Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 18–27

УДК **517.9**

О РАСЩЕПЛЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ИЗ КОММУТАТИВНЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

А. Э. Пасенчук

Рассматривается задача о разложении многочленов с коэффициентами из унитальной коммутативной банаховой алгебры в произведение многочленов с коэффициентами из этой же алгебры. Указываются достаточные условия существования такого разложения и его конструкция, приводятся приложения в теории операторов Теплица на окружности и торе. В частности, для двумерного теплицева оператора со специальным символом произведена равносильная регуляризация.

Ключевые слова: многочлен, коммутативная банахова алгебра, расщепление многочлена, оператор Теплица, регуляризация.

1. Введение

Будем пользоваться стандартными обозначениями $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ для множеств целых, вещественных, комплексных чисел соответственно. Нам понадобятся также следующие подмножества этих множеств: $\mathbb{Z}_+ = \{j \in \mathbb{Z} : j \geqslant 0\}$, $\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}_+$, $\Gamma = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = 1\}$, $D^+ = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < 1\}$, $D^- = \mathbb{C} \backslash D^+$, $\overline{D^\pm} = D^\pm \cup \Gamma$.

Через GB обозначим группу обратимых элементов алгебры B.

Пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативная банахова алгебра (КБА) с единицей e, а $m \in Z_+$. Через $W(\Gamma, \mathfrak{A})$ обозначим КБА $\mathfrak{A}$-значных функций вида

$$W(\Gamma, \mathfrak{A}) = \left\{ A(\xi) = \sum_{j \in Z} a_j \xi^j : \ \left\|A(\xi)\right\|_W = \sum_{j \in Z} \left\|a_j\right\|_{\mathfrak{A}} < \infty \right\}.$$

Рассмотрим следующие подалгебры КБА $W(\Gamma, \mathfrak{A})$:

$$W^+(\Gamma, \mathfrak{A}) = \left\{ A(\xi) = \sum_{j} a_j \xi^j : \ a_j = 0, \, j \in \mathbb{Z}_- \right\},$$

$$W^-(\Gamma, \mathfrak{A}) = \left\{ A(\xi) = \sum_{j} a_j \xi^j : \ a_j = 0, \, j = 1, 2, \dots \right\}.$$

Ясно, что $W^+(\Gamma, \mathfrak{A}) \cap W^-(\Gamma, \mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$.

При исследовании операторов Теплица решающим шагом является факторизация символа (см. [1–3]), т. е. его представление в виде $a(\xi) = a^-(\xi) a_0(\xi) a^+(\xi)$, где $a^\pm(\xi) \in GW^\pm(C, \Gamma)$, $a_0(\xi) \in W(C, \Gamma)$. В предлагаемой работе изучается аналог такого представления для многочленов с коэффициентами из унитальной КБА без радикала, приводятся некоторые приложения этого результата.

2. Вспомогательные сведения

Доказательства приводимых в этом параграфе фактов труда не представляют и могут легко быть воспроизведены читателем.

Через $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ будем обозначать пространство максимальных идеалов КБА $\mathfrak{A}$, а через $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}$ — радикал этой алгебры.

Пусть $\chi \in \mathfrak{M}\mathfrak{A}$, а $\xi_0 \in \Gamma$, обозначим через $\chi \times \xi_0$ функционал, определенный на элементах КБА $W(\Gamma, \mathfrak{A})$ равенством

$$(\chi \times \xi_0)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \xi^j\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \chi(a_j)\xi_0^j.$$

Лемма 1. *Пространство максимальных идеалов КБА $W(\Gamma, \mathfrak{A})$ гомеоморфно компакту $\mathfrak{M}\mathfrak{A} \times \Gamma$, т. е. имеет вид*

$$\mathfrak{M}W(\Gamma, \mathfrak{A}) = \bigl\{\chi \times \xi_0 : \chi \in \mathfrak{M}\mathfrak{A},\ \xi_0 \in \Gamma\bigr\}.$$

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — КБА с единицей, $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ — пространство максимальных идеалов КБА $\mathfrak{A}$, $A(\xi) = \sum_j a_j \xi^j \in W(\Gamma, \mathfrak{A})$. Преобразованием Гельфанда элемента $A(\xi)$ является определенная на $\mathfrak{M}\mathfrak{A} \times \Gamma$ функция $A(\chi, \xi) = \sum_j \chi(a_j)\xi^j$.*

Лемма 2. *Пространство максимальных идеалов КБА $W^{\pm}(\Gamma, \mathfrak{A})$ гомеоморфно компакту $\mathfrak{M}\mathfrak{A} \times \overline{D^{\pm}}$, т. е. имеет вид*

$$\mathfrak{M}W^{\pm}(\Gamma, \mathfrak{A}) = \bigl\{\chi \times \xi_0 : \chi \in \mathfrak{M}\mathfrak{A},\ \xi_0 \in \overline{D^{\pm}}\,\bigr\}.$$

Отметим, что ввиду неравенства $|\chi(a_j)| \leqslant \|a_j\|$ при любом фиксированном $\chi \in \mathfrak{M}\mathfrak{A}$ функция $A(\chi, \xi)$ является элементом алгебры $W(\Gamma, C)$. Более того, в силу мультипликативности элементов $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ отображение $A(\xi) \mapsto A(\chi, \xi)$ является гомоморфизмом алгебры $W(\Gamma, \mathfrak{A})$ в алгебру $W(\Gamma, C)$.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $A(\xi) \in GW(\Gamma, \mathfrak{A})$;

2) $A(\xi_0) \in G\mathfrak{A}$ *для любого фиксированного* $\xi_0 \in \Gamma$;

3) $A(\chi, \xi) \in GC(\mathfrak{M}\mathfrak{A} \times \Gamma)$, *т. е.* $A(\chi, \xi) \neq 0$, $(\chi, \xi) \in \mathfrak{M}\mathfrak{A} \times \Gamma$.

Лемма 3. *Радикал КБА $W(\Gamma, \mathfrak{A})$ состоит из тех и только тех элементов этой алгебры, все коэффициенты Фурье которых, являются элементами радикала КБА $\mathfrak{A}$:*

$$\mathrm{Rad}\,W(\Gamma, \mathfrak{A}) = \left\{\sum_j a_j \xi^j \in W(\Gamma, \mathfrak{A}) : (\forall\, j)\ a_j \in \mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}\right\}.$$

Следствие 2. *Радикал КБА $W(\Gamma, \mathfrak{A})$ тривиален тогда и только тогда, когда тривиален радикал КБА $\mathfrak{A}$.*

Теорема 2. *Следующие условия равносильны:*

1) $A(\xi) \in GW^{\pm}(\Gamma, \mathfrak{A})$;

2) $A(\xi_0) \in G\mathfrak{A}$ *для любого фиксированного* $\xi_0 \in \overline{D^{\pm}}$;

3) $A(\chi, \xi) \neq 0$, $(\chi, \xi) \in \mathfrak{M}\mathfrak{A} \times \overline{D^{\pm}}$;

4) $A(\chi, \xi) \neq 0$, $(\chi, \xi) \in \mathfrak{M}\mathfrak{A} \times \Gamma$ *и* $\mathrm{ind}_{\xi \in \Gamma} A(\chi, \xi) = 0$, $\chi \in \mathfrak{M}\mathfrak{A}$.

3. Основной результат

Пусть K — связный компакт. Обозначим через $C(K)$ банахово пространство непрерывных на K функций.

Лемма 4. *Пусть многочлен $p(t,\xi)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(t)\xi^k$, $\alpha_k(t)\in C(K)$, таков, что $p(t,\xi)\neq 0$, $(t,\xi)\in K\times\Gamma$. Тогда индекс $\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma}p(t,\xi)$ не зависит от $t\in K$ и имеет место неравенство $\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma}p(t,\xi)\leqslant n$.*

Теорема 3. *Если многочлен $p(t,\xi)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(t)\xi^k$, $\alpha_k(t)\in C(K)$ и $p(t,\xi)\neq 0$, $(t,\xi)\in K\times\Gamma$, то найдутся многочлены $p_m(t,\xi)$, $q_{n-m}(t,\xi)$ с коэффициентами из $C(K)$ такие, что $p(t,\xi)=p_m(t,\xi)q_{n-m}(t,\xi)$, и при этом*

1) $m=\deg p_m(t,\xi)=\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma}p(t,\xi)$, $n-m=\deg q_{n-m}(t,\xi)$;

2) $p_m(t,\xi)\neq 0$, $(t,\xi)\in K\times\overline{D^-}$; $q_{n-m}(t,\xi)\neq 0$, $(t,\xi)\in K\times\overline{D^+}$.

$\lhd$ Зафиксируем $t\in C(K)$ и положим $m=\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma}p(t,\xi)$. Согласно свойствам индекса $\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma}p(t,\xi)$ есть число нулей многочлена $p(t,\xi)$ в области D^+. Пусть $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\ldots$, $\xi_m(t)$ — все корни этого многочлена, причем каждый корень повторен столько раз, какова его кратность. Тогда, пользуясь теорией вычетов, нетрудно получить, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\xi^s p'_\xi(t,\xi)}{p(t,\xi)}\,d\xi=\sum_{k=1}^{m}\xi_k^s(t),\quad s=1,2,\ldots$$

Из последней формулы следует, что суммы Ньютона $S_k(t)=\sum_{s=1}^{m}\xi_s^k(t)$ корней многочлена, лежащих в области D^+, есть непрерывные на K функции при любом $s=1,2,\ldots$ Но тогда согласно формулам Ньютона — Жирара элементарные симметрические функции корней $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\ldots$, $\xi_m(t)$ также непрерывны на K. Положим $p_m(t)=\prod_{s=1}^{m}(\xi-\xi_s(t))$ и $q_{n-m}(t)=p(t)/p_m(t)$. В силу сделанных замечаний многочлен $p_m(t)$ имеет коэффициенты, непрерывные на K, причем коэффициент при старшей степени равен 1. Пользуясь стандартным алгоритмом деления многочленов, нетрудно заметить, что многочлен $q_{n-m}(t)$ также имеет коэффициенты, непрерывные на K. Условия 1), 2) при этом выполняются по построению. $\rhd$

Пусть $\mathfrak{A}$ — КБА, $P(\xi)=\sum_{j=0}^{n}p_j\xi^j$, $p_j\in\mathfrak{A}$. Для $P(\xi)\in GW(\Gamma,\mathfrak{A})$ положим $\omega_j(P,\xi)=\xi^j(P(\xi))^{-1}$, $j\in\mathbb{Z}_+$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{A}$ — унитальная КБА без радикала, $P(\xi)=\sum_{j=0}^{n}p_j\xi^j$, $p_j\in\mathfrak{A}$. Если $P(\xi)\in GW(\Gamma,\mathfrak{A})$, то найдутся многочлены $P_m(\xi)$, $Q_{n-m}(\xi)$ с коэффициентами из КБА $\mathfrak{A}$ такие, что $P(\xi)=P_m(\xi)Q_{n-m}(\xi)$, и при этом*

1) $\omega_j(P_m,\xi)\in W^-(\Gamma,\mathfrak{A})$, $j=0,1,\ldots,m$, причем $\omega_j(P_m,\infty)=0$, $j=0,1,\ldots,m-1$, $\omega_m(P_m,\infty)=I$;

2) $\omega_m(P_m,\xi)\in GW^-(\Gamma,\mathfrak{A})$;

3) $(Q_{n-m}(\xi))^{-1}\in W^+(\Gamma,\mathfrak{A})$.

$\lhd$ Рассмотрим функцию $P(\chi,\xi)$, $(\chi,\xi)\in\mathfrak{M}\mathfrak{A}\times\Gamma$. Согласно теореме 1 $P(\chi,\xi)\neq 0$, $(\chi,\xi)\in\mathfrak{M}\mathfrak{A}\times\Gamma$, поэтому на каждой компоненте связности пространства максимальных идеалов имеет место представление функции $P(\chi,\xi)$, описанное в теореме 3. Можно считать, что представление $P(\chi,\xi)=P_m(\chi,\xi)Q_{n-m}(\chi,\xi)$ имеет место на всем компакте $\mathfrak{M}\mathfrak{A}\times\Gamma$. Для этого достаточно положить коэффициенты многочленов $P_m(\chi,\xi)$, $Q_{n-m}(\chi,\xi)$ равными функциям, определенным на компонентах связности $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$, при соответствующих степенях ξ. Эти функции непрерывны на каждой компоненте и, следовательно, они непрерывны на $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$. Поскольку $\operatorname{Rad}\mathfrak{A}$ тривиален, то преобразование

Гельфанда есть мономорфизм банаховой алгебры $\mathfrak{A}$ в $C(\mathfrak{M}\mathfrak{A})$. Это означает, что имеет место представление $P(\xi) = P_m(\xi)Q_{n-m}(\xi)$. При этом утверждения 1), 2), 3) имеют место по построению. $\triangleright$

4. О теплицевых операторах с полиномиальными символами

Пусть H — гильбертово пространство, $L(H)$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве H. Обозначим через $L_2(\Gamma, H)$ гильбертово пространство H-значных функций, определенных на единичной окружности,

$$L_2(\Gamma, H) = \left\{\phi(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi_j \xi^j : \ \phi_j \in H, \ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\phi_j\|_H^2 < \infty \right\}$$

с очевидными операциями, нормой и скалярным произведением. Проекторы на подпространства

$$L_2^+(\Gamma, H) = \left\{\phi(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi_j \xi^j \in L_2(\Gamma, H) : \ \phi_j = 0, j \in \mathbb{Z}_- \right\},$$

$$L_2^-(\Gamma, H) = \left\{\phi(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi_j \xi^j \in L_2(\Gamma, H) : \ \phi_j = 0, j \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

будем обозначать P^+, P^- соответственно.

Рассмотрим оператор Теплица $T_A : L_2^+(\Gamma, H) \to L_2^+(\Gamma, H)$, порождаемый символом $A(\xi) \in W(\Gamma, L(H))$ и действующий по правилу $\phi(\xi) \mapsto (T_A\phi)(\xi) = P^+A(\xi)\phi(\xi)$.

Пусть $\mathfrak{A} \subseteq L(H)$ — коммутативная подалгебра алгебры $L(H)$ с тождественным оператором в качестве единицы, не имеющая радикала. Если $P(\xi) = \sum_{j=0}^n p_j\xi^j$, $p_j \in \mathfrak{A}$, и $P(\xi) \in GW(\Gamma, \mathfrak{A})$, то через $P_m(\xi)$, $Q_{n-m}(\xi)$ будем обозначать многочлены, построенные по функции $P(\xi)$ в теореме 3.

Следующий результат является уточнением хорошо известного результата об обратимости слева оператора Теплица, символом которого является обратимый полином.

Теорема 5. *Если $P(\xi) \in GW(\Gamma, \mathfrak{A})$, то оператор Теплица T_P обратим слева, уравнение $T_P\phi = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условиям*

$$\int_\Gamma \xi^{m-k-1}(P_m(\xi))^{-1} f(\xi)\, d\xi = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

При выполнении этих условий единственное решение уравнения $T_P\phi = f$ имеет вид

$$\phi(\xi) = (Q_{n-m}(\xi))^{-1}P^+(P_m(\xi))^{-1}f(\xi) = P^+(P(\xi))^{-1}f(\xi).$$

Теорема 6. *Пусть $P(\xi) \in GW(\Gamma, \mathfrak{A})$, а $U(\xi) = P(\xi^{-1})$. Тогда оператор Теплица T_U обратим справа, подпространство $\ker T_U$ совпадает с линейной оболочкой системы $S = \left\{\xi^{-j}(P_m(\xi^{-1}))^{-1}\phi_j, j = 0, 1, \dots, m-1\right\}$, где ϕ_j — произвольные элементы пространства H. Общее решение уравнения $T_U\phi = f$ имеет вид*

$$\phi(\xi) = \sum_{j=0}^{m-1} \xi^{-j}\big(P_m(\xi^{-1})\big)^{-1}\phi_j + \big(P(\xi^{-1})\big)^{-1} f(\xi).$$

$\lhd$ В доказательстве нуждается лишь утверждение о ядре оператора T_U. В силу свойства частичной мультипликативности и обратимости оператора $T_{Q_{n-m}(\xi^{-1})}$ имеет место равенство $\ker T_U = \ker T_{P_m(\xi^{-1})}$. Согласно теореме 4 имеем

$$\omega_j\big(P_m, \xi^{-1}\big) = \xi^{-j}\big(P_m\big(\xi^{-1}\big)\big)^{-1} \in W^+(\Gamma, \mathfrak{A}), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1,$$

поэтому $\xi^{-j}\big(P_m\big(\xi^{-1}\big)\big)^{-1}\phi_j \in L_2^+(\Gamma, H)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, для любого $\phi_j \in H$. Элементарная проверка показывает, что

$$T_{P_m(\xi^{-1})}\xi^{-j}\big(P_m\big(\xi^{-1}\big)\big)^{-1}\phi_j = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Это доказывает, что $l(S) \subseteq \ker T_{P_m(\xi^{-1})} = \ker T_U$. То, что все элементы подпространства $\ker T_{P_m(\xi^{-1})}$ являются элементами линейной оболочки системы S, вытекает из следующих соображений. Рассмотрим сопряженный оператор $(T_{P_m(\xi^{-1})})^*$. Нетрудно убедиться в том, что он является оператором Теплица и имеет в качестве символа многочлен $P_m^*(\xi) = \sum_{k=0}^m \alpha_k^*\xi^k$, если $P_m(\xi) = \sum_{k=0}^m \alpha_k\xi^k$. При этом $\alpha_k^* \in \mathfrak{A}^*$, где $\mathfrak{A}^* = \{\alpha^* \in L(H) : \alpha \in \mathfrak{A}\}$. Ясно, что $\mathfrak{A}^*$ — унитальная КБА без радикала и к оператору $T_{P_m^*}$ применима теорема 5. Условия разрешимости

$$\int\limits_\Gamma \xi^{m-k-1}(P_m^*(\xi))^{-1}f(\xi)\,d\xi = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

уравнения $T_{P_m^*}\phi = f$ можно записать в виде условий ортогональности правой части некоторой системе элементов, являющихся элементами ядра сопряженного оператора. При этом линейная оболочка этой системы ввиду нормальной разрешимости оператора $T_{P_m^*}$ совпадает с ядром оператора $(T_{P_m^*})^*$. Учитывая, что $(T_{P_m^*(\xi)})^* = T_{P_m(\xi^{-1})}$, а упомянутая система элементов есть S, убеждаемся в справедливости теоремы. $\rhd$

5. О матричных теплицевых операторах

В этом параграфе будем предполагать, что $H = \mathbb{C}^n$ и, что зафиксирован некоторый базис. Тогда, очевидно, символ теплицева оператора есть матрица-функция порядка n. Пусть $A(\xi) = (a_{jk}(\xi)) \in W(\Gamma, L(\mathbb{C}^n))$, через $(A(\xi))^\times = (A_{kj}(\xi))$ будем обозначать присоединенную матрицу. Разумеется, в приведенных записях $A_{kj}(\xi)$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{kj}(\xi)$ матрицы-функции $A(\xi)$. Ясно, что если $A^\pm(\xi) \in W^\pm(\Gamma, L(\mathbb{C}^n))$, то и $(A^\pm(\xi))^\times \in W^\pm(\Gamma, L(\mathbb{C}^n))$.

Теорема 7. *Пусть $A^+(\xi) \in W^+(\Gamma, L(\mathbb{C}^n))$ такова, что $\det A^+(\xi) = P(\xi)$, где $P(\xi)$ — многочлен. Тогда, если $P(\xi) \neq 0, \xi \in \Gamma$, то оператор Теплица $T_{A^+} : L_2^+(\Gamma, \mathbb{C}^n) \to L_2^+(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ обратим слева. Если выполнены условия*

$$\sum_{k=1}^n \int\limits_\Gamma \xi^{m-s-1}(P_m(\xi))^{-1}A_{kj}(\xi)f_j(\xi)\,d\xi = 0, \quad j = 1, 2, \ldots,\ s = 0, 1, \ldots, m-1,$$

то уравнение $T_{A^+}\Phi = F$, где $(\phi_1(\xi),\, \phi_2(\xi),\, \ldots,\, \phi_n(\xi))^\tau$, $F(\xi) = (f_1(\xi),\, f_2(\xi),\, \ldots,\, f_n(\xi))^\tau$, разрешимо. При выполнении этих условий единственное решение уравнения $T_{A^+}\Phi = F$ имеет вид $\Phi(\xi) = (A^+(\xi))^{-1}F(\xi)$.

Теорема 8. *Пусть $A^-(\xi) \in W^-(\Gamma, L(\mathbb{C}^n))$ такова, что $\det A^-(\xi) = P(\xi^{-1})$, где $P(\xi)$ — многочлен. Тогда, если $P(\xi) \neq 0$, $\xi \in \Gamma$, то оператор Теплица $T_{A^-} : L_2^+(\Gamma, \mathbb{C}^n) \to L_2^+(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ обратим справа. Имеет место вложение $l(S) \subseteq \ker T_{A^-}$, где $l(S)$ — линейная оболочка системы элементов $S = \big\{\xi^j(P_m(\xi^{-1}))^{-1}\phi_j, j = 0, 1, \ldots, m-1\big\}$, причем ϕ_j — произвольные элементы пространства H.*

6. О двумерных теплицевых операторах

Положим $\Gamma^2 = \Gamma \times \Gamma$, $L_2(\Gamma^2) = L_2(\Gamma, L_2(\Gamma))$, $W(\Gamma^2) = W(\Gamma, W(\Gamma))$, $L_2^{\pm\pm}(\Gamma^2) = L_2^{\pm}(\Gamma, L_2^{\pm}(\Gamma))$, $W^{\pm\pm}(\Gamma^2) = W^{\pm}(\Gamma, W^{\pm}(\Gamma))$. Введем также следующие обозначения: $W^{\pm\bullet}(\Gamma^2) = W^{\pm+}(\Gamma^2) + W^{\pm-}(\Gamma^2)$, $W^{\bullet\pm}(\Gamma^2) = W^{+\pm}(\Gamma^2) + W^{-\pm}(\Gamma^2)$.

Оператор проектирования на подпространство $L_2^{\pm\pm}(\Gamma^2)$ будем обозначать $P^{\pm\pm}$.

Двумерным теплицевым оператором называют оператор $T_A : L_2^{++}(\Gamma^2) \to L_2^{++}(\Gamma^2)$, действующий по правилу $\phi(\xi,\eta) \mapsto P^{++}A(\xi,\eta)\phi(\xi,\eta)$, где $A(\xi,\eta) \in W(\Gamma^2)$. Функцию $A(\xi,\eta)$ называют символом оператора T_A.

До сих пор наиболее общим результатом для оператора $T_a : L_2^{++}(\Gamma^2) \to L_2^{++}(\Gamma^2)$ является следующий критерий нетеровости, полученный И. Б. Симоненко [4].

Теорема 9. *Оператор $T_a : L_2^{++}(\Gamma^2) \to L_2^{++}(\Gamma^2)$ нетеров тогда и только тогда, когда его символ удовлетворяет условиям:*

1) $a(\xi,\eta) \neq 0$, $(\xi,\eta) \in \Gamma^2$;

2) $\operatorname{ind}_\xi a(\xi,\eta) = \operatorname{ind}_\eta a(\xi,\eta) = 0$.

При выполнении условий теоремы индекс оператора T_a равен нулю.

В этом параграфе рассматривается нетеров двумерный оператор Теплица с символом $a(\xi,\eta) = a_{-1}(\eta)\xi^{-1} + a_0(\eta) + a_1(\eta)\xi$, где $a_k(\eta) \in W(\Gamma)$, $k = -1, 0, 1$.

Пусть $b(\xi,\eta) = b_2(\eta)\xi^2 + b_1(\eta)\xi + b_0(\eta)$, где $b_2(\eta), b_1(\eta), b_0(\eta) \in W(\Gamma)$ и функции $b_2(\eta), b_0(\eta)$ не являются тождественными нулями. Нас будут интересовать корни уравнения $b(\xi,\eta) = 0$ в предположении, что переменная $\eta \in \Gamma$ фиксирована. Ясно, что имеются два кривых корня $\xi = \xi_1(\eta)$, $\xi = \xi_2(\eta)$, определяемых по стандартным формулам. Однако эти корни не обязаны обладать, вообще говоря, никакими свойствами непрерывности или гладкости по переменной $\eta \in \Gamma$. Однако, оказывается, что при некоторых дополнительных условиях о кривых $\xi = \xi_1(\eta)$, $\xi = \xi_2(\eta)$ можно утверждать, что они обладают, в некотором смысле, такими свойствами. Например, имеет место следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $b(\xi,\eta) \neq 0$, $(\xi,\eta) \in \Gamma^2$ и $\operatorname{ind}_\xi b(\xi,\eta) = 1$. Тогда*

$$b(\xi,\eta) = d_0(\eta)\big(\xi - \xi_1(\eta)\big)\big(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi\big)$$

и кривые нулей $\xi = \xi_1(\eta)$, $\xi = \xi_2(\eta)$ таковы, что

$$|\xi_1(\eta)| < 1,\ \forall\eta \in \Gamma, \quad |\xi_2(\eta)| > 1,\ \forall\eta \in \Gamma \quad \text{и} \quad \xi_1(\eta) \in W(\Gamma),\ \xi_2^{-1}(\eta) \in W(\Gamma).$$

$\lhd$ Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 3. $\rhd$

Замечание. В представлении $b(\xi,\eta) = d_0(\eta)(\xi - \xi_1(\eta))(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi)$ квадратного трехчлена, удовлетворяющего условиям леммы 5, $d_0(\eta) \neq 0$, $\eta \in \Gamma$ и $\operatorname{ind}_\eta d_0(\eta) = \operatorname{ind}_\eta b(\xi,\eta)$.

Лемма 6. *Пусть $a^{+\bullet}(\xi,\eta) \in W^{+\bullet}(\Gamma^2)$ и допускает представление*

$$a^{+\bullet}(\xi,\eta) = a^{--}(\xi,\eta)a^{+-}(\xi,\eta)a^{-+}(\xi,\eta)a^{++}(\xi,\eta)\xi^n,$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$, а $a^{\pm\mp}(\xi,\eta) \in W^{\pm\mp}(\Gamma^2)$, причем $a^{+-}(\xi,\eta) \in GW^{+\bullet}(\Gamma^2)$. Тогда оператор Теплица $T_{a^{+\bullet}}$ допускает представление

$$T_{a^{+\bullet}} = T_{a^{+-}}T_{a^{--}}T_{a^{-+}}T_{a^{++}}T_{\xi^n}.$$

Рассмотрим связанный с символом $a(\xi,\eta)$ многочлен

$$p(\xi,\eta) = \xi a(\xi,\eta) = a_{-1}(\eta) + a_0(\eta)\xi + a_1(\eta)\xi^2.$$

Очевидно, $p(\xi,\eta) \neq 0$, $(\xi,\eta) \in \Gamma^2$ и в силу свойств индекса $\mathrm{ind}_{\xi\in\Gamma}\, p(\xi,\eta) = 1$, $\mathrm{ind}_{\eta\in\Gamma}\, p(\xi,\eta) = 0$. Согласно лемме 5 и замечанию к ней найдутся функции $\xi = \xi_1(\eta)$, $\xi = \xi_2(\eta)$ такие, что $|\xi_1(\eta)| < 1$ $(\forall\eta \in \Gamma)$, $|\xi_2(\eta)| > 1$ $(\forall\eta \in \Gamma)$, $\xi_1(\eta) \in W(\Gamma)$, $\xi_2^{-1}(\eta) \in W(\Gamma)$, и при этом имеет место равенство

$$p(\xi,\eta) = d_0(\eta)\big(\xi - \xi_1(\eta)\big)\big(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi\big).$$

Отметим, что $d_0(\eta) \in W(\Gamma)$, $d_0(\eta) \neq 0$, $\eta \in \Gamma$ и $\mathrm{ind}_\eta\, d_0(\eta) = \mathrm{ind}_\eta\, p(\xi,\eta) = 0$. Хорошо известно [2], что при выполнении последних условий функция $d_0(\eta) \in W(\Gamma)$ допускает каноническую факторизацию в $W(\Gamma)$: $d_0(\eta) = d^-(\eta)d^+(\eta)$. Принимая во внимание приведенные факты, представим символ в следующем виде:

$$a(\xi,\eta) = d^-(\eta)\big(1 - \xi_1(\eta)\xi^{-1}\big)\big(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi\big)d^+(\eta).$$

В силу свойства частичной мультипликативности отсюда следует, что

$$T_a = T_{d^-(\eta)}T_{(1-\xi_1(\eta)\xi^{-1})(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)}T_{d^+(\eta)}.$$

Поскольку операторы $T_{d^-(\eta)}$, $T_{d^+(\eta)}$ обратимы и при этом

$$(T_{d^-(\eta)})^{-1} = T_{(d^-(\eta))^{-1}}, \quad (T_{d^+(\eta)})^{-1} = T_{(d^+(\eta))^{-1}},$$

то поведение оператора T_a определяется поведением оператора $T_{(1-\xi_1(\eta)\xi^{-1})(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)}$. В связи с этим символ $(1-\xi_1(\eta)\xi^{-1})(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)$ и соответствующий ему оператор Теплица будем называть модельными. Отметим, что операторы Теплица $T_{1-\xi_1(\eta)\xi^{-1}}$, $T_{1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi}$ обратимы и при этом

$$T_{1-\xi_1(\eta)\xi^{-1}} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\big(P^{++}\big(\xi_1(\eta)\xi^{-1}\big)P^{++}\big)^j, \quad T_{1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\big(P^{++}\big(\xi_2^{-1}(\eta)\xi\big)P^{++}\big)^j.$$

Запишем модельный символ в виде

$$a(\xi,\eta) = \xi^{-1}\big(\xi - \xi_1(\eta)\big)\big(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi\big).$$

В силу свойства частичной мультипликативности отсюда имеем

$$T_a = T_{\xi^{-1}}T_{(\xi-\xi_1(\eta))(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)}.$$

Поскольку $(\xi - \xi_1(\eta))(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi) \in W^{+\bullet}(\Gamma^2)$, то из

$$\big(\xi - \xi_1(\eta)\big)\big(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi\big) = a^{--}(\xi,\eta)a^{+-}(\xi,\eta)a^{-+}(\xi,\eta)a^{++}(\xi,\eta)\xi,$$

следует, что

$$T_{(\xi-\xi_1(\eta))(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)} = T_{a^{+-}}T_{a^{--}}T_{a^{-+}}T_\xi T_{a^{++}}.$$

Отсюда имеем следующее представление оператора Теплица:

$$T_a = T_{\xi^{-1}}T_{(\xi-\xi_1(\eta))(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)} = T_{(\xi-\xi_1(\eta))(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)} = T_{\xi^{-1}}T_{a^{+-}}T_{a^{--}}T_{a^{-+}}T_\xi T_{a^{++}}.$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$T_{(1-\xi_1(\eta)\xi^{-1})(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)}\phi^{++}(\xi,\eta) = f^{++}(\xi,\eta).$$

Ввиду полученного представления, имеем

$$T_{\xi^{-1}}T_{a^{+-}}T_{a^{--}}T_{a^{-+}}T_{\xi}T_{a^{++}}\phi^{++}(\xi,\eta)=f^{++}(\xi,\eta).$$

Откуда получаем

$$T_{a^{+-}}T_{1-\xi_1(\eta)\xi^{-1}}T_{\xi}T_{a^{++}}\phi^{++}(\xi,\eta)=c^{+}(\eta)+\xi f^{++}(\xi,\eta),$$

где $c^{+}(\eta)\in\ker T_{\xi^{-1}}$. Положим

$$b^{+-}(\xi,\eta)=(a^{+-}(\xi,\eta))^{-1}=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}b_j^{-}(\eta)\xi^{j}.$$

Тогда последнее равенство равносильно следующему:

$$T_{1-\xi_1(\eta)\xi^{-1}}T_{\xi}T_{a^{++}}\phi^{++}(\xi,\eta)=T_{b^{+-}}c^{+}(\eta)+T_{b^{+-}}\xi f^{++}(\xi,\eta).$$

Но тогда

$$\xi a^{++}(\xi,\eta)\phi^{++}(\xi,\eta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(P^{++}\xi_1(\eta)\xi^{-1}P^{++}\right)^{k}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}P^{++}b_j^{-}(\eta)\xi^{j}P^{++}c^{+}(\eta)+f_1^{++}(\xi,\eta),$$

где

$$b^{+-}(\xi,\eta)=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}b_j^{-}(\eta)\xi^{j},\quad f_1^{++}(\xi,\eta)=T_{b^{+-}}\xi f^{++}(\xi,\eta).$$

Полагая в последнем равенстве $\xi=0$, получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(P^{++}\xi_1(\eta)P^{+}\right)^{k}P^{++}b_k^{-}(\eta)P^{+}c^{+}(\eta)=-f_1^{++}(0,\eta).$$

Нетрудно видеть, что имеет место равенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(P^{+}\xi_1P^{+}\right)^{k}P^{+}b_k^{-}P^{+}=P^{+}b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)P^{+}+\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(\left(P^{+}\xi_1P^{+}\right)^{k}P^{+}b_k^{-}P^{+}-\left(P^{+}b_k^{-}\xi_1^{k}P^{+}\right)\right).$$

Лемма 7. *Оператор*

$$K=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(\left(P^{+}\xi_1(\eta)P^{+}\right)^{k}P^{+}b_k^{-}(\eta)P^{+}-\left(P^{+}b_k^{-}(\eta)\xi_1^{k}(\eta)P^{+}\right)\right)$$

вполне непрерывен в пространстве $L_2^{+}(\Gamma)$.

Таким образом, приходим к следующему уравнению:

$$\left(P^{+}b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)P^{+}+K\right)c^{+}(\eta)=-f_1^{++}(0,\eta).$$

Лемма 8. *Оператор Теплица* $P^{+}b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)P^{+}\colon L_2^{+}(\Gamma)\to L_2^{+}(\Gamma)$ *обратим.*

$\lhd$ В самом деле, из того, что $b^{+-}(\xi,\eta)\in GW^{+-}(\Gamma^2)$, следует, что $b^{+-}(\xi,\eta)\neq 0$, $|\xi|\leqslant 1$, $|\eta|\geqslant 1$. Поэтому, в частности, $b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)\neq 0$, $\eta\in\Gamma$. Кроме того, в силу гомотопической инвариантности индекса и того, что

$$\left|(1-\lambda)\xi_1(\eta)+\lambda\right|\leqslant|1-\lambda||\xi_1(\eta)|+|\lambda|\leqslant 1,\quad \lambda\in[0,1],$$

имеем

$$\operatorname*{ind}_{\eta\in\Gamma} b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta) = \operatorname*{ind}_{\eta\in\Gamma} b_\lambda(\eta), \quad b_\lambda(\eta) = b^{+-}((1-\lambda)\xi_1(\eta)+\lambda,\eta),\ \lambda\in[0,1].$$

Но $\operatorname{ind}_{\eta\in\Gamma} b_1(\eta) = \operatorname{ind}_{\eta\in\Gamma} b^{+-}(1,\eta) = 0$, поэтому $\operatorname{ind}_{\eta\in\Gamma} b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta) = 0$. Выполнение условий $b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)\neq 0$, $\eta\in\Gamma$ и $\operatorname{ind}_{\eta\in\Gamma} b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)=0$ влечет за собой обратимость оператора $P^+b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)P^+\colon L_2^+(\Gamma)\to L_2^+(\Gamma)$ (см. [2]). $\rhd$

Пользуясь леммой 8, запишем уравнение для функции $c^+(\eta)$ в виде

$$c^+(\eta) + \widetilde{K}c^+(\eta) = f_2^+(\eta),$$

где

$$\widetilde{K} = \big(P^+b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)P^+\big)^{-1}K, \quad f_2(\eta) = -\big(P^+b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)P^+\big)^{-1}f_1(\eta).$$

Очевидно, это уравнение является уравнением Фредгольма второго рода в пространстве $L_2^+(\Gamma)$. Будем называть это уравнение определяющим.

Теорема 10. *Определяющее уравнение $c^+(\eta)+\widetilde{K}c^+(\eta) = f_2^+(\eta)$, построенное по уравнению $T_a\phi^{++} = f^{++}$ при помощи модельного оператора, равносильно этому уравнению в том смысле, что*

1) *если однородное определяющее уравнение имеет только тривиальное решение, то оператор T_a обратим и единственное решение уравнения $T_a\phi^{++} = f^{++}$ при любой правой части определяется формулой*

$$\phi^{++}(\xi,\eta) = (a^{++})^{-1}P^{++}\xi^{-1}\left(\sum_{k\in Z_+}\big(P^{++}\xi_1\xi^{-1}P^{++}\big)^k\sum_{j\in Z_+}P^{++}b_j^-\xi^jP^{++}c^+(\eta)+f_1^{++}(\xi,\eta)\right),$$

где $c^+(\eta)$ — решение неоднородного определяющего уравнения;

2) *если однородное определяющее уравнение имеет конечное число линейно независимых решений, а правая часть $f^{++}(\xi,\eta)$ такова, что неоднородное определяющее уравнение разрешимо, то уравнение $T_a\phi^{++} = f^{++}$ разрешимо и его общее решение имеет вид*

$$\phi^{++}(\xi,\eta) = (a^{++})^{-1}P^{++}\xi^{-1}\left(\sum_{k\in Z_+}\big(P^{++}\xi_1\xi^{-1}P^{++}\big)^k\sum_{j\in Z_+}P^{++}b_j^-\xi^jP^{++}c^+(\eta)+f_1^{++}(\xi,\eta)\right),$$

где $c^+(\eta)$ — общее решение неоднородного определяющего уравнения.

Литература

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.—640 с.
2. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—352 с.
3. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.—Кишинев: Штиинца, 1973.—426 с.
4. *Симоненко И. Б.* О многомерных дискретных свертках // Мат. исследования.—Кишинев: Штиинца, 1968.—Вып. 1.—С. 298–313.

Статья поступила 26 августа 2016 г.

Пасенчук Александр Эдуардович
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: pasenchuk@mail.ru

ON SPLITTING POLYNOMIALS WITH COEFFICIENTS FROM COMMUTATIVE BANACH ALGEBRAS

Pasenchuk A. E.

The problem of decomposition of polynomials with coefficients from a unital commutative Banach algebra into a product of polynomials with coefficients in the same algebra is considered. Sufficient conditions for the existence of such decomposition and its construction are indicated. Some applications in the theory of Toeplitz operators on a circle and a torus are given. In particular, the equivalent regularization for a two-dimensional Toeplitz operator with a special symbol is derived. Equations generated by the corresponding Toeplitz operators in the spaces of measurable square-integrable vector-valued functions on the circle and measurable square summable functions are examined. This leads to the construction of equivalent regularizers for the described Toeplitz operators. The regularizer construction turns out to be equivalent to right canonical Wiener-Hopf factorization of some matrix function built from the symbol in a case of vector functions. An equivalent regularizer is built in explicit form for a two-dimensional Toeplitz operator with a special symbol.

Key words: polynomial, commutative Banach algebra, decomposition of a polynomial, Toeplitz operator, regularization.