Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 2, С. 3–11

УДК **517.9**

ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНО-РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ

О. Г. Авсянкин

Рассматриваются парные многомерные интегральные операторы с однородно-разностными ядрами, действующие в L_p-пространствах. Для таких операторов определен символ, в терминах которого получены необходимые и достаточные условия обратимости операторов.

Ключевые слова: интегральный оператор, однородно-разностное ядро, символ, обратимость, сферические гармоники.

Введение

В настоящее время имеется немало работ, посвященных многомерным интегральным операторам с однородными степени $(-n)$ ядрами и их обобщениями (см., например, [1–4] и цитированные в них источники). В работе [5] были введены и изучены операторы с однородно-разностными ядрами, т. е. с ядрами, которые являются однородными степени $(-n)$ по одним переменным и разностными по другим. Развитием этого направления стала статья [6], в которой была построена и исследована банахова алгебра, порожденная многомерными интегральными операторами с однородно-разностными ядрами.

Данная работа продолжает исследования, начатые в статьях [5] и [6]. Ее целью является изучение парных многомерных интегральных операторов с однородно-разностными ядрами, действующих в пространствах суммируемых функций. Для этих операторов определен символ, представляющий собой совокупность пар функций специального вида. В работе получены необходимые и достаточные условия обратимости парных операторов с однородно-разностными ядрами, которые формулируются в терминах невырожденности их символов.

В работе использованы следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство; $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$; $x' = x/|x|$; $x \cdot y = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$; $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = 1\}$; $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел; $\mathbb{R}_+^{1+m} = \{x \in \mathbb{R}^{1+m} \colon x_1 > 0\}$; $Y_{\nu\mu}(\sigma)$ — сферические гармоники порядка ν; $d_n(\nu)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка ν:

$$d_n(\nu) = (n + 2\nu - 2)\frac{(n + \nu - 3)!}{\nu!(n-2)!};$$

I — тождественный оператор (ниже из контекста всегда будет ясно в каком пространстве рассматривается этот оператор).

Постановка задачи и основной результат. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. В пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$ рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m} k(x,y,t-s)\,\varphi(y,s)\,dyds, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^m$, предполагая, что функция $k(x,y,t)$, заданная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, удовлетворяет следующим условиям:

[1°] однородность степени $(-n)$ по переменным x и y, т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y, t) = \alpha^{-n} k(x,y,t) \quad (\forall\, \alpha > 0);$$

[2°] инвариантность относительно группы вращений $SO(n)$ по переменным x и y, т. е.

$$k(\omega(x), \omega(y), t) = k(x,y,t) \quad (\forall\, \omega \in SO(n));$$

[3°] суммируемость, т. е.

$$\kappa := \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m} |k(e_1,y,t)||y|^{-n/p}\,dydt < \infty, \quad e_1 = (1,0,\ldots,0).$$

Известно [5], что оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$, причем $\|K\| \leqslant \kappa$. Далее, определим в $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$ проектор P формулой

$$(P\varphi)(x,t) = \begin{cases} \varphi(x,t), & |x| < 1,\ t \in \mathbb{R}^m, \\ 0, & |x| > 1,\ t \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

и обозначим через Q дополнительный проектор.

Основным объектом исследования в данной работе является парный оператор

$$A = \lambda I + K_1 P + K_2 Q, \tag{2}$$

где K_j — оператор вида (1), $j = 1,2$. Наша цель — установить критерий обратимости оператора A.

Чтобы получить условия обратимости оператора A, рассмотрим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$ уравнение, порожденное этим оператором:

$$\lambda\varphi(x,t) + \int\limits_{|y|<1}\int\limits_{\mathbb{R}^m} k_1(x,y,t-s)\varphi(y,s)\,dyds + \int\limits_{|y|>1}\int\limits_{\mathbb{R}^m} k_2(x,y,t-s)\varphi(y,s)\,dyds = f(x,t). \tag{3}$$

Так как функция $k_j(x,y,t)$, где $j = 1,2$, удовлетворяет условию 2°, то по лемме 4.6 книги [7] найдется такая функция $k_{0j}(r,\rho,\tau,t)$, что

$$k_j(x,y,t) = k_{0j}(|x|,|y|,x'\cdot y',t).$$

Это позволяет переписать уравнение (3) в виде

$$\lambda\varphi(x,t)+\int\limits_{|y|<1}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{|x|^n}k_{01}\left(1,\frac{|y|}{|x|},x'\cdot y',t-s\right)\varphi(y,s)\,dyds \\ +\int\limits_{|y|>1}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{|x|^n}k_{02}\left(1,\frac{|y|}{|x|},x'\cdot y',t-s\right)\varphi(y,s)\,dyds=f(x,t).$$

Переходя в этом уравнении к сферическим координатам по переменным x и y, т. е. полагая $x=r\sigma$, $y=\rho\theta$, приходим к уравнению

$$\lambda\Phi(r\sigma,t)+\int\limits_0^1\int\limits_{S_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}\,D_1\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta,t-s\right)\Phi(\rho\theta,s)\,d\rho\,d\theta\,ds \\ +\int\limits_1^\infty\int\limits_{S_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}\,D_2\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta,t-s\right)\Phi(\rho\theta,s)\,d\rho\,d\theta\,ds=F(r\sigma,t),\quad (4)$$

где

$$\Phi(r\sigma,t)=\varphi(r\sigma,t)r^{(n-1)/p},\quad F(r\sigma,t)=f(r\sigma,t)r^{(n-1)/p}, \\ D_j(\rho,\tau,t)=k_{0j}(1,\rho,\tau,t)\rho^{(n-1)/p'},\quad j=1,2. \quad (5)$$

Из условия 3° следует, что

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{-1}^1\int\limits_{\mathbb{R}^m}|D_j(\rho,\tau,t)|\rho^{-1/p}(1-\tau^2)^{(n-3)/2}\,d\rho\,d\tau\,dt<\infty. \quad (6)$$

Умножив обе части уравнения (4) на $Y_{\nu\mu}(\sigma)$ и проинтегрировав по единичной сфере, получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\lambda\Phi_{\nu\mu}(r,t)+\int\limits_{S_{n-1}}Y_{\nu\mu}(\sigma)\,d\sigma\int\limits_0^1\int\limits_{S_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}\,D_1\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta,t-s\right)\Phi(\rho\theta,s)\,d\rho\,d\theta\,ds \\ +\int\limits_{S_{n-1}}Y_{\nu\mu}(\sigma)\,d\sigma\int\limits_1^\infty\int\limits_{S_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}\,D_2\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta,t-s\right)\Phi(\rho\theta,s)\,d\rho\,d\theta\,ds=F_{\nu\mu}(r,t), \quad (7)$$

где $r\in\mathbb{R}_+$, $\nu\in\mathbb{Z}_+$, $\mu=1,2,\dots,d_n(\nu)$,

$$\Phi_{\nu\mu}(r,t)=\int\limits_{S_{n-1}}\Phi(r\sigma,t)Y_{\nu\mu}(\sigma)\,d\sigma,\quad F_{\nu\mu}(r,t)=\int\limits_{S_{n-1}}F(r\sigma,t)Y_{\nu\mu}(\sigma)\,d\sigma.$$

Преобразуем интегралы из левой части формулы (7). Меняя порядок интегрирования и используя формулу Функа — Гекке [7, с. 43], получим следующую бесконечную диагональную систему интегральных уравнений:

$$\lambda\Phi_{\nu\mu}(r,t)+\int_0^1\int_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}\,D_{1\nu}\left(\frac{\rho}{r},t-s\right)\Phi_{\nu\mu}(\rho,s)\,d\rho\,ds$$

$$+\int_1^\infty\int_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}\,D_{2\nu}\left(\frac{\rho}{r},t-s\right)\Phi_{\nu\mu}(\rho,s)\,d\rho\,ds=F_{\nu\mu}(r,t),\quad (8)$$

где

$$D_{j\nu}(\rho,t)=\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)}\int_{-1}^1 D_j(\rho,\tau,t)\,P_\nu(\tau)\,(1-\tau^2)^{(n-3)/2}\,d\tau,\quad j=1,2.\quad (9)$$

Здесь $P_\nu(\tau)$ — многочлены Лежандра, определяемые равенством

$$P_\nu(\tau)=\begin{cases}\cos(\nu\arccos\tau), & n=2;\\ \frac{\nu!(n-3)!}{(n+\nu-3)!}\,C_\nu^{(n-2)/2}(\tau), & n\geqslant 3,\end{cases}$$

где $C_\nu^{(n-2)/2}(\tau)$ — многочлены Гегенбауэра (см., например, [7, с. 41]).

В пространстве $L_p(\mathbb{R}_+^{1+m})$ рассмотрим оператор A_ν, где $\nu\in\mathbb{Z}_+$, определяемый левой частью уравнения (8):

$$(A_\nu g)(r,t)=\lambda g(r,t)+\int_0^1\int_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}\,D_{1\nu}\left(\frac{\rho}{r},t-s\right)g(\rho,s)\,d\rho\,ds$$

$$+\int_1^\infty\int_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}\,D_{2\nu}\left(\frac{\rho}{r},t-s\right)g(\rho,s)\,d\rho\,ds.$$

Лемма 1. *Пусть $\lambda\neq 0$. Тогда существует такое число $\nu_0\in\mathbb{Z}_+$, что для всех $\nu>\nu_0$ операторы A_ν обратимы.*

$\lhd$ Запишем оператор A_ν в виде

$$A_\nu=\lambda I+K_{1\nu}P_1+K_{2\nu}Q_1,$$

где оператор $K_{j\nu}$ задается формулой

$$(K_{j\nu}g)(r,t)=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}D_{j\nu}\left(\frac{\rho}{r},t-s\right)g(\rho,s)\,d\rho\,ds,\quad j=1,2,$$

проектор P_1 определяется формулой

$$(P_1 g)(r,t)=\begin{cases}g(r,t), & r\in(0,1),\ \ t\in\mathbb{R}^m;\\ 0, & r\in(1,\infty),\ \ t\in\mathbb{R}^m,\end{cases}$$

а Q_1 — дополнительный к P_1 проектор. Для нормы оператора $K_{j\nu}$ справедлива оценка см. [5]:

$$\|K_{j\nu}\|\leqslant\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^m}|D_{j\nu}(\rho,t)|\rho^{-1/p}\,d\rho\,dt.$$

В силу формулы (9) функции $D_{j\nu}(\rho,t)$, $\nu\in\mathbb{Z}_+$, являются коэффициентами Фурье функции $D_j(\rho,\tau,t)$ по системе многочленов Лежандра, а потому $D_{j\nu}(\rho,t)\to 0$ при $\nu\to\infty$ для почти всех $\rho\in\mathbb{R}_+$, $t\in\mathbb{R}^m$. Тогда, применяя мажорантную теорему Лебега, с учетом (6), заключаем, что $\|K_{j\nu}\|\to 0$ при $\nu\to\infty$. Следовательно, существует такое число $\nu_0\in\mathbb{Z}_+$, что для всех $\nu>\nu_0$ выполняется неравенство $\|K_{1\nu}P_1+K_{2\nu}Q_1\|\leqslant|\lambda|$, а значит, оператор A_ν обратим. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть $\lambda\neq 0$ и ν_0 — число, определенное в лемме* 1. *Для того чтобы оператор A вида* (2) *был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$, необходимо и достаточно, чтобы все операторы A_ν, где $\nu=0,1,\ldots,\nu_0$, были обратимы в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{1+m}_+)$.*

$\lhd$ В пространстве

$$\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m})=\Big\{\Phi(r\sigma,t):\,\Phi(r\sigma,t)r^{-(n-1)/p}\in L_p(\mathbb{R}^{n+m})\Big\}$$

определим оператор $\widetilde{A}$ следующим образом:

$$\widetilde{A}=\lambda I+\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q},$$

где $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ — естественные аналоги проекторов P и Q в пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m})$, а

$$(\widetilde{K}_j\Phi)(r\sigma,t)=\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}D_j\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta,t-s\right)\Phi(\rho\theta,s)\,d\rho\,d\theta\,ds,\quad j=1,2.$$

Очевидно, что оператор A обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$ тогда и только тогда, когда оператор $\widetilde{A}$ обратим в пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m})$.

Определим в пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m})$ проектор P_N равенством

$$(P_N\Phi)(r\sigma,t)=\sum_{\nu=0}^{N}\sum_{\mu=1}^{d_n(\nu)}\Phi_{\nu\mu}(r,t)Y_{\nu\mu}(\sigma)$$

и обозначим через Q_N дополнительный проектор. С помощью формулы Функа — Гекке непосредственно проверяется, что $P_N\widetilde{A}Q_N=0$, $Q_N\widetilde{A}P_N=0$. Учитывая эти соотношения, запишем матричное равенство

$$\begin{pmatrix}P_N & Q_N\\ Q_N & P_N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{A} & 0\\ 0 & \lambda I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_N & Q_N\\ Q_N & P_N\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda I+P_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})P_N & 0\\ 0 & \lambda I+O_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N\end{pmatrix}.$$

Ясно, что оператор $\widetilde{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы операторы $\lambda I+P_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})P_N$ и $\lambda I+O_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N$. Покажем, что последний оператор обратим при достаточно большом значении N.

В [1, с. 80–81] показано, что для любого $\varepsilon>0$ найдется функция $b_{jN}(\rho,\tau,t)$, $j=1,2$, вида

$$b_{jN}(\rho,\tau,t)=\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}}\sum_{\nu=0}^{N}d_n(\nu)b_{j\nu}(\rho,t)P_\nu(\tau),$$

где $P_\nu(\tau)$ — многочлены Лежандра, для которой оператор

$$(B_{jN}\Phi)(r\sigma,t)=\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}\,b_{jN}\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta,t-s\right)\Phi(\rho\theta,s)\,d\rho\,d\theta\,ds$$

удовлетворяет неравенству

$$\|\widetilde{K}_j-B_{jN}\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m}))}<\varepsilon/2. \tag{10}$$

При этом всегда можно считать, что $N>\nu_0$. С помощью формулы сложения сферических гармоник [7, с. 38] легко проверить, что $Q_NB_{jN}=0$. Тогда

$$\lambda I+Q_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N=\lambda I+Q_N(\widetilde{K}_1-B_{1N})\widetilde{P}Q_N+Q_N(\widetilde{K}_2-B_{2N})\widetilde{Q}Q_N.$$

Учитывая (10), имеем

$$\begin{aligned}&\|Q_N(\widetilde{K}_1-B_{1N})\widetilde{P}Q_N+Q_N(\widetilde{K}_2-B_{2N})\widetilde{Q}Q_N\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m}))}\\&\leqslant\|\widetilde{K}_1-B_{1N}\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m}))}+\|\widetilde{K}_2-B_{2N}\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m}))}<\varepsilon.\end{aligned}$$

Выберем число N столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\|Q_N(\widetilde{K}_1-B_{1N})\widetilde{P}Q_N+Q_N(\widetilde{K}_2-B_{2N})\widetilde{Q}Q_N\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m}))}<|\lambda|,$$

из которого следует обратимость оператора $\lambda I+Q_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N$.

Таким образом, оператор $\widetilde{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\lambda I+P_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})P_N$. Обратимость последнего равносильна обратимости оператора

$$\widetilde{A}_N:=P_N(\lambda I+\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})\Big|_{\operatorname{Im}P_N}$$

(см., например, [1, с. 6]). Нетрудно видеть, что уравнение, порожденное оператором $\widetilde{A}_N$ сводится к конечной системе уравнений (8), где $\nu=0,1,\dots,N$. Следовательно, необходимым и достаточным условием обратимости оператора $\widetilde{A}$ является обратимость всех операторов A_ν, $\nu=0,1,\dots,N$. Так как, согласно лемме 1, при $\nu_0<\nu\leqslant N$ операторы A_ν обратимы, то достаточно считать, что $\nu=0,1,\dots,\nu_0$. $\rhd$

Таким образом, задача свелась к изучению обратимости в $L_p(\mathbb{R}^{1+m}_+)$ операторов A_ν, где $\nu=0,1,\dots,\nu_0$.

Определим изоморфизм $W_p\colon L_p(\mathbb{R}^{1+m}_+)\to L_p(\mathbb{R}^{1+m})$ формулой

$$(W_p\varphi)(u,t)=e^{-u/p}\varphi(e^{-u},t),\quad u\in\mathbb{R}^1,\ t\in\mathbb{R}^m.$$

Непосредственно проверяется, что оператор $C_\nu=W_pA_\nu W_p^{-1}$ задается в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{1+m})$ равенством

$$\begin{aligned}(C_\nu\psi)(u,t)=\lambda\psi(u,t)&+\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^m}h_{1\nu}(u-v,t-s)\psi(v,s)\,dv\,ds\\&+\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_{\mathbb{R}^m}h_{2\nu}(u-v,t-s)\psi(v,s)\,dv\,ds,\end{aligned} \tag{11}$$

где
$$h_{j\nu}(u,t) = D_{j\nu}(e^u,t)e^{u/p'}, \quad u \in \mathbb{R}^1,\ t \in \mathbb{R}^m, \tag{12}$$
а $D_{j\nu}(\rho,t)$ определяется формулой (9).

Операторы вида (11) были изучены в работе [8]. Согласно теореме 1.4 из [8] оператор C_ν обратим тогда и только тогда, когда обратимы операторы $\lambda I + H_{1\nu}$ и $\lambda I + H_{2\nu}$, где
$$(H_{j\nu}\psi)(u,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^m} h_{j\nu}(u-v,t-s)\,\psi(v,s)\,dv\,ds.$$

Как известно, символом оператора $\lambda I + H_{j\nu}$, $j=1,2$, является функция
$$\sigma_{j\nu}(\xi) = \lambda + \widehat{h}_{j\nu}(\xi) = \lambda + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^m} h_{j\nu}(u,t)e^{i(\xi_1 u+\widetilde{\xi}\cdot t)}\,du\,dt,$$

где $\xi = (\xi_1,\widetilde{\xi}) = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m+1})$. Преобразуем функцию $\sigma_{j\nu}(\xi)$. Применяя формулы (12) и (9), а затем формулу Каталана (см., например, [7, с. 20]), получим
$$\sigma_{j\nu}(\xi) = \lambda + \int_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^m} D_{j\nu}(\rho,t)\rho^{-1/p+i\xi_1}e^{i\widetilde{\xi}\cdot t}\,d\rho\,dt$$
$$= \lambda + \int\limits_0^\infty\int_{\mathbb{R}^m}\rho^{-1/p+i\xi_1}e^{i\widetilde{\xi}\cdot t}\,d\rho\,dt\int\limits_{S_{n-1}} D_j(\rho,e_1\cdot\theta,t)P_\nu(e_1\cdot\theta)\,d\theta.$$

Наконец, используя равенство (5), после несложных преобразований приходим к формуле
$$\sigma_{j\nu}(\xi) = \lambda + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m} k_j(e_1,y,t)P_\nu(e_1\cdot y')|y|^{-n/p+i\xi_1}e^{i\widetilde{\xi}\cdot t}\,dy\,dt. \tag{13}$$

Совокупность пар функций $(\sigma_{1\nu}(\xi),\sigma_{2\nu}(\xi))$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, определяемых формулой (13), будем называть *символом* оператора A. Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Для того чтобы оператор A вида (2) был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\nu \in \mathbb{Z}_+$ выполнялось условие*
$$\sigma_{j\nu}(\xi) \neq 0 \quad (\forall\,\xi \in \dot{\mathbb{R}}^{1+m},\ j=1,2), \tag{14}$$
где $\dot{\mathbb{R}}^{1+m}$ — одноточечная компактификация пространства $\mathbb{R}^{1+m}$.

$\lhd$ Проанализируем два случая.

1) Пусть $\lambda \neq 0$. Условие (14) является необходимым и достаточным для обратимости всех операторов $\lambda I + H_{j\nu}$, где $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $j=1,2$, а значит, и всех операторов C_ν вида (11). Так как $A_\nu = W_p^{-1}C_\nu W_p$, то оператор A_ν обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{1+m}_+)$ тогда и только тогда, когда оператор C_ν обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{1+m})$. Следовательно, условие (14), необходимо и достаточно, для обратимости всех операторов A_ν, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, что в силу леммы 2 равносильно обратимости оператора A.

2) Пусть $\lambda = 0$. Предположим, что оператор A обратим. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что все операторы из δ-окрестности оператора A обратимы. Подберем такие числа

$\nu_1 \in \mathbb{Z}_+$ и $\xi_0 \in \mathbb{R}^{1+m}$, что $|\sigma_{1\nu_1}(\xi_0)| < \delta$. Тогда оператор $A - \sigma_{1\nu_1}(\xi_0)I$ обратим. С другой стороны, символом оператора $A - \sigma_{1\nu_1}(\xi_0)I$ является совокупность пар функций

$$\big(\sigma_{1\nu}(\xi) - \sigma_{1\nu_1}(\xi_0), \sigma_{2\nu}(\xi) - \sigma_{1\nu_1}(\xi_0)\big),$$

где $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку функция $\sigma_{1\nu_1}(\xi) - \sigma_{1\nu_1}(\xi_0)$ при $\xi = \xi_0$ обращается в нуль, то оператор $A - \sigma_{1\nu_1}(\xi_0)I$ необратим. Получили противоречие. То что оператор A необратим, согласуется с условием (14), так как в этом случае $\sigma_{j\nu}(\infty) = 0$ для всех $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, 2$. $\triangleright$

Замечание. Отметим, что фактически достаточно требовать выполнения условия (14) для $\nu = 0, 1, \ldots, \nu_0$. Однако использование в записях «неопределенного» числа ν_0 неудобно. Поэтому мы полагаем, что условие (14) выполнено для всех $\nu \in \mathbb{Z}_+$.

Из этой теоремы легко получается критерий обратимости оператора $\lambda I + K$, ранее установленный в [5]. Так как $\lambda I + K = \lambda I + KP + KQ$, то символом этого оператора является совокупность функций

$$\sigma_\nu(\xi) = \lambda + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m} k(e_1, y, t) P_\nu(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p + i\xi_1} e^{i\widetilde{\xi}\cdot t}\, dy\, dt.$$

Следствие 1. *Для того чтобы оператор $\lambda I + K$ был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\nu \in \mathbb{Z}_+$ выполнялось условие*

$$\sigma_\nu(\xi) \neq 0 \quad (\forall\, \xi \in \dot{\mathbb{R}}^{1+m}).$$

Литература

1. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with Involutive Operators.—Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2001.—427 p.
2. *Авсянкин О. Г.* О C^*-алгебре, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами мультипликативного сдвига // Докл. РАН.—2008.—Т. 419, № 6.—С. 727–728.
3. *Авсянкин О. Г., Перетятькин Ф. Г.* Об ограниченности и компактности многомерных интегральных операторов с однородными ядрами // Изв. вузов. Математика.—2013.—№ 11.—С. 64–68.
4. *Авсянкин О. Г.* Проекционный метод для интегральных операторов с однородными ядрами, возмущенных односторонними мультипликативными сдвигами // Изв. вузов. Математика.—2015.—№ 2.—С. 10–17.
5. *Авсянкин О. Г.* Многомерные интегральные операторы с однородно-разностными ядрами // Диф. уравнения.—2012.—Т. 48, № 1.—С. 64–69.
6. *Авсянкин О. Г.* Об алгебре многомерных интегральных операторов с однородно-разностными ядрами // Мат. заметки.—2014.—Т. 95, вып. 2.—С. 163–169.
7. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения.—Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1984.—208 с.
8. *Симоненко И. Б.* Операторы типа свертки в конусах // Мат. сборник.—1967.—Т. 74, № 2.—С. 298–313.

Статья поступила 19 ноября 2015 г.

Авсянкин Олег Геннадиевич
Южный федеральный университет,
профессор каф. дифференц. и интегральных уравнений
РОССИЯ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: avsyanki@math.rsu.ru

PAIRED INTEGRAL OPERATORS WITH HOMOGENEOUS–DIFFERENCE KERNELS

Avsyankin O. G.

We consider the paired multidimensional integral operators with homogeneous-difference kernels, acting in L_p-spaces. For these operators the symbol is defined. In term of the symbol the necessary and sufficient conditions for the invertibility of operators are obtained.

Key words: integral operator, homogeneous-difference kernel, symbol, invertibility, spherical harmonics.