Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 31–40

УДК **517.955**

К ВОПРОСУ О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ

Р. Ч. Кулаев

Посвящается 80-летию
Алексея Борисовича Шабата

Работа посвящена вопросам неосцилляции дифференциальных уравнений четвертого порядка на геометрическом графе. Для таких уравнений вводится понятие критической неосцилляции, которое является обобщением точного промежутка неосцилляции в классической теории. Понятие неосцилляции дается в терминах свойств специальной фундаментальной системы решений уравнения на графе, что вносит новые черты в теорию, но тем не менее оставляет неизменными основные свойства одномерной теории.

Ключевые слова: граф, дифференциальное уравнение на графе, неосцилляция, функция Грина, осцилляционность.

Данная статья является продолжением работ [1–4], в которых развивалась теория неосцилляции дифференциальных уравнений, заданных на геометрическом графе. Неосцилляция дифференциального уравнения занимает одно из центральных мест в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Основное значение это свойство приобретает в контексте исследования осцилляционных свойств спектра краевых задач, и в первую очередь — положительности функции Грина краевых задач [5–10].

В представленной работе изучается свойство неосцилляции уравнений четвертого порядка на графе, которые возникают при описании деформаций упругих стержневых систем. В [1–4] была установлена связь неосцилляции с положительностью функции Грина некоторых классов краевых задач четвертого порядка на графе. Основой развития теории в указанных работах является критерий положительности функции Грина краевых задач 4-го порядка на графах (см. [11]), согласно которому положительность функции Грина эквивалентна положительной разрешимости специфических краевых задач. Этот результат позволил в качестве отправной точки при изучении неосцилляции уравнения на графе брать свойство положительности системы решений уравнения на графе, удовлетворяющих на границе графа специальным краевым условиям (см. [1–4]). При таком подходе проявляется специфика уравнений 4-го порядка на графах и возникают два типа неосцилляции — слабая и сильная. Для классического случая, когда внутренние вершины графа отсутствуют, эти понятия не различимы, а в случае, когда множество внутренних вершин графа не пусто, они разнятся. Как оказалось, слабая неосцилляция обеспечивает положительность функции Грина для класса задач Дирихле [2, 3], а сильная неосцилляция — положительность функции Грина для более широкого класса краевых задач [4].

В статье [1, § 4] отмечалось, что отличительной особенностью свойства неосцилляции уравнения четвертого порядка на графе является то, что из неосцилляции (слабой или сильной) уравнения на графе, вообще говоря, не следует его неосцилляция на любом подграфе (хотя такой вариант не исключен [12]). В данной работе будет показано, что эта особенность характерна именно для уравнений, заданных на графе, негомеоморфном интервалу. Если же граф состоит из последовательно соединенных в цепь ребер, то, как будет показано ниже, из неосцилляции уравнения на графе-цепочке следует его неосцилляция и на любом подграфе. Это означает, что предложенный в цитированных выше работах подход привносит новые черты в теорию, но тем не менее оставляет неизменными основные свойства одномерной теории (неосцилляция согласована со свойствами функции Грина; неосцилляция на интервале гарантирует неосцилляцию на подынтервале).

Свойство критической неосцилляции впервые было введено Ю. В. Покорным при исследовании положительности функции Грина и осцилляционных свойств спектра некоторых классов краевых задач для уравнения второго порядка на графе (см. [9, § 4.5], [13, § 2.5]). Оно обобщает понятие точного промежутка неосцилляции в классической теории (см. [5, 7]). Как будет показано ниже, критичность неосцилляции уравнения четвертого порядка на графе-цепочке заключается в том, что уравнение, будучи слабо неосциллирующим, теряет это свойство при «расширении» графа, но сохраняет его при «сужении». Учитывая связь неосцилляции со знаковыми свойствами функций Грина некоторых краевых задач (см. [1, 2]), можно сказать, что свойство критической неосцилляции вычленяет грань между возможностью и невозможностью для функции Грина хоть какой-то краевой задачи быть положительной, причем в наилучшем положении оказывается задача Дирихле.

1. Основные понятия и постановка задачи

Имеется несколько различных подходов к изучению краевых задач на графах. Наиболее типичными из них являются векторный и синтетический подходы.

При векторном подходе каждое ребро графа параметризуется отрезком фиксированной длины, а решения нумеруются в соответствии с какой-либо предварительной нумерацией ребер. Векторный подход используется в конструкциях, опирающихся на абстрактные функционально-аналитические результаты: порождающий задачу оператор (с регулярными или сингулярными коэффициентами) оказывается заданным либо в прямом произведении пространств, каждое из которых соответствует своему ребру, либо в пространстве вектор-функций (см., например, [14–16]).

В данной работе мы придерживаемся синтетического взгляда, при котором граф рассматривается как цельный геометрический объект. Более того, как единое целое рассматривается вся система дифференциальных соотношений — обыкновенные дифференциальные уравнения на ребрах плюс условия согласования во внутренних вершинах. Под геометрическим графом Γ в настоящей работе понимается ограниченное связное множество, имеющее структуру сети и вложенное в $\mathbb{R}^2$. Ребро графа — это интервал в $\mathbb{R}^2$, а вершина графа — точка, являющаяся концом одного или нескольких ребер. При этом ребра графа занумерованы и обозначаются через γ_i, а вершины — через a, b, c и т. д.

Обозначим через $J(\Gamma)$ множество вершин графа, которые являются концевыми точками двух и более ребер. Такие вершины мы называем *внутренними*. Вершины графа, не принадлежащие $J(\Gamma)$, будем называть *граничными* и обозначать их множество через $\partial\Gamma$. Мы считаем, что граф Γ — это объединение конечного множества всех его ребер и множества всех внутренних вершин. При этом граничные вершины в граф не входят. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_i, то будем говорить, что ребро γ_i примыкает к вершине a. Ребро, примыкающее к граничной вершине $a \in \partial\Gamma$, нам будет удобнее обозначать γ_a. Множество индексов всех ребер, примыкающих к вершине a, обозначим через $I(a)$. Множество, получаемое удалением из графа всех его вершин, обозначим через $\overset{\circ}{\Gamma}$. Подграфом графа Γ назовем любой граф Γ_0 такой, что $\Gamma_0 \subset \Gamma$.

Под функцией на графе понимается отображение $u : \overset{\circ}{\Gamma} \to \mathbb{R}$. Через $u_i(x)$ будем обозначать сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i. Через $C[\Gamma]$ будем обозначать пространство функций, равномерно непрерывных на каждом ребре графа Γ. Для таких функций в каждой вершине a графа при $i \in I(a)$ существует предел $\lim_{\gamma_i \ni x \to a} u_i(x)$, который мы обозначаем через $u_i(a)$. При этом для вершины $a \in J(\Gamma)$ и $k, i \in I(a)$ величины $u_k(a)$ и $u_i(a)$ не обязаны совпадать. Выделим в пространстве $C[\Gamma]$ подпространство функций, для которых $u_k(a) = u_i(a)$ при любой $a \in J(\Gamma)$ и любых $k, i \in I(a)$. Множество всех таких функций обозначим через $C(\Gamma)$ и назовем их *непрерывными* на графе. Такое определение вполне естественно, так как мы можем доопределить такие функции по непрерывности на весь граф и положить $u(a) = u_i(a)$, $i \in I(a)$.

Определим понятие производной функции, заданной на графе. Для этого введем в рассмотрение функцию $\mu(x) \in C[\Gamma]$, взаимно однозначно отображающую каждое ребро $\gamma_i \subset \Gamma$ на некоторый интервал $(0, l_i)$ при $l_i > 0$. Функция $\mu(x)$ определяет на каждом ребре графа ориентацию. Для произвольной точки $s \in \overline{\gamma}_i$ полагаем

$$\mathscr{O}_\varepsilon^+(s) = \{x \in \gamma_i : 0 < \mu_i(x) - \mu_i(s) < \varepsilon\},$$
$$\mathscr{O}_\varepsilon^-(s) = \{x \in \gamma_i : 0 < \mu_i(s) - \mu_i(x) < \varepsilon\}.$$

Если функция $u(x) \in C[\Gamma]$ имеет конечное число нулей на ребре γ_i, то через $\sigma u_i(s \pm 0)$ обозначим знак функции $u_i(x)$ вблизи точки $s \in \overline{\gamma}_i$ (в концевых точках ребра имеет смысл только одна из этих величин).

Функцию $u(x) \in C[\Gamma]$ назовем *дифференцируемой на графе* Γ, если она дифференцируема относительно $\mu(x)$ на каждом ребре графа. При этом полагаем

$$u_i'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta u_i(x_0)}{\Delta \mu_i(x_0)}, \quad x, x_0 \in \gamma_i.$$

Аналогично определяются производные высших порядков. Обозначим через $C^n[\Gamma]$ пространство функций из $C[\Gamma]$, производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат $C[\Gamma]$.

Под дифференциальным уравнением на графе подразумеваем, следуя [9], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа и набор условий согласования во внутренних вершинах. Его можно записать в общем виде

$$Lu = F(x), \quad x \in \Gamma. \tag{1}$$

В данной работе рассматривается уравнение, порождаемое совокупностью дифференциальных уравнений на ребрах графа:

$$\big(p_i(x)u_i''\big)'' - \big(q_i(x)u_i'\big)' = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \subset \overset{\circ}{\Gamma}, \tag{2}$$

с коэффициентами, определяемыми функциями

$$p(x) \in C^2[\Gamma],\ \inf_{x \in \overset{\circ}{\Gamma}} p(x) > 0, \quad q(x) \in C^1[\Gamma],\ q(x) \geqslant 0 \text{ на } \Gamma, \quad f(x) \in C[\Gamma],$$

дополняемой в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ равенствами

$$\begin{gathered} u_i(a) = u_k(a), \quad u_i'(a) = \alpha_{ki}(a)u_k'(a) + \alpha_{ji}(a)u_j'(a), \\ p_k(a)u_k''(a) + \sum_{i\in I(a)\setminus\{k,j\}} \alpha_{ki}(a)p_i(a)u_i''(a) = 0, \\ p_j(a)u_j''(a) + \sum_{i\in I(a)\setminus\{k,j\}} \alpha_{ji}(a)p_i(a)u_i''(a) = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

и условиями с третьими производными

$$\sum_{i\in I(a)} D^3u_i(a) + \delta(a)u(a) = f(a), \quad a \in J(\Gamma). \tag{4}$$

При этом считается, что в условиях (3), (4) все производные вычисляются в направлении от вершины $a \in J(\Gamma)$; k, j — фиксированные (базисные) индексы из $I(a)$, $i \in I(a)$; $\alpha_{ki}(a)$, $\alpha_{ji}(a)$ и $\delta(a)$, $f(a)$ — заданные числа, причем $\delta(a) \geqslant 0$, а в (4) через D^3u обозначена третья квазипроизводная $(p(x)u'')' - q(x)u'$. Кроме того, если к внутренней вершине a примыкает всего два ребра γ_i и γ_k, то полагается, что все величины и соотношения, связанные с индексом j в системе условий (3), (4), отсутствуют. Левая часть Lu уравнения (1) — это левые части уравнений (2) на ребрах вместе с равенствами (3) и левыми частями условий (4) на $J(\Gamma)$, а правая часть F слагается из правых частей (2) и (4).

Решением дифференциального уравнения (1) называется всякая функция $u(x) \in C^4(\Gamma) \cap C(\Gamma)$, удовлетворяющая на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (2), а в каждой внутренней вершине — условиям (3), (4).

Уравнение (1) возникает при моделировании малых деформаций плоской механической системы, состоящей из тонких прямолинейных стержней и имеющей структуру сети [17].

При исследовании свойств решений уравнения (1) предполагается, что выполнены следующие условия:

– граф Γ является деревом;

– для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ и каждого индекса $i \in I(a)$ хотя бы одна из констант $\alpha_{ji}(a)$, $\alpha_{ki}(a)$ отлична от нуля;

– для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ можно задать базисные индексы $j, k \in I(a)$ так, что для некоторого индекса $i \in I(a) \setminus \{j, k\}$ одновременно будут выполняться неравенства $\alpha_{ji}(a) \leqslant 0$, $\alpha_{ki}(a) \leqslant 0$, причем хотя бы одно неравенство строгое.

Учитывая результаты работ [17, 18], предположения гарантируют невырожденность краевой задачи для уравнения (1) (на графе Γ или на любом его подграфе $\Gamma_0 \subset \Gamma$) с краевыми условиями вида

$$\begin{gathered} u(a) + \alpha(a)D^3u(a) = A_a, \quad \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = B_a, \quad a \in \partial\Gamma \ (a \in \partial\Gamma_0), \\ \alpha(a), \vartheta(a), \beta(a) \geqslant 0, \quad \vartheta(a) + \beta(a) > 0, \quad A_a, B_a \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь и всюду ниже полагается, что каждое граничное ребро графа Γ (подграфа Γ_0) ориентировано от соответствующей граничной вершины внутрь графа.

Вид условий (5) обоснован физическим смыслом краевой задачи (1), (5) — они охватывают все возможные случаи закрепления концов стержневой системы.

2. Некоторые свойства решений однородного уравнения на графе

В данном пункте изучается зависимость свойства знакопостоянства некоторых решений краевых задач Дирихле (1), (5) (случай $\alpha(\cdot) \equiv 0$) от граничных данных. Точнее, будет изучен вопрос о том, как ведет себя решение задачи Дирихле на графе, когда непрерывно меняется одна из граничных вершин графа.

Рассмотрим произвольную точку $s \in \Gamma \cup \partial\Gamma$. Точка s разбивает граф Γ на конечное множество непересекающихся ветвей графа Γ. Если s является внутренней точкой некоторого ребра, то таких ветвей будет две. Если же s — вершина графа, то количество ветвей равно количеству ребер, примыкающих к этой вершине. При этом каждая граничная вершина $b \in \partial\Gamma \setminus s$ принадлежит границе только одной из этих ветвей, которую мы будем обозначать через $\Gamma_b(s)$.

Пусть a и b — пара различных граничных вершин графа Γ. Для каждого $s \in \gamma_a \cup a$ введем в рассмотрение краевую задачу

$$\begin{gathered} Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \\ u(s) = 0, \quad \vartheta(a)u'(s) - \beta(a)u''(s) = 0, \\ u(b) = A_b, \quad \vartheta(b)u'(b) - \beta(b)u''(b) = B_b, \\ u(c) = 0, \quad \vartheta(c)u'(c) - \beta(c)u''(c) = 0, \quad c \in \partial\Gamma \setminus \{a, b\}, \end{gathered} \tag{6}$$

где коэффициенты краевых условий удовлетворяют условиям $\vartheta, \beta : \partial\Gamma \to \mathbb{R}_+$, $\vartheta(\cdot) + \beta(\cdot) > 0$ и $A_b B_b = 0$, $A_b + B_b = 1$. Заметим, что эти коэффициенты не зависят от s. Напомним также, что граничные ребра ориентированы от соответствующих граничных вершин.

Так как краевая задача (1), (5) невырождена, то задача (6) имеет единственное решение, которое будем обозначать через $v_s(x)$. Понятно, что зависимость $v_s(x)$ от $s \in \gamma_a \cup a$ непрерывна в норме $C^3[\Gamma]$. Это свойство, так же как и следующий результат работы [18], регулярно будут привлекаться в дальнейших выкладках.

Лемма 1 [18]**.** *Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение однородного уравнения*

$$\big(p(x)u''\big)'' - \big(q(x)u'\big)' = 0, \quad x \in (\zeta, \eta) \subset \mathbb{R},$$

$$p(x) \in C^2[\zeta, \eta], \quad \inf_{x \in [\zeta, \eta]} p(x) > 0, \quad q(x) \in C^1[\zeta, \eta], \quad q(x) \geqslant 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(\zeta) = \vartheta(\zeta)u'(\zeta) - \beta(\zeta)u''(\zeta) = 0, \quad \beta(\zeta), \vartheta(\zeta) \geqslant 0, \quad \beta(\zeta) + \vartheta(\zeta) \neq 0.$$

Тогда на промежутке $(\zeta, \eta]$ функция $u(x)$ имеет не более одного простого нуля. Если при этом в некоторой точке $\xi \in (\zeta, \eta]$ выполнено равенство $u(\xi) = 0$, то $u'(\xi)u''(\xi) > 0$.

Лемма 2. *Пусть $\xi \in \gamma_a$ и $v'_\xi(\xi) = v''_\xi(\xi) = 0$, $D^3 v_\xi(\xi) > 0$. Тогда для всех $s \in (a, \xi) \subset \gamma_a$ будет выполнено неравенство $v_s(\xi) < 0$.*

$\lhd$ Шаг 1. Для произвольного решения $u(x)$ однородного уравнения (1) определим на каждом граничном ребре графа Γ функцию $\mathscr{F}_u(x)$ по правилу: $\mathscr{F}_u(x) = \big(pu''u' - D^3u \cdot u\big)(x)$, где дифференцирование согласовано с заданной ориентацией ребер. Тогда при любом $x \in \gamma_a$ интегрированием по частям с последующим привлечением (4) получим

$$\int\limits_{\Gamma_b(x)} Lu \cdot u \, dt = \mathscr{F}_u(x) + \sum_{c \in \partial\Gamma \setminus a} \mathscr{F}_u(c) + \sum_{c \in J(\Gamma)} \delta(c)u^2(c) + \int\limits_{\Gamma_b(x)} p \cdot (u'')^2 + q \cdot (u')^2 \, dt.$$

Учитывая, что левая часть равенства равна нулю, его можно представить в виде

$$\int\limits_{\Gamma_b(x)} p\cdot(u'')^2 + q\cdot(u')^2\,dt + C(u) = -\mathscr{F}_u(x), \tag{7}$$

где константа $C(u)=\sum_{c\in\partial\Gamma\setminus a}\mathscr{F}_u(c)+\sum_{c\in J(\Gamma)}\delta(c)u^2(c)$ не зависит от x.

Из равенства (7) следует, что функция $\mathscr{F}_u(x)$ монотонно возрастает на ребре γ_a (напомним, что ребро ориентировано от граничной вершины a).

Шаг 2. Покажем справедливость утверждения леммы в случае $\beta(a)=0$. Пусть $s\in(a,\xi)\subset\gamma_a$ и $u(x)=v_\xi(x)-v_s(x)$. Из определения функций $v_\xi(x)$ и $v_s(x)$ следует, что для всех $c\in\partial\Gamma\setminus a$ будет выполнено неравенство $\mathscr{F}_u(c)=p(c)u''(c)u'(c)\geqslant 0$, а стало быть $C(u)\geqslant 0$. Поэтому из (7) следует $\mathscr{F}_u(\xi)<0$. Последнее неравенство эквивалентно

$$p(\xi)\big(v''_\xi(\xi)-v''_s(\xi)\big)\big(v'_\xi(\xi)-v'_s(\xi)\big)-\big(D^3v_\xi(\xi)-D^3v_s(\xi)\big)\big(v_\xi(\xi)-v_s(\xi)\big)<0$$

или, с учетом условий леммы,

$$\mathscr{F}_{v_s}(\xi)+D^3v_\xi(\xi)v_s(\xi)<0. \tag{8}$$

Так как $\mathscr{F}_{v_s}(x)$ монотонно возрастает и $\mathscr{F}_{v_s}(s)=0$ (поскольку $v_s(s)=v'_s(s)=0$), то $\mathscr{F}_{v_s}(\xi)\geqslant 0$ при любом $s\in(a,\xi)\subset\gamma_a$. Отсюда и из (8) получаем нужное неравенство $v_s(\xi)<0$.

Шаг 3. Случай $\beta(a)>0$. Здесь неравенство $v_s(\xi)<0$ следует из уже рассмотренного на шаге 2 и непрерывной зависимости решений задачи (6) от значений коэффициентов краевых условий. Действительно, если предположить, что при некотором $\beta(a)=\beta_0>0$ лемма неверна, то найдется такое значение $\beta(a)\in(0,\beta_0]$, что соответствующее решение $v_s(\xi)=0$, $s\in(a,\xi)\subset\gamma_a$, задачи (6) будет равно нулю в точке ξ. В этом случае из леммы 1 следует строгое неравенство $v'_s(\xi)v''_s(\xi)>0$, несовместимое с равенствами $v'_\xi(\xi)=v''_\xi(\xi)=0$ ввиду [1, лемма 3]. $\rhd$

Следствие 1. *Пусть $\xi\in\gamma_a$ и $v'_\xi(\xi)=v''_\xi(\xi)=0$, $\sigma v_\xi(\xi+0)>0$. Тогда при некотором $\varepsilon>0$ для всех $s\in\mathscr{O}^-_\varepsilon(\xi)$ выполнено неравенство $\sigma v_s(s+0)<0$, а для всех $s\in\mathscr{O}^+_\varepsilon(\xi)$ выполнено неравенство $\sigma v_s(s+0)>0$.*

$\lhd$ В [1, лемма 2] показано, что в условиях следствия для всех $x>\xi$ ($x\in\gamma_a$) выполнено неравенство $v_\xi(x)>0$. Поэтому из непрерывной зависимости решения $v_s(x)$ от s и леммы 2 следует существование $\varepsilon>0$ такого, что при $s\in\mathscr{O}^-_\varepsilon(\xi)$ соответствующее решение $v_s(x)$ задачи (6) будет иметь на ребре γ_a нуль $\eta_s>\xi$. Причем других нулей на интервале $(s,\eta_s)\subset\gamma_a$ функция $v_s(x)$ не имеет и $v'_s(\eta_s)v''_s(\eta_s)>0$ (лемма 1). Отсюда сразу следует справедливость первой части доказываемого утверждения: при $s\in\mathscr{O}^-_\varepsilon(\xi)$ имеет место неравенство $\sigma v_s(s+0)<0$. Кроме того, при $s\in\mathscr{O}^-_\varepsilon(\xi)$ выполнено неравенство $\sigma v_s(\eta_s+0)>0$. Поэтому если в задаче (6) $\vartheta(a)=v''_s(\eta_s)$ и $\beta(a)=v'_s(\eta_s)$, то функции $v_s(x)$ и $v_{\eta_s}(x)$ совпадают, и стало быть в этом случае $\sigma v_{\eta_s}(\eta_s+0)>0$. В [1, лемма 5] показано, что неравенство $\sigma v_{\eta_s}(\eta_s+0)>0$ не зависит от значений коэффициентов $\vartheta(a),\beta(a)\geqslant 0$ краевого условия задачи (6). Поэтому при всех $s\in\mathscr{O}^-_\varepsilon(\xi)$ будет выполнено неравенство $\sigma v_{\eta_s}(\eta_s+0)>0$.

Теперь вторая часть доказываемого утверждения следует из непрерывности отображения $s\mapsto\eta_s$ и предельного соотношения $\eta_s\to\xi+0$ при $s\to\xi-0$. $\rhd$

Для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ введем в рассмотрение краевую задачу Дирихле

$$\begin{gathered} Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \\ u(a) = 0, \quad \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = 1, \\ u(c) = 0, \quad \vartheta(c)u'(c) - \beta(c)u''(c) = 0, \quad c \in \partial\Gamma \setminus a, \end{gathered} \tag{9}$$

решение которой будем обозначать через $y_a(x)$. Через $w_a(x)$ мы будем обозначать решение краевой задачи, которая получится из (9), если правые части краевых условий в вершине $a \in \partial\Gamma$ поменять местами. Поскольку все эти задачи невырождены, то функции $y_a(x)$ и $w_a(x)$ определены однозначно.

Лемма 3. *Пусть функция $y_b(x)$, $b \in \partial\Gamma$, имеет в вершине $a \in \partial\Gamma$ нуль кратности три. Тогда функция $y_a(x)$ имеет нуль кратности три в вершине b.*

$\lhd$ Умножим функцию y_a на Ly_b и проинтегрируем по частям на Γ. Привлекая свойства функций $y_a(x)$ и $y_b(x)$ в вершинах графа, получим

$$0 = p(a)y_b''(a) - \sum_{c \in J(\Gamma)} y_a(c)\delta(c)y_b(c) - p(b)y_a''(b) + \sum_{c \in J(\Gamma)} y_a(c)\delta(c)y_b(c),$$

что вследствие условия $y_b''(a) = 0$ дает равенство $y_a''(b) = 0$. $\rhd$

Прежде чем ввести понятие критически неоциллирующего уравнения, напомним (см. [1]), что уравнение четвертого порядка $Lu = 0$ называется *слабо неосциллирующим* на Γ, если при $\beta(\cdot) \equiv 0$ каждая из функций $y_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительна на Γ, и называется *сильно неосциллирующим*, если для любой $a \in \partial\Gamma$ решение $w_a(x)$ положительно на Γ при $\vartheta(a) = 0$ и $\beta(\cdot) \equiv 0$ на $\partial\Gamma \setminus a$.

Знаковые свойства решений $y_a(x)$ и $w_a(x)$ краевой задачи (9) тесно переплетаются со знаковыми свойствами соответствующей функции Грина и зависят от значений коэффициентов краевых условий (в случае $J(\Gamma) = \varnothing$ такая зависимость отсутствует!). Слабая неосцилляция уравнения на графе обеспечивает положительность решений $y_a(x)$ вне зависимости от значений коэффициентов краевых условий, а значит и положительность функции Грина задачи Дирихле (см. [1] или [2]).

Определение 1. Будем говорить, что уравнение $Lu = 0$ *критически неосциллирует* на графе Γ, если для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ решение краевой задачи (9) с $\beta(\cdot) \equiv 0$ положительно на Γ и хотя бы одно из этих решений имеет на $\partial\Gamma$ нуль кратности три.

Отметим, что критически неосциллирующее уравнение является слабо неосциллирующим, но не может сильно неосциллировать. Это следует из результата работы [1]: если некоторое решение $y_a(x)$ (из фигурирующих в определении 1) положительно на Γ и имеет нуль кратности три в вершине $b \in \partial\Gamma$, то решение $w_b(x)$, фигурирующее в определении сильной неосцилляции, обязательно меняет знак.

В [1] отмечалось, что уравнение четвертого порядка с условиями шарнирного и упруго-шарнирного сочленения во внутренних вершинах, которое изучалось в работах [9, гл. 8; 19–21], всегда сильно неосциллирует. Поэтому для него критичность неосцилляции не возникает. Что же касается уравнения, рассматриваемого в данной работе, то, как показывает следствие 1, для него критичность неосцилляции заключается в том, что даже незначительное изменение области задания уравнения приводит к тому, что оно перестает быть неосциллирующим. Причем потеря свойства неосцилляции происходит не только при «расширении» графа, но и при его «уменьшении» (соответствующий пример приведен в [1, пример 1]). Такой эффект не наблюдается в классической теории неосцилляции (когда $J(\Gamma) = \varnothing$) и, как будет показано в следующем пункте, имеет место только для графа, имеющего внутреннюю вершину, к которой примыкает не менее трех ребер.

3. Случай графа-цепочки

Всюду в этом пункте считаем, что граф Γ состоит из последовательно соединенных ребер, $\partial\Gamma = \{a, b\}$, γ_a и γ_b — граничные ребра. Простая структура графа-цепочки позволяет доказать, что неосцилляция уравнения (1) на таком графе влечет неосцилляцию на любом подграфе.

Рассмотрим краевую задачу (6), но теперь будем считать, что $s \in \Gamma \cup a$. Решение задачи по-прежнему обозначаем через $v_s(x)$. В случае графа-цепочки из невырожденности задачи (1), (5) следует, что функция $v_s(x)$ однозначно определяется для любого $s \in \Gamma \cup a$ и не имеет кратных нулей внутри $\Gamma_b(s)$. Кроме того, в рассматриваемом случае имеет место следующий факт, являющийся очевидным следствием теорем 4 и 5 работы [22].

Лемма 4. *Решение $v_s(x)$ задачи* (6), *непрерывное в норме $C[\Gamma]$, зависит от точки $s \in \Gamma \cup a$.*

Эти свойства задачи (6) вместе с результатами предыдущего пункта позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Если решение $v_a(x)$ положительно на Γ, то при любом $s \in \Gamma$ соответствующее решение $v_s(x)$ будет положительно на $\Gamma_b(s) \subset \Gamma$.*

$\lhd$ Из определения функции $v_s(x)$ следует, что $\sigma v_s(b+0) > 0$ при любом $s \in \Gamma \cup a$. А так как $v_a(x) > 0$ на $\Gamma_b(a)$ и $v_s(x)$ не имеет кратных нулей внутри $\Gamma_b(s)$ ($s \in \gamma_a$), то при непрерывном скольжении точки $s \in \gamma_a$ от граничной вершины a внутрь графа Γ функция $v_s(x)$ может «приобрести» нули в $\Gamma_b(s)$ только через переменную точку s. Причем потеря свойства положительности на $\Gamma_b(s)$ у решения $v_s(x)$ может произойти только при переходе переменной s через такую точку $s_0 \in \Gamma$, для которой соответствующее решение $v_{s_0}(x)$ имеет в точке s_0 нуль кратности три (т. е. когда уравнение (1) критически не осциллирует на $\Gamma_b(s_0)$). При этом из неравенства $v_a(x) > 0$ на $\Gamma_b(a)$ следует, что при всех значениях переменной $s \in \Gamma$, принадлежащих маршруту между точками a и s_0, должно выполняться неравенство $\sigma v_s(s+0) > 0$, что невозможно ввиду следствия 1. Следовательно, такой точки $s_0 \in \Gamma$ существовать не может и функция $v_s(x)$ остается положительной при любом $s \in \Gamma$. $\rhd$

Замечание. В случае графа, имеющего более двух граничных вершин, функция $v_s(x)$ может «приобрести» нули через какую-нибудь третью граничную вершину из $\partial\Gamma \setminus \{a, b\}$.

Из теоремы 1 сразу получаем

Следствие 2. *Если дифференциальное уравнение* (1) *слабо* (*сильно*) *не осциллирует на графе-цепи Γ, то оно слабо* (*сильно*) *не осциллирует и на любом его подграфе $\Gamma_0 \subset \Gamma$.*

Далее показывается, что слабая неосцилляция уравнения (1) является необходимым условием положительности функции Грина краевой задачи (1), (5).

Теорема 2. *Пусть Γ — граф-цепочка и дифференциальное уравнение* (1) *критически не осциллирует на подграфе $\Gamma_0 \subset \Gamma$ $(\Gamma_0 \neq \Gamma)$. Тогда функция Грина краевой задачи* (1), (5) *на графе Γ знакопеременна.*

$\lhd$ Рассмотрим решение $u_b(x)$ однородного уравнения (1) на Γ, удовлетворяющее в граничных точках краевым условиям

$$\begin{gathered} u(a)+\alpha(a)D^3u(a)=0, \quad \vartheta(a)u'(a)-\beta(a)u''(a)=0, \\ u(b)+\alpha(b)D^3u(b)=A_b, \quad \vartheta(b)u'(b)-\beta(b)u''(b)=B_b, \\ \alpha(\cdot),\vartheta(\cdot),\beta(\cdot)\geqslant 0, \quad \vartheta(\cdot)+\beta(\cdot)>0, \end{gathered} \tag{10}$$

правые части которых определяются в зависимости от значения коэффициента $\alpha(b)$ из (5): если $\alpha(b)=0$, то $A_b=0$, $B_b=1$, а если $\alpha(b)>0$, то $A_b=1$, $B_b=0$. В работе [11, теорема 8] показано, что положительность функции Грина краевой задачи (1), (5) эквивалентна положительности на Γ решения $u_b(x)$. Поэтому для доказательства теоремы нам достаточно показать, что функция $u_b(x)$ меняет знак на Γ.

Если в (10) будет $\alpha(a)=\alpha(b)=0$, то знакопеременность $u_b(x)$ следует из того, что уравнение (1) критически не осциллирует на подграфе Γ_0, и из следствий 1, 2. Кроме того, в [1, лемма 19] показано, что если в $\alpha(a)=\alpha(b)=0$ и функция $u_b(x)$ меняет знак на Γ, то она будет знакопеременной и в случае $\alpha(b)>0$, $\alpha(a)=0$.

Покажем, что $u_b(x)$ знакопеременная и в случае $\alpha(a)>0$. Рассмотрим отображение $\alpha(a)\mapsto u_b(a)$ из $[0,\infty)$ в $\mathbb{R}$. Оно непрерывно и либо постоянно, либо строго монотонно (см. [1, следствие 4]). Если функция $\alpha(a)\mapsto u_b(a)$ постоянна, то решение $u_b(x)$ от значений $\alpha(a)$ не зависит, а при $\alpha(a)=0$, как уже показано, меняет знак на Γ. Если функция $\alpha(a)\mapsto u_b(a)$ убывает, то при $\alpha(a)>0$ будет $u_b(a)<0$. При этом ввиду [1, лемма 9] выполнено $\sigma u_b(b+0)>0$, а стало быть, функция $u_b(x)$ меняет знак на Γ. Ну и, наконец, если отображение $\alpha(a)\mapsto u_b(a)$ возрастает, то знакопеременность решения $u_b(x)$ при $\alpha(a)>0$ следует из

(а) $\sigma u_b(b+0)>0$ и $u_b(a)>0$ при всех $\alpha(a)>0$;

(б) при $\alpha(a)=0$ функция $u_b(x)$ знакопеременна;

(в) отображение $\alpha(a)\mapsto u_b(x)$ непрерывно в норме $C[\Gamma]$;

(г) функция $u_b(x)$ не имеет кратных нулей внутри Γ [18, следствие 2]. $\rhd$

Литература

1. *Кулаев Р. Ч.* Неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе // Мат. сб.—2015.—Т. 206, № 12.—С. 79–118.
2. *Кулаев Р. Ч.* К вопросу о неосцилляции уравнения на графе // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 11.—С. 1563–1565.
3. *Кулаев Р. Ч.* Принцип сравнения для функции Грина краевой задачи четвертого порядка на графе // Уфим. мат. журн.—2015.—Т. 7, № 4.—С. 99–108.
4. *Кулаев Р. Ч.* О свойстве неосцилляции уравнения на графе // Сиб. мат. журн.—2016.—Т. 57, № 1.—С. 85–97.
5. *Левин А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+p_n(t)x=0$ // Успехи мат. наук.—1969.—Т. 24, № 2.—С. 43–96.
6. *Левин А. Ю., Степанов Г. Д.* Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. I, II // Сиб. мат. журн.—1976.—Т. 17, № 3.—С. 606–626; № 4.—С. 813–830.
7. *Дерр В. Я.* Неосцилляция решений дифференциальных уравнений // Вестн. Удмурд. ун-та.—2009.—Вып. 1.—С. 46–89.
8. *Тептин А. Л.* К вопросу об осцилляционности спектра многоточечной краевой задачи // Изв. вузов. Математика.—1999.—№ 4 (443).—С. 44–53.
9. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2007.—272 с.
10. *Покорный Ю. В.* О неосцилляции обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств на пространственных сетях // Диф. уравнения.—2001.—Т. 37, № 5.—С. 661–672.
11. *Кулаев Р. Ч.* Необходимое и достаточное условия положительности функции Грина для уравнения четвертого порядка на графе // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 3.—С. 302–316.

12. *Кулаев Р. Ч.* О знаке функции Грина краевой задачи на графе для уравнения четвертого порядка // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, № 4.—С. 19–29.
13. *Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах.—М.: Физматлит, 2009.—192 с.
14. *Владимиров А. А.* Замечания о минорантах лапласиана на геометрическом графе // Мат. заметки.—2015.—Т. 98, № 3.—С. 467–469.
15. *Xu G. Q., Mastorakis N. E.* Differential Equations on Metric Graph.—Wseas Press, 2010.—232 p.
16. *Leugering G., Leugering E., Zuazua E.* On exact controllability of generic trees // ESAIM: Proceedings.—2000.—Vol. 8.—P. 95–105.
17. *Кулаев Р. Ч.* О разрешимости краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 1.—С. 27–34.
18. *Кулаев Р. Ч.* Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 2.—С. 161–173.
19. *Borovskikh A. V., Lazarev K. P.* Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. Math. Sci.—2004.—Vol. 119, № 6.—P. 719–738.
20. *Боровских А. В., Мустафокулов Р. О., Лазарев К. П., Покорный Ю. В.* Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети // Докл. РАН.—1995.—Т. 345, № 6.—С. 730–732.
21. *Покорный Ю. В., Мустафокулов Р.* О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвертого порядка на графе // Изв. вузов. Математика.—1999.—Т. 441, № 2.—С. 75–82.
22. *Кулаев Р. Ч.* К вопросу об осцилляционности функции Грина разрывной краевой задачи // Мат. заметки.—2016.—Т. 100, № 3.—С. 375–388.

Статья поступила 10 июля 2017 г.

Кулаев Руслан Черменович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела мат. моделирования
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Северо–Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова
профессор кафедры мат. анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: `kulaev@smath.ru`

ON THE DISCONJUGACY OF A DIFFERENTIAL EQUATION ON A GRAPH

Kulaev R. Ch.

The paper is devoted to the problems of disconjugacy of fourth-order differential equations on a graph. We introduce the concept of critical disconjugacy. Critical disconjugacy allows us to generalize the notion of exact interval of disconjugacy in the classical theory. We give the definition of disconjugacy in terms of the properties of a special fundamental system of solutions of an equation on a graph. This definition introduces new features into the theory, but it preserves the basic properties of the one-dimensional theory.

Key words: differential equation on a graph, disconjugacy, boundary value problem, Green's function.