Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 49–57

УДК **514.12**

УРАВНЕНИЯ ГАУССА, ПЕТЕРСОНА — КОДАЦЦИ, РИЧЧИ В НЕГОЛОНОМНЫХ РЕПЕРАХ

Л. Н. Шаповалова

В работе рассматривается изометрическое погружение n-мерного хаусдорфового ориентируемого многообразия, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, в m-мерное полное односвязное риманово или псевдориманово пространство постоянной кривизны. С использованием неголономнах реперов выводятся уравнения Гаусса, Петерсона — Кодацци, Риччи для погружений класса C^2 n-мерного многообразия в m-мерное пространство. Основной результат получен с использованием обобщенного внешнего дифференцирования по де Раму. Показано, что при этом формы связности, погружения и кручения обладают непрерывным обобщенным внешним дифференциалом.

Ключевые слова: подмногообразие, погружение, неголономный репер, уравнение Гаусса, уравнение Петерсона — Кодацци, уравнение Риччи.

1. Введение

Для погружений z гладкого n-мерного многообразия X в m-мерное пространство постоянной кривизны, $1 < n < m$, класса C^r, $r \geqslant 3$, вывод уравнений Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи в голономном репере приводится в книге Эйзенхарта [1, с. 253]. В работах С. Б. Климентова [2], Ю. Е. Боровского [3] и П. Е. Маркова [4] эти уравнения выводятся при пониженных требованиях на регулярность погружения z. В работе [2] уравнения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи получены в голономном репере для погружений z класса W_q^r, $r \geqslant 3$, $q > n$, функций, имеющих обобщенные производные по С. Л. Соболеву до r-го порядка включительно, суммируемые с степенью q, n-мерного многообразия X в m-мерное псевдориманово пространство постоянной кривизны, $1 < n < m$. В работе [3] уравнения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи выводятся в голономных реперах для погружений z класса W_2^1 без предположения непрерывности отображения z, $1 < n < m$. В работе [4] эти уравнения получены для погружений z класса C^2 в плоское пространство, и установлено, что при этом формы связности, погружения и кручения обладают непрерывным обобщенным внешним дифференциалом, что не следует из конструкций работы [3].

В данной работе последний результат с использованием неголономных реперов обобщается на случай C^2-погружений z в риманово или псевдориманово пространство постоянной кривизны K.

2. Многообразия и расслоения

В данном пункте приводятся необходимые нам сведения о многообразиях и расслоениях, устанавливаются терминология и обозначения, которые используются для формулировки основного результата.

1.1. Пусть X — связное n-мерное, $n \geqslant 2$, хаусдорфово ориентируемое C^{∞}-многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счетности. Расслоение над X с тотальным пространством $P(X)$ будем обозначать символом его тотального пространства $P(X)$, слой над точкой $x \in X - P_x(X)$. Через $T(X)$ и $T^*(X)$ обозначим соответственно касательное и кокасательное расслоение над X. Пусть $\mathscr{E}^r(X, P(X))$ — множество C^r-сечений, $r \geqslant 1$, расслоения $P(X)$.

Для двух многообразий X и Y размерностей n и m соответственно через $C^r(X, Y)$ обозначим множество всех отображений $X \to Y$ класса C^r. Каждое отображение $f : X \to Y$ будем рассматривать как сечение $x \to (x, f(x))$ тривиального расслоения $X \times Y$. Тогда $C^r(X, Y) = \mathscr{E}^r(X, X \times Y)$.

1.2. Обозначим через $\Im^*(X)$ расслоение локальных кореперов на X. В дальнейшем локальным корепером на X будем называть сечение этого расслоения.

Пусть G — группа Ли, являющаяся подгруппой полной линейной группы $\mathbf{GL}(n)$. Как и принято, каждый элемент группы $\mathbf{GL}(n)$ отождествим с его матрицей в каком-либо базисе. Два локальных корепера $\tau, \tau' \in \mathscr{E}^r(X, \Im^*(X))$ с областями определения U и U' соответственно называются *G-согласованными*, если либо $U \cap U' = \varnothing$, либо в каждой точке $x \in U \cap U'$, базисы $\tau(x) = \left(\tau^i(x)\right)_{i=1}^n$, $\tau'(x) = \left(\tau'^k(x)\right)_{k=1}^n$ пространства $T^*_x(X)$ связаны равенством $\tau'^k(x) = p_i^k(x)\tau^i(x)$, где матрица $P = (p_i^k) \in C^r(X, G)$.

Множество всех попарно G-согласованных локальных кореперов называется *G-орбитой.* Так как области определения локальных кореперов покрывают X, то, хотя отношение G-согласованности и не является отношением эквивалентности, множество всех локальных C^r-кореперов на X разбивается на непересекающиеся G-орбиты. Каждая G-орбита однозначно определяется заданием какого-либо ее корепера [5, гл. 2, § 6, с. 144]. Всякая G-орбита представляет собою локально-тривиальное расслоение со стандартным слоем G и структурной группой G.

1.3. В качестве группы G рассмотрим псевдоортогональную группу, определенную следующим образом. Зафиксируем упорядоченный набор $\Delta = \left(\Delta^1, \ldots, \Delta^n\right)$, где $\Delta^i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$. Будем обозначать так же через Δ диагональную $n \times n$-матрицу, диагональные элементы которой в i-ой строке равны Δ^i. Через $\mathrm{O}(n, \Delta)$ обозначим совокупность всех $n \times n$-матриц P, удовлетворяющих условию $\Delta P^T = P^{-1}\Delta$, где P^T — матрица, получаемая из P транспонированием, P^{-1} — матрица, обратная к P. Можно показать, что $\mathrm{O}(n, \Delta)$ является подгруппой группы $\mathbf{GL}(n)$ [6, с. 18]. Группу $\mathrm{O}(n, \Delta)$ будем называть *псевдоортогональной группой сигнатуры* Δ. Если матрица $P \in \mathrm{O}(n, \Delta)$, то в силу ее построения $\det P = \pm 1$. Множество всех матриц $P \in \mathrm{O}(n, \Delta)$ с $\det P = +1$ образует подгруппу группы $\mathrm{O}(n, \Delta)$. Эту группу назовем *специальной псевдоортогональной группой* и будем обозначать $\mathrm{SO}(n, \Delta)$. Доказательство того, что группа $\mathrm{SO}(n, \Delta)$ является группой Ли, приводится в работе [4, с. 23].

1.4. Через $\mathfrak{R}_\Delta(X)$ обозначим $\mathrm{SO}(n, \Delta)$-орбиту локального корепера $\tau \in \mathscr{E}^r(X, \Im^*(X))$. Следующая теорема служит основой для построения тензорного анализа над $\mathfrak{R}_\Delta(X)$ [7, гл. 2, § 1, с. 67–68].

Теорема 1. *Для всякого корепера* $\tau = \left(\tau^i\right)_{i=1}^n \in \mathscr{E}^r(X, \mathfrak{R}_\Delta(X))$, $r \geqslant 1$, *с областью определения* U *существует и притом единственная система* 1*-форм* $\Phi_j^i \in \mathscr{E}^{r-1}(U, T^*(U))$, *удовлетворяющая условиям*

$$d\tau^i = \tau^j \wedge \Phi^i_j, \quad \Delta^i \Phi^i_j + \Delta^j \Phi^i_j = 0, \quad i,j = 1,\ldots,n. \tag{1}$$

Формы Φ^i_j, определяемые равенствами (1), называются *формами связности корепера* τ. Коэффициенты Γ^i_{jk} в разложении $\Phi^i_j = \Gamma^i_{jk}\tau^k$, $i,j,k = 1,\ldots,n$, называются *символами Кристоффеля.*

1.5. Обозначим через $\Lambda^2 T^*(X)$ расслоение кососимметрических билинейных форм, через $S^2T^*(X)$ — расслоение симметрических билинейных форм, $S^2_\Delta T^*(X)$ — подрасслоение невырожденных билинейных форм с нормальным видом

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \Delta^i \tau^i \otimes \tau^i. \tag{2}$$

Всякое сечение расслоения $S^2T^*(X)$ будем называть *псевдоримановой метрикой сигнатуры* Δ. Поскольку псевдометрика ds^2, определенная равенством (2), не зависит от выбора локального корепера τ из содержащей его орбиты, то всякая $\mathrm{SO}(n,\Delta)$-орбита определяет некоторую псевдориманову метрику сигнатуры Δ. Обратно, всякой псевдоримановой метрике ds^2 можно сопоставить две $\mathrm{SO}(n,\Delta)$-орбиты. В каждой из них псевдометрика имеет вид (2), причем всякие два локальных корепера $\tau = \left(\tau^i\right)^n_{i=1}$ и $\tau' = \left(\tau'^k\right)^n_{k=1}$ из этих орбит связаны равенством $\tau'^j = q^j_i \tau^i$, где $Q = \left(q^j_i\right)$ — матрица из $\mathrm{O}(n,\Delta)$ с определителем, равным -1. Будем считать, что на многообразии X зафиксирована ориентация, и $\mathfrak{R}_\Delta(X)$ — та из этих двух орбит, в которой локальные кореперы связаны с координатным корепером $\left(dx^i\right)^n_{i=1}$ в карте из ориентации матрицами с положительными определителями. Эту орбиту $\mathfrak{R}_\Delta(X)$ будем называть *порожденной псевдоримановой метрикой* ds^2.

2. Пространство постоянной кривизны

Следуя Л. П. Эйзенхарту [1, с. 246], пространство V_m постоянной кривизны K размерности m будем рассматривать в вейерштрассовых координатах. Это позволяет при $K = 0$ отождествлять его с m-мерным плоским пространством, при $K \neq 0$ — с гиперсферой в $(m+1)$-мерном плоском пространстве. Поэтому в этом пункте сначала рассмотрим плоское пространство, а затем — пространство с кривизной $K \neq 0$.

2.1. *Плоским m-мерным пространством* Π_m называется m-мерное аффинное пространство A_m, на векторной части которого задана невырожденная симметрическая билинейная форма. Эта форма называется *скалярным произведением*, Π_m — *псевдоевклидовым пространством.* Введем в Π_m ортонормированную систему координат $(O; a_1,\ldots,a_m)$. Упорядоченный набор $\Delta' = \left(\Delta^1,\ldots,\Delta^m\right)$, где $\Delta^\alpha = a^2_\alpha = \pm 1$, $\alpha = 1,\ldots,m$, будем называть *сигнатурой пространства* Π_m.

Каждой точке P пространства Π_m можно поставить в соответствие упорядоченный набор действительных чисел $\left(x^1,x^2,\ldots,x^m\right)$ из разложения $\overline{OP} = x^\alpha a_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,m$. Тем самым определено биективное отображение $\varphi : \Pi_m \to R^m$, которое превращает Π_m в гладкое m-мерное многообразие.

2.2. Пусть $z : X \to \Pi_m$ — C^r-погружение, $r \geqslant 2$, n-мерного многообразия X в m-мерное пространство Π_m, $2 \leqslant n < m$. Образ погружения $F = z(X)$ является n-мерным подмногообразием многообразия Π_m. Обозначим через TF касательное расслоение многообразия F, $T^{\perp}F$ — нормальное расслоение, $I(z)$ — метрику на X, индуцированную z. Через $\mathfrak{R}_\Delta(X)$ обозначим $\mathrm{SO}(n,\Delta)$-орбиту, порожденную метрикой $I(z)$ сигнатуры $\Delta = \left(\Delta^1,\ldots,\Delta^n\right)$. Для всякого локального корепера $\tau = \left(\tau^i\right)_{i=1}^n \in \mathscr{E}^{r-1}(X,\mathfrak{R}_\Delta(X))$ определен локальный репер $e = \left(e_i\right)_{i=1}^n \in \mathscr{E}^{r-1}(X,TF)$, $e_i = \xi_i(z)$, причем $\xi = \left(\xi_i\right)_{i=1}^n$ — локальный репер на X, дуальный кореперу τ. Для векторов репера e выполняются равенства

$$e_ie_j = \Delta_{ij} = \begin{cases} \Delta^i, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} \qquad i,j=1,\ldots,n. \tag{3}$$

Будем предполагать, что в каждой точке $x\in X$ касательное пространство T_xF подмногообразия F содержит n попарно ортогональных неизотропных направлений. Тогда в окрестности каждой точки $x\in X$ в нормальном расслоении [1, гл. 4, § 42, с. 175–179] определен локальный C^{r-1}-репер $\nu = \left(\nu_\sigma\right)_{\sigma=1}^p$, $p=m-n$, удовлетворяющий условиям

$$\nu_\sigma\nu_\tau = \begin{cases} \Delta^{n+\sigma} & \tau=\sigma,\\ 0 & \tau\neq\sigma,\end{cases} \tag{4}$$

$$e_i\nu_\sigma = 0, \quad i=1,\ldots,n,\ \sigma=1,\ldots,p.$$

В дальнейшем вместо $\Delta^{n+\sigma}$ будем писать Δ^σ. Поскольку всякий вектор из Π_m может быть представлен в виде линейной комбинации векторов e_i, ν_σ, то сигнатура скалярного произведения в силу (3), (4) в Π_m имеет вид $\Delta' = \left(e_1^2,\ldots,e_n^2,\nu_1^2,\ldots,\nu_p^2\right)$.

Разложение дифференциалов de_i, $d\nu_\sigma$ по базису (e_i,ν_σ) [4] приводит к формулам Гаусса и Вейнгартена

$$\begin{gathered} de_i = \Phi_i^ke_k + \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma\omega_i^\sigma\nu_\sigma,\\ d\nu_\sigma = -\sum_{i=1}^n \Delta^i\omega_i^\sigma e_i + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau\varkappa_\sigma^\tau\nu_\tau,\\ i,k=1,\ldots,n,\quad \tau,\sigma=1,\ldots,p,\quad p=m-n, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\Delta^i = e_i^2$, $\Delta^\sigma = \nu_\sigma^2$, Φ_k^i — формы связности локального корепера $\tau\in\mathscr{E}^{r-1}(X,\mathfrak{R}_\Delta(X))$, ω_i^σ — 1-формы, называемые *формами погружения*, $\varkappa_\tau^\sigma = -\varkappa_\sigma^\tau$ — 1-формы, называемые *формами кручения*. Для форм погружения [4] выполняются соотношения

$$\omega_i^\sigma\wedge\tau^i = 0, \quad i=1,\ldots,n,\ \sigma=1,\ldots,p.$$

Билинейную симметрическую форму $II^\sigma\in\mathscr{E}^{r-2}(X,S^2T^*(X))$, определенную равенством

$$II^\sigma = \omega_i^\sigma\otimes\tau^i = b_{ij}^\sigma\tau^i\otimes\tau^j,$$

называют *второй основной формой многообразия* F или погружения z относительно нормали ν_σ. Симметрия $b_{ij}^\sigma = b_{ji}^\sigma$, $i,j=1,\ldots,n$, $\sigma=1,\ldots,p$, следует из леммы Картана [8, гл. 2, § 7].

Если погружение $z\in C^3(X,\Pi_m)$, то внешнее дифференцирование формул Гаусса и

Вейнгартена [4, с. 25] приводит к уравнениям Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи

$$
\begin{gathered}
\sum_{\sigma=1}^{p} \Delta^{\sigma}\omega_i^{\sigma}\wedge\omega_j^{\sigma} = \Delta^{i}(d\Phi_j^i + \Phi_k^i\wedge\Phi_j^k),\\
d\omega_i^{\sigma} = \Phi_i^k\wedge\omega_k^{\sigma} + \sum_{\tau=1}^{p}\Delta^{\tau}\omega_i^{\tau}\wedge\varkappa_{\tau}^{\sigma},\\
d\varkappa_{\sigma}^{\tau} = \sum_{i=1}^{n}\Delta^{i}\omega_i^{\tau}\wedge\omega_i^{\sigma} + \sum_{\rho=1}^{p}\Delta^{\rho}\varkappa_{\sigma}^{\rho}\wedge\varkappa_{\rho}^{\tau},\\
i,j,k = 1,\ldots,n,\quad \tau,\sigma = 1,\ldots,p.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

2.3. Пусть V_m — m-мерное полное односвязное риманово или псевдориманово пространство постоянной кривизны $K \neq 0$ сигнатуры $\Delta'' = \big(\Delta^1,\ldots,\Delta^m\big)$. Будем рассматривать V_m [1, с. 246] как гиперсферу в плоском пространстве Π_{m+1} сигнатуры $\Delta' = \big(\Delta^1,\ldots,\Delta^m,\Delta^{m+1}\big)$, заданную уравнением

$$
z^2 = \frac{1}{K}. \tag{7}
$$

Пусть $z : X \to V_m$ C^r-погружение, $r \geqslant 1$, n-мерного многообразия X в m-мерное пространство постоянной кривизны V_m, $2 \leqslant n < m$, $F = z(X)$ — подмногообразие многообразия V_m. Рассматривая подмногообразие F в пространстве Π_{m+1}, будем использовать сведения пунктов 2.1 и 2.2. Дифференцируя равенство (7), получим $zdz = 0$. Следовательно, в каждой точке на F вектор z можно взять в качестве одной из нормалей нормального пространства F в Π_{m+1}. Обозначим эту нормаль ν_{p+1}. Оставшиеся $p = m - n$ нормалей $\big(\nu_\sigma\big)_{\sigma=1}^{p}$ определяют нормальное пространство к F в V_m, которое является подпространством касательного пространства V_m в Π_{m+1}. Совокупность $\big(\nu_\sigma,\nu_{p+1}\big)_{\sigma=1}^{p}$, $\nu_{p+1} = \frac{z}{|z|}$, $|z| = \sqrt{|z^2|}$, взаимно ортогональных нормалей в каждой точке $x \in X$ образует ортонормированный базис в нормальном пространстве $T_x^{\perp}F$ подмногообразия F в Π_{m+1}, причем выполняются равенства (4). Для последнего элемента сигнатуры Δ' в силу (4) и (7) имеем $\Delta^{m+1} = \frac{K}{|K|}$.

При $r \geqslant 2$ формулы Гаусса и Вейнгартена для погружения $z : X \to V_m \subset \Pi_{m+1}$, используя (5), можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
de_i = \Phi_i^k e_k + \sum_{\sigma=1}^{p}\Delta^{\sigma}\omega_i^{\sigma}\nu_{\sigma} - K\tau^i\Delta^i z,\\
d\nu_{\sigma} = -\sum_{i=1}^{n}\Delta^{i}\omega_i^{\sigma}e_i + \sum_{\tau=1}^{p}\Delta^{\tau}\varkappa_{\sigma}^{\tau}\nu_{\tau},\\
p = m-n,\quad \Delta^i = e_i^2,\quad \Delta^{\tau} = \nu_{\tau}^2,\quad i,k = 1,\ldots,n,\ \tau,\sigma = 1,\ldots,p.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Если $r \geqslant 3$, то внешнее дифференцирование формул Гаусса и Вейнгартена (8) приводит к уравнениям Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи:

$$\begin{gathered}
\sum_{\sigma=1}^{p} \Delta^\sigma \omega_i^\sigma \wedge \omega_j^\sigma = \Delta^i (d\Phi_j^i + \Phi_k^i \wedge \Phi_j^k) - K\Delta^i \Delta^j \tau^i \wedge \tau^j, \\
d\omega_i^\sigma = \Phi_i^k \wedge \omega_k^\sigma + \sum_{\tau=1}^{p} \Delta^\tau \omega_i^\tau \wedge \varkappa_\tau^\sigma, \\
d\varkappa_\sigma^\tau = \sum_{i=1}^{n} \Delta^i \omega_i^\tau \wedge \omega_i^\sigma + \sum_{\rho=1}^{p} \Delta^\rho \varkappa_\sigma^\rho \wedge \varkappa_\rho^\tau, \\
i,j,k = 1,\ldots,n, \quad \tau,\sigma = 1,\ldots,p, \quad p = m-n.
\end{gathered} \tag{9}$$

3. Обобщенный внешний дифференциал и его свойства

В данном пункте приводится понятие обобщенного внешнего дифференциала [9, 10], некоторые его свойства, доказательства которых приведены в работе [11], и выводятся уравнения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи для случая C^2–погружений $z : X \to V_m$.

3.1. Пусть U-открытое множество на X, замыкание которого $\overline{U}$ компактно и содержится в некоторой координатной окрестности. Через $\Lambda^l T^*(U)$ обозначим расслоение внешних дифференциальных форм степени $l \geqslant 0$ на U, $l = 0,1,\ldots$, через $\mathscr{E}_0^s(U, \Lambda^l T^*(U))$ пространство C^s-сечений, $s \geqslant 0$, этого расслоения с компактными носителями, содержащимися в U. Рассмотрим непрерывную на U q-форму ω, $q = 0,1,\ldots$ Непрерывную $(q+1)$-форму $\Omega \in \mathscr{E}^0(U, \Lambda^{q+1} T^*(U))$ будем называть *обобщенным внешним дифференциалом формы* $\omega \in \mathscr{E}^0(U, \Lambda^q T^*(U))$, если для всякой формы $\psi \in \mathscr{E}_0^1(U, \Lambda^{n-q-1} T^*(U))$ справедливо равенство

$$\int_U \Omega \wedge \psi = (-1)^{q+1} \int_U \omega \wedge d\psi.$$

В этом определении можно потребовать, чтобы $\psi \in \mathscr{E}_0^s(U, \Lambda^{n-q-1} T^*(U))$ для каждого $s \geqslant 1$ [10].

Если $\omega \in \mathscr{E}^1(U, \Lambda^q T^*(U))$, то обобщенный внешний дифференциал $d\omega$ совпадает с обычным внешним дифференциалом. Кроме того, $d\omega$ (если он существует) определяется формой ω однозначно, имеет локальный характер, не зависит от локальных координат на U, и $dd\omega = 0$ [11].

Следующие два предложения касаются свойств обобщенного внешнего дифференциала [11].

Лемма 1. *Если форма $\omega \in \mathscr{E}^0(X, \Lambda^q T^*(X))$ имеет обобщенный внешний дифференциал $d\omega$, то для всякой формы $\varphi \in \mathscr{E}^1(X, \Lambda^p T^*(X))$, $p, q \geqslant 0$, справедливо равенство*

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^q \omega \wedge d\varphi. \tag{10}$$

Лемма 2. *Если многообразие X односвязно, то для всякой формы $\omega \in \mathscr{E}^r(X, T^*(X))$, $r \geqslant 0$, для которой $d\omega = 0$, найдется функция $f \in C^{r+1}(X, R)$, для которой $\omega = df$.*

3.2. Основной результат настоящей работы составляет

Теорема 2. *Для всякого погружения $z : X \to V_m$ класса C^2 формы связности, погружения и кручения обладают непрерывным обобщенным внешним дифференциалом.*

Для них справедливы уравнения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи (8), *если под знаком d понимать символ обобщенного внешнего дифференциала.*

$\lhd$ Пусть U — произвольное открытое множество на X с компактным замыканием, содержащимся в некоторой координатной окрестности, $\tau = \big(\tau^i\big)_{i=1}^n$ — локальный C^1-корепер с областью определения U из $\mathrm{SO}(n,\Delta)$-орбиты, порожденной метрикой $I(z)$, $\Phi = \big(\Phi_j^i\big)_{i,j=1}^n$ — связность корепера τ, $\xi = \big(\xi_i\big)_{i=1}^n$ — локальный репер, дуальный кореперу τ. Как и ранее, полагаем $e_i = \xi_i(z)$, при этом $e_i \in C^1(U,\Pi_{m+1})$, $de_i \in \mathscr{E}^0(U,T^*(U)\otimes\Pi_{m+1})$, $i=1,\dots,n$. В силу равенства (10), учитывая, что $dde_i = 0$ для всякой формы $\varphi \in \mathscr{E}_0^1(U,\Lambda^{n-2}T^*(U))$, получаем $d\big(de_i\wedge\varphi\big) = -de_i\wedge d\varphi$. Следовательно,

$$\int\limits_U de_i\wedge d\varphi = 0.$$

Подставим de_i из формул Гаусса (8):

$$\int\limits_U \left(\Phi_i^k e_k + \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma\omega_i^\sigma\nu_\sigma - K\tau^i\Delta^i z\right)\wedge d\varphi = 0,\quad i,k=1,\dots,n.$$

Внесем e_k, ν_σ, z под знак d, по лемме 1 имеем

$$\int\limits_U \Bigg[\Phi_i^k\wedge d(e_k\varphi) + \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma\omega_i^\sigma\wedge d(\nu_\sigma\varphi) - K\Delta^i\tau^i\wedge d(z\varphi)$$
$$-\Phi_i^k\wedge de_k\wedge\varphi - \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma\omega_i^\sigma\wedge d\nu_\sigma\wedge\varphi + K\Delta^i\tau^i\wedge dz\wedge\varphi\Bigg] = 0.$$

Пользуясь формулами Гаусса и Вейнгартена (8), последнее равенство запишем в виде

$$\int\limits_U \Bigg[\Phi_i^k\wedge d(e_k\varphi) + \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma\omega_i^\sigma\wedge d(\nu_\sigma\varphi) - K\Delta^i\tau^i\wedge d(z\varphi)$$
$$-\left(\Phi_i^k\wedge\Phi_k^j - \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma\Delta^j\omega_i^\sigma\wedge\omega_j^\sigma - K\Delta^i\tau^i\wedge\tau^j\right)\wedge(e_j\varphi) \tag{11}$$
$$-\left(\Phi_i^k\wedge\Delta^\sigma\omega_k^\sigma + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau\omega_i^\tau\wedge\Delta^\sigma\varkappa_\tau^\sigma\right)\wedge(\nu_\sigma\varphi) + \Phi_i^k\wedge K\Delta^k\tau^k\wedge(z\varphi)\Bigg] = 0.$$

Пусть $e_i = e_i^\alpha a_\alpha$, $\nu = \nu_\sigma^\alpha a_\alpha$, $z = z^\alpha a_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,m+1$, $i=1,\dots,n$, $\sigma=1,\dots,p$, где $\big(O;a_\alpha\big)_{\alpha=1}^{m+1}$ — ортонормированная система координат в Π_{m+1}, задающая сигнатуру Δ'. Положим в равенстве (11) $\varphi = e_i^\alpha\psi$, где $\psi\in\mathscr{E}_0^1(U,\Lambda^{n-2}T^*(U))$ — произвольная форма, затем умножим его скалярно на a_α. После суммирования по α, $\alpha=1,\dots,m+1$, получим

$$\int\limits_U \Delta^j\Phi_i^j\wedge d\psi = \int\limits_U \left(\Delta^j\Phi_i^k\wedge\Phi_k^j - \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma\omega_i^\sigma\wedge\omega_j^\sigma - K\Delta^i\Delta^j\tau^i\wedge\tau^j\right)\wedge\psi. \tag{12}$$

Положим в равенстве (11) $\varphi = \nu_\sigma^\alpha\psi$, где $\psi\in\mathscr{E}_0^1(U,\Lambda^{n-2}T^*(U))$ — произвольная форма. После умножения на a_α и суммирования по α, получим

$$\int\limits_U \omega_i^\tau\wedge d\psi = \int\limits_U \left(\Phi_i^k\wedge\omega_k^\tau + \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma\omega_i^\sigma\wedge\varkappa_\sigma^\tau\right)\wedge\psi. \tag{13}$$

Поскольку равенства (12) и (13) справедливы для всякой формы $\psi \in \mathscr{E}_0^1(U, \Lambda^{n-2}T^*(U))$, то в силу определения обобщенного дифференциала получаем, что формы Φ_j^i и ω_i^σ, $i, j = 1, \ldots, n$, $\sigma = 1, \ldots, p$, обладают обобщенными внешними дифференциалами, совпадающими с правыми частями соответствующих уравнений (8) на U.

Рассмотрим тождество $d(d\nu_\sigma \wedge \varphi) = -d\nu_\sigma \wedge d\varphi$, $\sigma = 1, \ldots, p$. Из этого тождества следует, что

$$\int\limits_U d\nu_\sigma \wedge d\varphi = 0.$$

Подставляя выражение $d\nu_\sigma$ из формул Вейнгартена (8), будем иметь

$$\int\limits_U \left(-\sum_{i=1}^n \Delta^i \omega_i^\sigma e_i + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varkappa_\sigma^\tau \nu_\tau \right) \wedge d\varphi = 0,$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad \tau, \sigma = 1, \ldots, p.$$

Используя формулу (10), находим

$$\int\limits_U \left[-\sum_{i=1}^n \Delta^i \omega_i^\sigma e_i \wedge d\varphi + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varkappa_\sigma^\tau \nu_\tau \wedge d\varphi \right] = \int\limits_U \left[-\sum_{i=1}^n \Delta^i \omega_i^\sigma \wedge d(e_i\varphi) \right.$$

$$\left. + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varkappa_\sigma^\tau \wedge d(\nu_\tau \varphi) + \sum_{i=1}^n \Delta^i \omega_i^\sigma \wedge de_i \wedge \varphi - \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varkappa_\sigma^\tau \wedge d\nu_\tau \wedge \varphi \right] = 0.$$

В силу формул (8) имеем

$$\int\limits_U \left[-\sum_{i=1}^n \Delta^i \omega_i^\sigma \wedge d(e_i\varphi) + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varkappa_\sigma^\tau \wedge d(\nu_\tau\varphi) \right.$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^n \Delta^i \omega_i^\sigma \wedge \Phi_i^j + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varkappa_\sigma^\tau \wedge \Delta^j \omega_j^\tau \right) \wedge (e_j\varphi)$$

$$\left. + \left(\sum_{i=1}^n \Delta^i \omega_i^\sigma \wedge \Delta^\tau \omega_i^\tau - \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \varkappa_\sigma^\rho \wedge \Delta^\tau \varkappa_\rho^\tau \right) \wedge (\nu_\tau\varphi) + \sum_{i=1}^n \omega_i^\sigma \wedge K \Delta^i \tau^i \wedge (z\varphi) \right] = 0.$$

Полагая здесь $\varphi = \nu_\rho^\alpha \psi$, умножая на a_α и суммируя по α, получаем

$$\int\limits_U \varkappa_\sigma^\rho \wedge d\psi = \int\limits_U \left(\sum_{i=1}^n \Delta^i \omega_i^\rho \wedge \omega_i^\sigma + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varkappa_\sigma^\tau \wedge \varkappa_\tau^\rho \right) \wedge \psi.$$

Из этого равенства и из определения обобщенного внешнего дифференциала следует, что формы $\varkappa_\sigma^\rho$, $\sigma, \rho = 1, \ldots, p$, обладают обобщенным внешним дифференциалом d. Этот дифференциал совпадает с правой частью третьего равенства Риччи из (9). Непрерывность левых частей в (9) следует из непрерывности правых частей равенств. $\triangleright$

Литература

1. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия.—М.: ГИИЛ, 1948.—316 с.
2. *Климентов С. Б.* Глобальная формулировка основной теоремы теории n-мерных поверхностей в m-мерном пространстве постоянной кривизны // Укр. геом. сб.—1979.—№ 22.—С. 64–81.

3. *Боровский Ю. Е.* Системы Пфаффа с коэффициентами из L_n и их геометрические приложения // Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 24, № 2.—С. 10–16.
4. *Марков П. Е.* Общие аналитические и бесконечно малые деформации погружений. I // Изв. вузов. Сер. Математика.—1997.—№ 9 (424)—С. 21–34.
5. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения.— М.: Мир, 1975.—352 с.
6. *Постников М. М.* Группы и алгебры Ли: уч. пособие.—М.: Наука, 1982.—480 с.
7. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны.—М.: Наука, 1982.—480 с.
8. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.—М.–Л.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1948.—432 с.
9. *Де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия.—М.: ГИИЛ, 1956.—250 с.
10. *Боровский Ю. Е.* Вполне интегрируемые системы Пфаффа // Изв. вузов. Сер. Математика.—1959.—№ 3.—С. 35–38.
11. *Марков П. Е.* О погружении метрик, близких к погружаемым // Укр. геом. сб.—1992.—№ 35.—С. 49–67.

Статья поступила 1 августа 2016 г.

Шаповалова Лариса Николаевна
ФГБУ «Северо-Кавказская государственная
зональная машиноиспытательная станция»,
математик
РОССИЯ, 347740, г. Зерноград, ул. Ленина, 32
E-mail: `mpe@mail.ru`

GAUSS, PETERSON–CODAZZI, AND RICCI EQUATIONS IN NONHOLONOMIC FRAMES

Shapovalova L. N.

The isometric immersion of the n-dimensional pseudo-Riemannian manifold to an m-dimensional pseudo-Riemannian space of the constant curvature is under consideration. The manifold is assumed to be Hausdorff and orientable. Using the non-holonomic frames the author derived Gauss, Peterson–Codazzi, Ricci equations for C^2 immersion of this manifold into m-dimensional pseudo-Riemannian space of constant curvature. The main result is obtained with the use of generalized external de Rham derivation. It is found that in this context the forms of connectivity, immersion and torsion have continuous generalized exterior derivations.

Keywords: submanifold, immersion, nonholonomic frame, Gauss equation, Peterson–Codazzi equation, Ricci equation.