Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 3–10

УДК **517.983.2**

$L_p - L_q$-ОЦЕНКИ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ РИССА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ЯДРАМИ

М. Н. Гуров, В. А. Ногин

Получены $L_p - L_q$-оценки для обобщенных потенциалов Рисса с осциллирующими ядрами и однородными характеристиками бесконечно дифференцируемыми в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Описаны выпуклые множества $(1/p, 1/q)$-плоскости, для точек которых упомянутые операторы ограничены из L_p в L_q и указаны области, где эти операторы не ограничены.

Ключевые слова: потенциал Рисса, осциллирующее ядро, метод Фурье-мультипликаторов, $L_p - L_q$-оценки, $\mathscr{L}$-характеристика.

Введение

В работе получены $L_p - L_q$-оценки для операторов типа потенциала

$$(R_a^\alpha \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{a(t')e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}} \varphi(x-t)\, dt, \tag{1}$$

где $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, $a(t')$ $\left(t' = \frac{t}{|t|}\right)$ — однородная нулевой степени функция, бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, удовлетворяющая условию $a(t') \not\equiv 0$, $t' \in S^{n-1}$.

В работе описаны выпуклые множества $(1/p, 1/q)$-плоскости, для точек которых оператор R_a^α ограничен из L_p в L_q и указаны области, где этот оператор не ограничен (см. теорему 1.1). В некоторых случаях доказана точность полученных оценок (см. замечание 1.1). В частности, получены необходимые и достаточное условия ограниченности оператора (1) в L_p.

В настоящее время имеется ряд работ по $L_p - L_q$-оценкам для операторов свертки с осциллирующими ядрами, в частности, для операторов Бохнера — Рисса и акустических потенциалов, возникающих в различных задачах анализа и математической физики (см. книги [5, 6], а также работы [1–4, 9, 10]. Во всех упомянутых работах, кроме [1], рассматривались ядра, содержащие радиальную характеристику $b(r)$, которая стабилизируется на бесконечности как гёльдеровская функция. Благодаря этому свойству, получение оценок для указанных операторов сводилось к случаю оператора с характеристикой $b(r) \equiv 1$. Подобное сведение в принципе невозможно, когда ядро оператора (1) содержит однородную характеристику $a(t')$.

В работе [1] были получены оценки для потенциала (1) в случае $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$. Однако, использованный в ней метод, основанный на представлении оператора R_a^α через оператор Бохнера — Рисса и некоторый оператор, близкий к акустическому потенциалу, не работает при $\operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n-1}{2}$.

Здесь мы развиваем новый метод, основанный на получении специальных представлений для символа оператора (1) с последующим применением техники Фурье-мультипликаторов, вырождающихся или имеющих особенности на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$.

1. Основные результаты

Для формулировки основного результата будут использованы следующие обозначения: $(A, B, \ldots, K)$ — открытый многоугольник в $\mathbb{R}^2$ с вершинами в точках A, B, …, K; $[A, B, \ldots, K]$ — его замыкание. Через $\mathscr{L}(A)$ обозначим $\mathscr{L}$-характеристику оператора A, т. е. множество всех точек $(1/p, 1/q)$-плоскости $(1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty)$ таких, что оператор A ограничен из L_p в L_q.

Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$. Введем в рассмотрение следующие точки $(1/p, 1/q)$-плоскости:

$$A = \left(1, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad A' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, 0\right),$$

$$C = \left(\frac{3}{2} - \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1}, \frac{3}{2} - \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1}\right), \quad C' = \left(\frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1} - \frac{1}{2}, \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1} - \frac{1}{2}\right),$$

$$E = (1, 0), \quad F = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$G = \left(1 - \frac{(n - \operatorname{Re}\alpha)(n-1)}{n(n+3)}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad G' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{(n - \operatorname{Re}\alpha)(n-1)}{n(n+3)}\right),$$

$$H = \left(1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad H' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right),$$

$$O = (1, 1), \quad O' = (0, 0),$$

$$K = \left(\frac{2(\operatorname{Re}\alpha + 1)}{n+1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad K' = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{2(\operatorname{Re}\alpha + 1)}{n+1}\right),$$

$$B = \left(1 - \frac{(n-1)(n - \operatorname{Re}\alpha)}{n(n+1)}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad B' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{(n-1)(n - \operatorname{Re}\alpha)}{n(n+1)}\right).$$

Нам понадобятся также следующие множества на $(1/p, 1/q)$-плоскости (см. рис. 1 и 2 для случаев $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n-1}{2}$ и $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$, соответственно):

$$\mathscr{L}_1(\alpha, n) = \begin{cases} [A', H', H, A, E] \setminus ([A', H'] \cup [A, H]), & 0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)}, \\ (A', G', C', C, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (C', C), & \frac{n(n-1)}{2(n+1)} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n-1}{2}, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup \{F\}, & \operatorname{Re}\alpha = \frac{n-1}{2},\ \operatorname{Im}\alpha \neq 0, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & \alpha = \frac{n-1}{2}, \\ (A', G', K', K, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup [K', K], & \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n}{2}, \\ (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & \frac{n}{2} \leqslant \operatorname{Re}\alpha < n,\ \operatorname{Im}\alpha \neq 0, \\ (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (B', B), & \frac{n}{2} \leqslant \alpha < n, \end{cases}$$

$$\mathscr{L}_2(\alpha, n) = [O, A, A', O'] \setminus (\{A'\} \cup \{A\}).$$

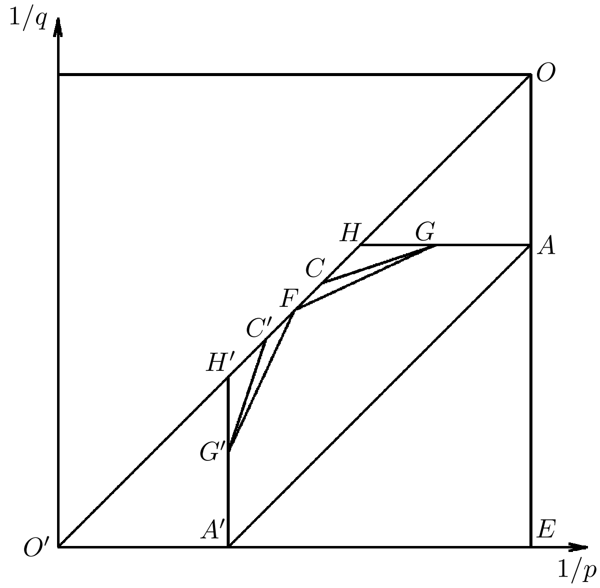

Рис. 1.

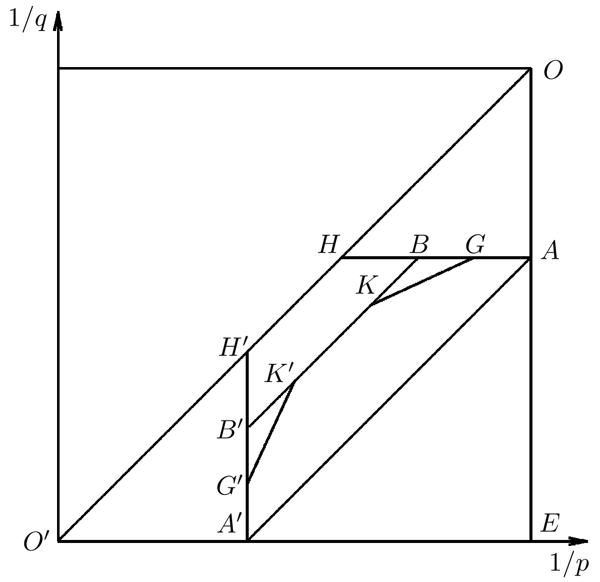

Рис. 2.

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1.1. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$.

I. *Справедливо вложение*

$$\mathscr{L}(R_a^\alpha) \supset \mathscr{L}_1(\alpha, n) \cap \mathscr{L}_2(\alpha, n). \tag{2}$$

II. *Множество* $\mathscr{L}(R_a^\alpha)$ *не содержит точек, лежащих:*

1) *на отрезке* $[A, H]$ *и выше него, если* $a(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in S^{n-1}$;

2) *на отрезке* $[A', H']$ *и левее него при том же условии на характеристику* $a(\sigma)$, *что и в п.* 1);

3) *на отрезке* $[O', O]$, *если* $\alpha = (n-1)/2$;

4) *ниже прямой* $A'A$, *а также точки* A' *и* A.

Замечание 1.1. При $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)}$ и $\frac{n}{2} \leqslant \alpha < n$ полученные оценки являются точными. А именно,

$$\mathscr{L}(R_a^\alpha) = [A', H', H, A] \setminus ([A', H'] \cup [A, H]), \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)},$$

$$\mathscr{L}(R_a^\alpha) = (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (B', B), \quad \frac{n}{2} \leqslant \alpha < n.$$

В частности, для таких α получено необходимое и достаточное условие ограниченности оператора (1) в L_p. А именно, этот оператор ограничен в L_p тогда и только тогда, когда $\frac{n}{n-\operatorname{Re}\alpha} < p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$.

Замечание 1.2. На примере оператора (1) можно пояснить влияние осциллирующей экспоненты в ядре на картину ограниченности рассматриваемого оператора. Для этого вначале рассмотрим потенциал Рисса с однородной характеристикой:

$$(I^\alpha\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{a(t')}{|t|^{n-\alpha}}\varphi(x-t)\,dt, \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < n.$$

Хорошо известно, что оператор I^α ограничен из L_p в L_q тогда и только тогда, когда $1/p - 1/q = \operatorname{Re}\alpha/n$. Перейдем далее от оператора I^α к оператору R_a^α. Тогда, как это следует из (2) и аналогичного вложения, доказанного в [1] при $(n-1)/2 < \operatorname{Re}\alpha < n$, над интервалом (A', A) «надстраивается» выпуклое множество положительной лебеговой меры, для точек $(1/p, 1/q)$ которого полученный оператор ограничен из L_p в L_q.

2. Вспомогательные сведения и утверждения

Ниже мы будем использовать следующие функции. Пусть $\vartheta(r), \varkappa(r), \chi(r) \in C^\infty(0,+\infty)$ таковы, что $0 \leqslant \vartheta(r)$, $\varkappa(r), \chi(r) \leqslant 1$; $\vartheta(r^2) = 1$, если $r \leqslant 1 - \frac{\delta}{2}$, $\vartheta(r^2) = 0$, если $r \geqslant 1 - \frac{\delta}{4}$; $\varkappa(r) = 1$, если $|1-r| \leqslant \frac{\delta}{4}$, $\varkappa(r) = 0$, если $|1-r| \geqslant \frac{\delta}{2}$; $\chi(r) = 0$, если $r \leqslant 1 + \frac{\delta}{4}$, $\chi(r) = 1$, если $r \geqslant 1 + \frac{\delta}{2}$. Функция $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)$ такова, что $0 \leqslant \widetilde{\varkappa}(|\xi|) \leqslant 1$, $\widetilde{\varkappa}(|\xi|) = 0$, если $|1-|\xi|| \geqslant \delta$ и $\widetilde{\varkappa}(|\xi|) = 1$, если $|1-|\xi|| \leqslant \frac{\delta}{2}$. Тогда $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)\varkappa(|\xi|) = \varkappa(|\xi|)$.

Будем предполагать, что $\vartheta(r^2) + \varkappa(r) + \chi(r) \equiv 1$.

Теорема 2.1 (см. [11]). *Справедливы следующие утверждения:*

a) *Пусть $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$, $N > [n/2]$ и существуют постоянные $c, \delta > 0$ такие, что $|D^k f(x)| \leqslant c|x|^{-\delta-|k|}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant |k| \leqslant N$. Тогда $f \in \mathscr{R}_0$.*

b) *Пусть $f \in C^N(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $N > [n/2]$, имеет компактный носитель и существуют постоянные $c, \delta > 0$ такие, что $|D^k f(x)| \leqslant c|x|^{-\delta-|k|}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $0 \leqslant |k| \leqslant N$. Тогда $f \in \mathscr{R}_0$.*

Оператор R_a^α представим в следующем виде:

$$(R_a^\alpha\varphi)(x) = (M^\alpha\varphi)(x) + (N^\alpha\varphi)(x), \tag{3}$$

где

$$(M^\alpha\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}}^{n} \frac{\chi(|t|)a(t')e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}}\varphi(x-t)\,dt,$$

$$(N^\alpha\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(1-\chi(|t|))a(t')e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}}\varphi(x-t)\,dt.$$

Через $\widehat{m}^\alpha(\xi)$ обозначим символ оператора M^α. В работе [7] получено следующее представление для $\widehat{m}^\alpha(\xi)$:

$$\widehat{m}^\alpha(\xi) = \widehat{m}^{\alpha,0}(\xi) + \widehat{m}^{\alpha,1}(\xi) + \widehat{m}^{\alpha,\infty}(\xi). \tag{4}$$

Здесь

$$\widehat{m}^{\alpha,0}(\xi) = \vartheta(|\xi|^2)\Gamma(\alpha)\int\limits_{S^{n-1}} \frac{a(\sigma)}{(-i(1+\xi\sigma))^\alpha}\,d\sigma - \vartheta(|\xi|^2)\int\limits_{S^{n-1}} a(\sigma)\,d\sigma\int\limits_0^\infty (1-\chi(\rho))\rho^{\alpha-1}e^{i\rho(1+\xi\cdot\sigma)}\,d\rho,$$

$$\widehat{m}^{\alpha,1}(\xi) = \begin{cases} \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|+i0)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\sum\limits_{k=0}^{N-1} A_{\alpha-\frac{n+1}{2}-k} \\ \qquad\times\frac{\chi_k^+(\xi')}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}}(1-|\xi|)^k + \mathscr{R}_\alpha(\xi), & \alpha-k\neq\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2}\ldots; \\ \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\times\sum\limits_{k=0}^{N-1}(A'_{\alpha-\frac{n+1}{2}-k} + A''_{\alpha-\frac{n+1}{2}-k} \\ \qquad\times\ln(1-|\xi|+i0))\frac{\chi_k^+(\xi')}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}}(1-|\xi|)^k + \mathscr{R}_\alpha(\xi), & \alpha-k=\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2}\ldots, \end{cases}$$

$$\widehat{m}^{\alpha,\infty}(\xi) = \begin{cases} \chi(|\xi|)(1-|\xi|+i0)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\sum\limits_{k=0}^{N-1} A_{\alpha-\frac{n+1}{2}-k} \\ \qquad\times\frac{\chi_k^+(\xi')}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}}(1-|\xi|)^k + \mathscr{R}'_\alpha(\xi), & \alpha-k\neq\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2}\ldots; \\ \chi(|\xi|)(1-|\xi|)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\times\sum\limits_{k=0}^{N-1}(A'_{\alpha-\frac{n+1}{2}-k} + A''_{\alpha-\frac{n+1}{2}-k} \\ \qquad\times\ln(1-|\xi|+i0))\times\frac{\chi_k^+(\xi')}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}}(1-|\xi|)^k + \mathscr{R}'_\alpha(\xi), & \alpha-k=\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2}\ldots \end{cases}$$

Функции $\mathscr{R}_\alpha(\xi)$, $\mathscr{R}'_\alpha(\xi)$ и $\chi_k^\pm(\xi')$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1

$$A_\lambda = \frac{1}{(2\pi)^n}e^{\frac{i\pi}{2}(\lambda+1)}\Gamma(\lambda+1),$$

$$A'_\lambda = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{\left(\psi(-\lambda)+i\frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{i\pi}{2}(\lambda+1)}}{(-\lambda-1)!},$$

$$A''_\lambda = -\frac{1}{(2\pi)^n}\frac{e^{-\frac{i\pi}{2}(\lambda+1)}}{(-\lambda-1)!}, \quad N = \left[\frac{n}{2}\right]+1.$$

Теорема 2.2 [7]**.** *Пусть* $0<\operatorname{Re}\alpha<n$ *и* $\varphi\in\mathscr{S}$. *Тогда*

$$(M^\alpha\varphi)(x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{m}^\alpha(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)e^{-i(x\cdot\xi)}\,d\xi.$$

Кроме того, в [8] был изучен вопрос о принадлежности классу M_p^q мультипликатора

$$b_\alpha(|\xi|) = \begin{cases} \varkappa(|\xi|)A_{\alpha-\frac{n+1}{2}}(1-|\xi|+i0)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}, & \alpha\neq\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\ldots, \\ \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\quad\left(A'_{\alpha-\frac{n+1}{2}} + A''_{\alpha-\frac{n+1}{2}}\ln(1-|\xi|+i0)\right), & \alpha=\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\ldots, \end{cases}$$

где $0<\operatorname{Re}\alpha<n$.

Доказана следующая теорема

Теорема 2.3 [8]. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$. *Тогда*

$$b_\alpha(|\xi|) \in M_p^q, \quad \text{если} \quad \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in \mathscr{L}_1(\alpha, n);$$

$$b_\alpha(|\xi|) \notin M_p^q, \quad \text{если} \quad \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in [A, H, O] \cup [A', H', O'].$$

При $\operatorname{Re}\alpha = 0$ *имеем*

$$b_\alpha(|\xi|) \in M_p^q \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in [O', E, O] \setminus (\{O'\} \cup \{O\}).$$

Если $\operatorname{Re}\alpha < 0$, *то*

$$b_\alpha(|\xi|) \in M_p^q \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in [O', E, O]. \tag{5}$$

Замечание 2.1. Если $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)}$ и $\frac{n}{2} \leqslant \operatorname{Re}\alpha < n$, то из теоремы 2.3 следует, что

$$b_\alpha(|\xi|) \in M_p^q \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in \mathscr{L}_2(\alpha, n).$$

Замечание 2.2. Нетривиальность теоремы 2.3 при $q = p$ объясняется тем, что $b_\alpha(|\xi|) \notin M_p^p$, если $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$ и $0 < 1/p \leqslant \operatorname{Re}\frac{\alpha}{n}$ либо $1 - \operatorname{Re}\frac{\alpha}{n} \leqslant \frac{1}{p} < 1$. Следовательно, для исследования мультипликатора $b_\alpha(|\xi|)$ не применимы классические мультипликаторные теоремы Михлина, Хёрмандера, Крэ, Лизоркина и др., дающие условия принадлежности мультипликатора классу M_p^p для всех p, $1 < p < \infty$.

3. Доказательство основного результата

Докажем вложение

$$\mathscr{L}(R_a^\alpha) \supset \mathscr{L}_1(\alpha, n) \cap \mathscr{L}_2(\alpha, n).$$

Воспользуемся представлением (3).

Отметим, что ядро оператора N^α принадлежит L_1. Кроме того, для него справедлива теорема С. Л. Соболева (см. [12]). Следовательно,

$$\mathscr{L}(N^\alpha) \supset \mathscr{L}_2(\alpha, n). \tag{6}$$

Рассмотрим оператор M^α, для символа $\widehat{m}^\alpha(\xi)$ которого справедливо представление (4), и исследуем вопрос о принадлежности мультипликатора $\widehat{m}^\alpha(\xi)$ классу M_p^q.

Исходя из представления для мультипликатора $\widehat{m}^{\alpha,\infty}(\xi)$, на основании теоремы 2.1, заключаем, что $\widehat{m}^{\alpha,\infty}(\xi) \in \mathfrak{R}_0$. Кроме того, $\widehat{m}^{\alpha,\infty}(\xi) \in L_1$. Отсюда получаем

$$\widehat{m}^{\alpha,\infty}(\xi) \in M_p^q, \quad (1/p, 1/q) \in [O', O, E]. \tag{7}$$

Рассмотрим мультипликатор $\widehat{m}^{\alpha,1}(\xi)$. Заметим, что $\mathscr{R}_\alpha(\xi) \in \mathfrak{R}_0$ в силу теоремы 2.1. Кроме того, $\mathscr{R}_\alpha(\xi) \in L_1$ (см. [7]). Применяя далее теорему 2.3, будем иметь

$$\widehat{m}^{\alpha,1}(\xi) \in M_p^q, \quad (1/p, 1/q) \in \mathscr{L}_1(\alpha, n). \tag{8}$$

Отметим также, что $\widehat{m}^{\alpha,0}(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Следовательно,

$$\widehat{m}^{\alpha,0}(\xi) \in M_p^q, \quad (1/p, 1/q) \in [O', O, E]. \tag{9}$$

Из (7)–(9) получаем вложение

$$\mathscr{L}(M^\alpha) \supset \mathscr{L}_1(\alpha, n) \cap \mathscr{L}_2(\alpha, n). \tag{10}$$

Из (6) и (10) вытекает (2).

Перейдем к доказательству утверждения II теоремы 1.1.

Докажем 1) в случае $\alpha \neq \frac{(n-1)}{2-j}$, $j \in \mathbb{N}$. Для этого, учитывая (6), (7) и (9), а также соображения выпуклости и двойственности, достаточно показать, что $\widehat{m}^{\alpha,1}(\xi) \notin M_p^q$, если $(1/p, 1/q) \in [A, H]$. Аналогично тому, как это делалось при доказательстве основного результата работы [8], получаем

$$\widehat{m}^{\alpha,1}(\xi) = (-i)^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) a(-\xi') b_\alpha(|\xi|) + G_\alpha(\xi).$$

Здесь

$$G_\alpha(\xi) = \sum_{k=1}^{N+1} A_{\alpha - \frac{n+1}{2} - k} \frac{\widetilde{\varkappa}(|\xi|)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}} \chi_k^+(\xi') \varkappa(|\xi|)(1 - |\xi| + i0)^{\frac{n-1}{2}+k-\alpha} + g_\alpha(\xi),$$

$$g_\alpha(|\xi|) = \mathscr{R}_\alpha(\xi) + \frac{1-n}{2} \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|+i0)^{\frac{n+1}{2}-\alpha} A_{\alpha - \frac{n+1}{2}} \widetilde{\varkappa}(|\xi|) \chi_0^+(\xi') \int_0^1 (1-(|\xi|-1)t)^{-\frac{1+n}{2}}\, dt.$$

Рассуждая как и при доказательстве теоремы 1.1 из [8], с учетом того, что $\chi_k^+(\xi') \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $k = 1, \ldots, N+1$, будем иметь

$$G_\alpha(\xi) \in M_p^q, \quad (1/p, 1/q) \in [A, H]. \tag{11}$$

Далее, из условия $a(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in S^{n-1}$ легко вывести, что

$$a(-\xi') b_\alpha(|\xi|) \notin M_p^q, \quad (1/p, 1/q) \in [A, H].$$

Отсюда, с учетом (11) получаем 1) при $\alpha \neq \frac{n-1}{2} - j$, $j \in \mathbb{N}$.

Случай, когда $\alpha = \frac{n-1}{2} - j$ рассматривается аналогично (см. [8]).

Тогда 2) следует из 1) в силу двойственности.

Утверждение 3) вытекает из того, что символ оператора R_a^α имеет особенность на S^{n-1} при $\alpha = \frac{n-1}{2}$ и, следовательно, не принадлежит M_2^2.

Утверждение 4) доказывается аналогично соответствующему утверждению из [1].

Литература

1. *Betilgiriev M. A., Karasev D. N., Nogin V. A.* $L_p - L_q$-estimates for some potential type operators with oscillating kernels // Fract. Cal. Appl. Anal.—2004.—Vol. 7, № 2.—P. 213–241.
2. *Börjeson L.* Estimates for the Bochner–Riesz operator with negative index // Ind. Univ. Math. J.—1986.—Vol. 35, № 2.—P. 225–233.
3. *Karapetyants A. N., Karasev D. N., Nogin V. A.* $L_p - L_q$-estimates for some fractional acoustic potentials and some related operators // Fract. Cal. Appl. Anal.—2005.—Vol. 7, № 1.—P. 155–172.

4. *Karasev D. N., Nogin V. A.* On the boundness of some potential — type operators with oscillating kernels // Math. Nachr.—2005.—Vol. 278, № 5.—P. 554–574.
5. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and Their Applications.—London: Taylor and Frances Group.—2002.—376 p.—(Analytical Methods and Special Functions; Vol. 5).
6. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.—Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.—355 p.
7. *Гуров М. Н.* О преобразовании Фурье одной осциллирующей функции // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2014.—№ 5.—С. 11–14.
8. *Гуров М. Н., Карасёв Д. Н., Ногин В. А.* Об одном Фурье-мультипликаторе // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 1.—С. 14–20.
9. *Карапетянц А. Н., Карасев Д. Н., Ногин В. А.* Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Изв. НАН Армении.—2003.—Т. 38, № 2.—С. 37–62.
10. *Карасев Д. Н.* $L_p - L_q$-оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Диф. уравнения.—2003.—Т. 39, № 3.—С. 418–420.
11. *Самко С. Г., Костецкая Г. С.* Абсолютная интегрируемость интегралов Фурье // Вестн. РУДН. Математика.—1994.—№ 1.—С. 138–168.
12. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.—М.: Мир, 1988.—336 с.

Статья поступила 8 июля 2016 г.

Гуров Михаил Николаевич
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: MGurov@inbox.ru

Ногин Владимир Александрович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
доцент кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: vnogin@ns.math.rsu.ru

$L_p - L_q$-ESTIMATES FOR GENERALIZED RISS POTENTIALS WITH OSCILLATING KERNELS

Gurov M. N., Nogin V. A.

We consider a class of multidimensional potential-type operators whose kernels are oscillating at infinity. The characteristics of these operators are infinitely differentiable homogeneous functions. We describe convex sets in the $(1/p; 1/q)$-plane for which these operators are bounded from L_p into L_q and indicate the domains where they are not bounded. In some cases we describe their $\mathscr{L}$-characteristics. To obtain these results we use a new method based on special representation of the symbols of multidimensional potential-type operators. To these representations of the symbols we apply the technique of Fourier-multipliers, which degenerate or have singularities on the unit sphere in $\mathbb{R}^n$.

Keywords: potential-type operators, oscillating kernel, method of Fourier multipliers, $L_p - L_q$-estimates, $\mathscr{L}$-characteristic.