{W}_2^n(\mathbb{R}) = \Big\{ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) :\ f^{(n-1)} \in LAC(\mathbb{R}),\ f^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \Big\}$$

— соболевское пространство, где $LAC(\mathbb{R})$ — множество функций, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке. Рассмотрим класс функций

$$\mathbb{W}_{2,\infty}^n(\mathbb{R}) = \Big\{ f(\cdot) \in \mathscr{W}_2^n(\mathbb{R}) :\ \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1,\ (Ff)(\cdot) \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}) \Big\},$$

где $(Ff)(\cdot)$ — преобразование Фурье функции f.

Заметим, что, в пределе при $h \to 0$ k-я разделенная разность последовательности $x \in \mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$ переходит в производную k-го порядка функции $f(\cdot) \in \mathbb{W}^n_{2,\infty}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{h\to 0} g(\omega) = \omega^2, \quad \lim_{h\to 0} \widehat{\sigma} = \left(\frac{\pi(2n+1)}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n+1}}.$$

Имеем

$$\lim_{h\to 0} E\big(\mathscr{L}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta\big) = \begin{cases} \delta\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^{2k+1}}{\pi(2k+1)}}, & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}, \\ \delta\sqrt{\left(\frac{\delta^2\sigma^{(2k+1)}}{\pi(2k+1)} + \sigma^{2(k-n)}\Big(1 - \big(\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}}\big)^{(2n+1)}\Big)\right)}, & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Величина, стоящая в правой части равенства, совпадает с погрешностью восстановления k-й производной на классе $\mathbb{W}^n_{2,\infty}(\mathbb{R})$ по неточно заданному преобразованию Фурье, полученной в работе [6].

Кроме того, предельный оптимальный метод совпадает с оптимальным методом, полученным для этой задачи в той же работе.

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: дис. ...канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1965.
2. *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика и механика.—М.: Наука, 1985.—470 с.
3. *Никольский С. М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи мат. наук.—1950.—Т. 5, № 2.—С. 165–177.
4. *Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Мат. заметки.—1975.—Т. 17, № 3.—С. 359–368.
5. *Унучек С. А.* Оптимальное восстановление разделенных разностей по неточно заданной последовательности // Диф. уравнения.—2015.—(В печати).
6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функцион. анализ и его прил.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
7. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди — Литтлвуда — Полиа и восстановление производных по неточной информации // Докл. РАН.—2011.—Т. 438, № 3.—С. 300–302.

Статья поступила 24 февраля 2015 г.

Унучек Светлана Александровна
Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики,
старший преподаватель
РОССИЯ, 119454, Москва, Проспект Вернадского, 78
E-mail: unuchek@mirea.ru

ON OPTIMAL RECOVERY OF THE OPERATOR OF k-th DIVIDED DIFFERENCE FROM ITS INACCURATELY GIVEN FOURIER TRANSFORM

Unuchek S. A.

This paper considers the recovery problem of the k-th divided difference of sequence, provided that the Fourier transform of this sequence on the interval is approximately known. The optimal recovery method is also constructed.

Key words: optimal recovery, extremal problem, divided difference, Fourier transform.