Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 59–69

УДК **517.958, 517.986.7**

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Х. Г. Умаров

Посвящается А. Б. Шабату в связи с его юбилеем

Для названного в заголовке статьи дифференциального уравнения исследована разрешимость задачи Коши в пространстве непрерывных функций на всей числовой оси сведением к абстрактной задаче Коши в банаховом пространстве. Найден явный вид решения соответствующего линейного уравнения. Установлен временной отрезок существования классического решения задачи Коши для нелинейного уравнения и получена оценка нормы этого локального решения. Рассмотрены условия существования глобального решения и разрушения решения на конечном отрезке.

Ключевые слова: изгибные колебания стержня, уравнение Клейна — Гордона, сильно-непрерывные полугруппы операторов.

1. Введение

В области $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1_+$, $\mathbb{R}^1 =]-\infty,+\infty[$, $\mathbb{R}^1_+ =]0,+\infty[$, рассмотрим уравнение, описывающее изгибные волны в нелинейно-упругом стержне[1] (см. [1, с. 55], [2, с. 189], обзор и подробную библиографию, приведенные в монографии [2]):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^3, \tag{1}$$

где заданные числа $\alpha \in \mathbb{R}^1_+$, $\beta \in \mathbb{R}^1$.

Полагаем, что φ, ψ — начальные функции задачи Коши:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \tag{2}$$

и искомое классическое решение[2] $u = u(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times \overline{\mathbb{R}}^1_+$, $\overline{\mathbb{R}}^1_+ = [0,+\infty[$, уравнения (1) для всех значений временной переменной t по переменной x принадлежат банахову про-

[1] Уравнение, описывающее нелинейные изгибные волны в стержне, содержит [2] степени частной производной неизвестной функции: $\partial(\partial w/\partial x)^3/\partial x \equiv (w_x^3)_x$, однако, заменой $u = w_x$ и последующим дифференцированием обеих частей уравнения сводится к виду (1).

[2] Под классическим решением понимается достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.

странству $C[-\infty, +\infty] \equiv C[\mathbb{R}^1]$ [3] непрерывных функций $g = g(x)$, для которых существуют пределы при $x \to \pm\infty$, и норма определяется по формуле $\|g(x)\|_C = \sup_{x\in R^1} |g(x)|$.

Будем обозначать $C^{(k)}[\mathbb{R}^1] = \{g(x) \in C[\mathbb{R}^1] : g'(x), \ldots, g^{(k)}(x) \in C[\mathbb{R}^1]\}$.

Наша цель — для случая $\beta = 0$, т. е. для соответствующего (1) линейного уравнения, найти явный вид решения задачи Коши в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, а в случае $\beta \neq 0$ — найти временной отрезок существования классического решения задачи Коши и оценить норму в $C[\mathbb{R}^1]$ этого локального решения, далее рассмотреть условия существования глобального (определенного для $t \in \mathbb{R}^1_+$) решения уравнения (1) и разрушения его решения на конечном временном отрезке.

2. Задача Коши для линейного уравнения изгибных волн

Рассмотрим линейное однородное уравнение, соответствующее (1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \tag{3}$$

Наличие при $\lambda > 0$ резольвенты дифференциального оператора d^2/dx^2 позволяет существенно преобразовать уравнение (3), разрешив его относительно производной по времени. Именно, пусть $u = u(x,t)$ — классическое решение задачи Коши (1), (2), для которого частные производные u_{xx}, u_{xxt} непрерывны при $t \geqslant 0$. Введем новую неизвестную функцию

$$v = u - u_{xx}. \tag{4}$$

Из замены (4) можно единственным образом определить начальные значения $v|_{t=0} = \varphi(x) - \varphi''(x)$, $v_t|_{t=0} = \psi(x) - \psi''(x)$ при условии, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат $C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$ и выразить [3, с. 682] решение $u(x,t)$ задачи Коши (1), (2) через новую неизвестную функцию $v(x,t)$:

$$u(x,t) = \left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} v(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|r|} v(x+r,t)\, dr. \tag{5}$$

В результате подстановки (4) уравнение (3) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ можно записать в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$V_{tt} = G_0 V, \quad t \in \mathbb{R}^1_+, \tag{6}$$

где $V = V(t) : t \to v(x,t)$ — искомая вектор-функция, определенная для $t \in \overline{\mathbb{R}}^1_+$, со значениями в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$. Операторный коэффициент в уравнении (6) — линейный оператор $G_0 = -\alpha^2\big(I - d^2/dx^2\big)^{-1} d^4/dx^4$ — определен на функциях $g(x) \in C^{(4)}[\mathbb{R}^1]$ и его можно продолжить до оператора $G = A + \alpha^2 I + B$, где $A = \alpha^2 d^2/dx^2$, $B = -\alpha^2 (I - d^2/dx^2)^{-1}$.

[3] В пространстве $C[R^1]$ дифференциальный оператор d/dx с областью определения $\mathscr{D}(d/dx) = C^{(1)}[\mathbb{R}^1]$ является [3, с. 670], [4, с. 58] производящим оператором сжимающей сильно непрерывной группы $U(t; d/dx)$ класса C_0 левых сдвигов: $U(t; d/dx)g(x) = g(x+t)$, а дифференциальный оператор d^2/dx^2 с областью определения $\mathscr{D}(d^2/dx^2) = C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$ порождает [3, с. 681] сильно непрерывную полугруппу $U(t; d^2/dx^2)$ класса C_0 : $U(t; d^2/dx^2)g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)} g(x+\xi) d\xi$, $t \geqslant 0$. Положительная полуось $\lambda > 0$ принадлежит [3, с. 671, 681] резольвентным множествам операторов d/dx и d^2/dx^2 и для соответствующих резольвент $(\lambda I - d/dx)^{-1}$ и $(\lambda I - d^2/dx^2)^{-1}$, где I — тождественный оператор, справедливы оценки норм $\|(\lambda I - d/dx)^{-1}\|$, $\|(\lambda I - d^2/dx^2)^{-1}\| \leqslant 1/\lambda$.

Таким образом, получим эквивалентное (3) интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = \alpha^2(u_{xx} + u - h * u), \tag{7}$$

в котором $h = e^{-|x|}/2$ и через $h * \omega$ обозначена свертка: $(h * \omega)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-\xi)\omega(\xi)d\xi$.

Оператор A, $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(d^2/dx^2)$, в $C[\mathbb{R}^1]$ [5, с. 92] является производящим оператором косинус оператор-функции $C(t;A)$, $t \in \mathbb{R}^1$, класса C_0, для которой при всех $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ справедливо представление

$$C(t;A)g(x) = \frac{1}{2}\Big[U\Big(\alpha t; \frac{d}{dx}\Big) + U\Big(-\alpha t; \frac{d}{dx}\Big)\Big]g(x) = \frac{1}{2}\big[g(x+\alpha t) + g(x-\alpha t)\big] \tag{8}$$

и оценка нормы $\|C(t;A)\| \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Возмущенный оператор $A + \alpha^2 I$, $\mathscr{D}(A+\alpha^2 I) = \mathscr{D}(d^2/dx^2)$, также порождает в $C[\mathbb{R}^1]$ [5, с. 169] косинус оператор-функцию $C(t;A+\alpha^2 I)$, $t \in \mathbb{R}^1$, класса C_0, для которой справедливо представление

$$C\big(t;A+\alpha^2 I\big)g(x) = C(t;A)g(x) + \alpha t \int\limits_0^t I_1\Big(\alpha\sqrt{t^2-s^2}\Big)\, C(s;A)g(x)\frac{ds}{\sqrt{t^2-s^2}}, \tag{9}$$

где $g(x)$ — произвольный элемент из $C[\mathbb{R}^1]$, а $I_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$ — модифицированная функция Бесселя [6, с. 729], и оценка нормы $\|C(t;A+\alpha^2 I)\| \leqslant \operatorname{ch}(\alpha t)$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Ограниченный оператор B, $\mathscr{D}(B) = C[\mathbb{R}^1]$, порождает косинус оператор-функцию $C(t;B)$, $t \in \mathbb{R}^1$, класса C_0, которая для произвольного элемента $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ представляется [5, с. 142] степенным рядом, равномерно сходящимся по t на каждом конечном отрезке из $\mathbb{R}^1$:

$$C(t;B)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\alpha t)^{2n}}{(2n)!}\Big(I - \frac{d^2}{dx^2}\Big)^{-n} g(x).$$

Откуда, применяя оценку нормы резольвенты $(I - d^2/dx^2)^{-1}$, выводим $\|C(t;B)\| \leqslant \operatorname{ch}(\alpha t)$, $t \in \mathbb{R}^1$. Используя формулу [3, с. 664], выражающую степени резольвенты $(I - d^2/dx^2)^{-n}$ через полугруппу, порождаемую оператором d^2/dx^2:

$$\Big(I - \frac{d^2}{dx^2}\Big)^{-n} g(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^{+\infty} s^{n-1}e^{-s}U\Big(s;\frac{d^2}{dx^2}\Big)g(x)\,ds,$$

преобразуем представление косинус оператор-функции $C(t;B)$:

$$C(t;B)g(x) = g(x) - \frac{(\alpha t)^2}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-s}{}_0F_2\left(;\frac{3}{2},2;-\frac{(\alpha t)^2}{4}s\right)U\left(s;\frac{d^2}{dx^2}\right)g(x)\,ds, \tag{10}$$

где ${}_0F_2\,(;3/2,2;-z/4) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!(2n+2)!}$ — обобщенная гипергеометрическая функция [7, с. 437]. Далее, применяя интегральное представление полугруппы $U(s;d^2/dx^2)$, формуле (10) можно придать вид

$$C(t;B)g(x) = g(x) - \frac{(\alpha t)^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}\left((\alpha t)^2,\xi^2\right)g(x+\xi)\,d\xi, \quad t \in \mathbb{R}^1, \tag{11}$$

где обозначено $\mathscr{F}(z,\xi^2) = \int_0^{+\infty} e^{-s-\xi^2/(4s)}{}_0F_2\,(;3/2,2;-z/4s)ds/\sqrt{s}$.

Возмущение ограниченным оператором B сохраняет способность оператора $A+\alpha^2 I$ порождать косинус оператор-функцию класса C_0 [5, с. 169], поэтому оператор G является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции класса C_0, для которой на элементах $g(x)\in \mathscr{D}(G)=\ \mathscr{D}(d^2/dx^2)$ справедливо представление

$$C(t;G)g(x)=C\big(t;A+\alpha^2 I\big)g(x)+\frac{t^2}{2}\int\limits_0^1 j_1\Big(t\sqrt{1-\zeta^2},A+\alpha^2 I\Big)C(t\zeta;B)g(x)\,d\zeta,\quad t\in\mathbb{R}^1,$$

где $j_1(t,A+\alpha^2 I)g(x)=4/\pi\int_0^1\sqrt{1-\eta^2}C(t\eta;A+\alpha^2 I)g(x)\,d\eta$.

Используя формулы (8), (9), (11), косинус оператор-функция, порождаемая оператором G, записывается в явном виде на функциях $g(x)\in\mathscr{D}(d^2/dx^2)$:

$$\begin{gathered}
C(t;G)g(x)=\frac{1}{2}\big[g(x+\alpha t)+g(x-\alpha t)\big]\\
+\frac{\alpha t}{2}\int\limits_0^t I_1\left(\alpha\sqrt{t^2-s^2}\right)\big[g(x+\alpha s)+g(x-\alpha s)\big]\frac{ds}{\sqrt{t^2-s^2}}\\
+\frac{t^2}{\pi}\int\limits_0^1 d\zeta\int\limits_0^1\sqrt{1-\eta^2}\Bigg\{g\left(x+\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)+g\left(x-\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)\\
-\frac{(\alpha t\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}\left((\alpha t\zeta)^2,\xi^2\right)\bigg[g\left(x+\xi+\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)\\
+g\left(x+\xi-\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)\bigg]d\xi+\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\int\limits_0^{t\eta\sqrt{1-\zeta^2}} I_1\left(\alpha\sqrt{t^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2}\right)\\
\times\Bigg[g(x+\alpha s)+g(x-\alpha s)-\frac{(\alpha t\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}\left((\alpha t\zeta)^2,\xi^2\right)\\
\times\big[g(x+\xi+\alpha s)+g(x+\xi-\alpha s)\big]d\xi\Bigg]\frac{ds}{\sqrt{t^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2}}\Bigg\}d\eta
\end{gathered}\tag{12}$$

и для нее справедлива оценка нормы

$$\|C(t;G)\|\leqslant \mathrm{ch}(\alpha t)+\alpha^{-2}\mathrm{sh}\left(\alpha t(\sqrt{2}-1)\right)\mathrm{sh}\left(\alpha t(\sqrt{2}+1)\right),\quad t\in\mathbb{R}^1.\tag{13}$$

С косинус оператор-функцией (12) ассоциируют [5, с. 91] синус оператор-функцию:

$$S(t;G)g(x)=\int\limits_0^t C(r;G)g(x)\,dr,\quad g(x)\in C[\mathbb{R}^1],\tag{14}$$

и линейное многообразие $C_1[\mathbb{R}^1]=\{g(x)\in C[\mathbb{R}^1]:\ C(t;G)g(x)\in C^{(1)}(\mathbb{R}^1;C[\mathbb{R}^1])\}$, т. е. подмножество $C_1[\mathbb{R}^1]$ пространства $C[\mathbb{R}^1]$ состоит из тех элементов из $C[\mathbb{R}^1]$, для которых функция $C(t;G)g(x):\mathbb{R}^1\to C[\mathbb{R}^1]$ является непрерывно дифференцируемой функцией переменной t.

Очевидно, что $\mathscr{D}(G)=\mathscr{D}(d^2/dx^2)\subset C_1[\mathbb{R}^1]$.

Используя оценку (13), имеем

$$\|S(t;G)\| \leqslant \left| \int_0^t \|C(s;G)\|\, ds \right| \leqslant \frac{|\mathrm{sh}(\alpha t)\ |}{\alpha} + \left| \frac{\mathrm{sh}(2\alpha t\sqrt{2})}{4\alpha^3\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{sh}(2\alpha t)}{4\alpha^3} \right|, \quad t \in \mathbb{R}^1. \tag{15}$$

Таким образом, приходим к абстрактному дифференциальному уравнению, обобщающему уравнение (6) в банаховом пространстве $C[\mathbb{R}^1]$:

$$V_{tt} = GV, \quad t \in \mathbb{R}^1_+, \tag{16}$$

в котором операторный коэффициент G порождает сильно непрерывную косинус оператор-функцию класса C_0. Начальные условия в $C[R^1]$ для уравнения (16) перепишутся в виде

$$V|_{t=0} = \varPhi, \quad V_t|_{t=0} = \varPsi, \tag{17}$$

где $\varPhi = \varphi(x) - \varphi''(x)$, $\varPsi = \psi(x) - \psi''(x)$ — элементы пространства $C[\mathbb{R}^1]$.

Для того чтобы задача Коши (16), (17) была равномерно корректной[4] на $\overline{\mathbb{R}}^1_+$, необходимо и достаточно, чтобы оператор G был производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции класса C_0, при этом классическое[5] решение задачи Коши (16), (17) дается [5, с. 91–92] формулой $V(t) = C(t;G)\varPhi + S(t;G)\varPsi$, $t \in \mathbb{R}^1$, для любых $\varPhi \in \mathscr{D}(G)$ и $\varPsi \in C_1[\mathbb{R}^1]$.

Теперь, производя обратную замену (5) и используя перестановочность резольвенты $(I - d^2/dx^2)^{-1}$ с косинус оператор-функцией, порождаемой оператором G, находим решение задачи Коши для уравнения (3):

$$u = \left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} V(t) = C(t;G)\,\varphi + S(t;G)\,\psi. \tag{18}$$

Таким образом, имеет место утверждение[6]:

Теорема 1. *Пусть начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ вместе с производными до четвертого порядка включительно принадлежат пространству $C[\mathbb{R}^1]$. Тогда задача Коши для линейного однородного уравнения (3) равномерно корректна, классическое решение*

[4] Задача Коши

$$u''(t) = Au(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}^1_+; \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{$*$}$$

в банаховом пространстве E называется *равномерно корректной* [5, с. 89], если найдется плотное подмножество $E_1 \subset E$ такое, что при u^0, $u^1 \in E_1$ существует единственное решение на $\overline{\mathbb{R}}^1_+$ и это решение равномерно устойчиво по t на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}}^1_+$, т. е. из условия $u^m_n \to 0$ ($u^m_n \in E_1$, $m = 0,1$) при $n \to \infty$ следует сходимость соответствующих решений $u_n(t) \to 0$ равномерно по $t \in K$, где $u^{(m)}_n(0) = u^m_n$, $m = 0,1$.

[5] Дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(t) : \overline{\mathbb{R}}^1_+ \to E$, т. е. $u(t) \in C^{(2)}(\overline{\mathbb{R}}^1_+; E)$ называется *классическим решением абстрактной задачи Коши* ($*$), если $u(t) \in \mathscr{D}(A)$, $Au(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}^1_+; E)$ при $t \in \overline{\mathbb{R}}^1_+$ и удовлетворяются равенства ($*$).

[6] От начальной функции $\psi(x)$ требуем заведомо большую гладкость, чем нужно для существования решения задачи Коши для уравнения (3), чтобы не заниматься описанием подмножества $C_1[\mathbb{R}^1]$ пространства $C[\mathbb{R}^1]$.

дается формулой (18) *или в подробной записи*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+\alpha t)+\varphi(x-\alpha t)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left[\psi(x+\alpha r)+\psi(x-\alpha r)\right]dr$$

$$+\frac{\alpha t}{2}\int\limits_0^t I_1\left(\alpha\sqrt{t^2-s^2}\right)\left[\varphi(x+\alpha s)+\varphi(x-\alpha s)\right]\frac{ds}{\sqrt{t^2-s^2}}$$

$$+\frac{\alpha}{2}\int\limits_0^t rdr\int\limits_0^r I_1\left(\alpha\sqrt{r^2-s^2}\right)\left[\psi(x+\alpha s)+\psi(x-\alpha s)\right]\frac{ds}{\sqrt{r^2-s^2}}$$

$$+\frac{t^2}{\pi}\int\limits_0^1 d\zeta\int\limits_0^1\sqrt{1-\eta^2}\Bigg\{\varphi\left(x+\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)+\varphi\left(x-\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

$$-\frac{(\alpha t\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}\left((\alpha t\zeta)^2,\xi^2\right)\left[\varphi\left(x+\xi+\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)+\varphi\left(x+\xi-\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right]d\xi$$

$$+\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\int\limits_0^{t\eta\sqrt{1-\zeta^2}} I_1\left(\alpha\sqrt{t^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2}\right)\Bigg\{\varphi(x+\alpha s)+\varphi(x-\alpha s)$$

$$-\frac{(\alpha t\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}\left((\alpha t\zeta)^2,\xi^2\right)\left[\varphi(x+\xi+\alpha s)+\varphi(x+\xi-\alpha s)\right]d\xi\Bigg\}\frac{ds}{\sqrt{t^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2}}\Bigg\}d\eta$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^t r^2\Bigg\{\int\limits_0^1 d\zeta\int\limits_0^1\sqrt{1-\eta^2}\Bigg\{\psi\Big(x+\alpha r\eta\sqrt{1-\zeta^2}\Big)+\psi\left(x-\alpha r\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

$$-\frac{(\alpha r\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}\left((\alpha r\zeta)^2,\xi^2\right)\left[\psi\Big(x+\xi+\alpha r\eta\sqrt{1-\zeta^2}\Big)+\psi\Big(x+\xi-\alpha r\eta\sqrt{1-\zeta^2}\Big)\right]d\xi$$

$$+\alpha r\eta\sqrt{1-\zeta^2}\int\limits_0^{r\eta\sqrt{1-\zeta^2}} I_1\left(\alpha\sqrt{r^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2}\right)$$

$$\times\Bigg\{\psi(x+\alpha s)+\psi(x-\alpha s)-\frac{(\alpha r\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}\left((\alpha r\zeta)^2,\xi^2\right)$$

$$\times\left[\psi(x+\xi+\alpha s)+\psi(x+\xi-\alpha s)\right]d\xi\Bigg\}\frac{ds}{\sqrt{r^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2}}\Bigg\}d\eta\Bigg\}dr$$

и для него справедлива оценка

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|u(x,t)|\leqslant\left[\operatorname{ch}(\alpha t)+\alpha^{-2}\operatorname{sh}\big(\alpha t(\sqrt{2}-1)\big)\operatorname{sh}\big(\alpha t(\sqrt{2}+1)\big)\right]\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\varphi(x)|$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left[|\operatorname{sh}(\alpha t)\ |+\frac{1}{4\alpha^2\sqrt{2}}\left|\operatorname{sh}\big(2\alpha t\sqrt{2}\big)-\sqrt{2}\operatorname{sh}(2\alpha t)\right|\right]\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\psi(x)|,\quad t\in\mathbb{R}^1.$$

Замечание 1. Хотя изначально ставилась цель найти решение $u(x,t)$ линейного однородного уравнения изгибных колебаний на полуоси $t \in \mathbb{R}^1_+$, формула (18) определяет $u(x,t)$ на всей числовой прямой $t \in \mathbb{R}^1$, что естественно вытекает и из самого задания уравнения, так как оно не меняется при замене $t \to -t$.

Замечание 2. Так как классическое решение $V(t)$ абстрактной задачи Коши (16), (17) принадлежит $C^{(2)}(\overline{\mathbb{R}}^1_+; C[\mathbb{R}^1])$ и для него $GV(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}^1_+; C[\mathbb{R}^1])$, то значения решения $u(x,t) = (I - d^2/dx^2)^{-1} V(t)$ уравнения (3) принадлежат $C^{(4)}[\mathbb{R}^1]$ для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}^1_+$.

3. Локальное решение задачи Коши для нелинейного уравнения изгибных волн

Применив к обеим частям уравнения (1) линейный ограниченный оператор $(I - d^2/dx^2)^{-1}$, получим эквивалентное (1) нелинейное интегро-дифференциальное уравнение — нелокальное уравнение Клейна — Гордона:

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = \alpha^2 u - \beta u^3 + h * (\beta u^3 - \alpha^2 u). \tag{19}$$

Уравнение (19) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ можно записать в виде абстрактного полулинейного уравнения

$$V_{tt} = GV + F(V), \quad t \in \mathbb{R}^1_+, \tag{20}$$

где оператор G такой же, как и в уравнении (16), а $F(V)$ — заданный нелинейный оператор, действующий в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$: $F(g) = \beta[(I - d^2/dx^2)^{-1} - I]Q(g)$, здесь Q — оператор суперпозиции: $Q(g) = f(g(x))$, $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$, $f(s) = s^3$.

Отметим, что из непрерывной дифференцируемости оператора суперпозиции Q в пространстве непрерывных функций [8, с. 406] и ограниченности линейного оператора $(I - d^2/dx^2)^{-1} - I$ следует непрерывная дифференцируемость по Фреше нелинейного оператора $F(V)$ в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$.

Из непрерывной дифференцируемости отображения $F(V)$ следует, что $F(V)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Поэтому существует промежуток $[0, t^*[$, в котором задача Коши (20), (17) имеет [9, с. 87] единственное обобщенное решение $V = V(t)$, т. е. единственное непрерывно дифференцируемое решение интегрального уравнения

$$V(t) = C(t;G)\varPhi + S(t;G)\varPsi + \int\limits_0^t S(t-\tau;G)F(V(\tau))\,d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^1_+, \tag{21}$$

для любых $\varPhi \in \mathscr{D}(G)$ и $\varPsi \in C_1[\mathbb{R}^1]$.

Применяя оценки (13), (15) норм оператор-функций (12), (14), записанные, используя элементарные неравенства $\mathrm{sh}(t)\mathrm{sh}(\tau) \leqslant \mathrm{ch}(t+\tau)/2$, $|\mathrm{sh}(t)| \leqslant \mathrm{ch}(t)$, $t, \tau \in \mathbb{R}^1$, в виде $\|C(t;G)\| \leqslant \frac{2\alpha^2+1}{2\alpha^2}\mathrm{ch}(2\alpha t\sqrt{2}) \equiv \rho(\alpha,t)$, $\|S(t;G)\| \leqslant \frac{\rho(\alpha,t)}{2\alpha\sqrt{2}}$, и учитывая, что для элементов пространства $C[\mathbb{R}^1]$ справедливо соотношение $\|\varPhi\varPsi\|_C \leqslant \|\varPhi\|_C \|\varPsi\|_C$, в силу чего, с ним можно работать как с алгеброй [10, с. 120], из интегрального уравнения (21), учитывая оценку $\mathrm{ch}(t-\tau) \leqslant \mathrm{ch}(t)\mathrm{ch}(\tau)$, выводим интегральное неравенство

$$\|V(t)\|_C \leqslant \rho(\alpha,t)\left[\Omega(\alpha,\Phi,\Psi) + \frac{|\beta|}{\alpha\sqrt{2}}\int\limits_0^t \mathrm{ch}(2\alpha\tau\sqrt{2})\|V(\tau)\|_C^3 d\tau\right], \quad t \in \mathbb{R}^1_+, \tag{22}$$

где $\Omega(\alpha,\Phi,\Psi)=\|\varPhi\|_C+1/(2\alpha\sqrt{2})\|\varPsi\|_C$. Из неравенства (22) следует [11, с. 13] оценка нормы обобщенного решения

$$\|V(t)\|_C\leqslant\Omega(\alpha,\Phi,\Psi)\rho(\alpha,t)\bigl(1-q(\alpha,\beta)\Omega^2(\alpha,\Phi,\Psi)\delta(\alpha,t)\bigr)^{-\frac{1}{2}},$$

где $\delta(\alpha,t)=3\alpha t\sqrt{2}+\mathrm{sh}(4\alpha t\sqrt{2})\ +\mathrm{sh}(8\alpha t\sqrt{2})\ /8$, на временном отрезке $t\in[0,t_*]$, длина которого ограничивается величиной $t_*=\sup\{t\in[0,t^*[:\ \delta(\alpha,t)<1/(q(\alpha,\beta)\Omega^2(\alpha,\Phi,\Psi))\}$. Здесь $q(\alpha,\beta)=|\beta|(2\alpha^2+1)^3/(64\alpha^8)$.

Итак, на отрезке $[0,t_*]$ существует обобщенное решение абстрактной задачи Коши (20), (17), для которого справедлива оценка нормы (22). Это обобщенное решение $V(t)$, $t\in[0,t_*]$, будет классическим решением задачи Коши (20), (17), если оно дважды непрерывно дифференцируемо по t, что является следствием [9, с. 91] непрерывной дифференцируемости по Фреше нелинейного оператора $F(V)$, при условии $\varPhi\in\mathscr{D}(G)$ и $\varPsi\in C_1[\mathbb{R}^1]$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Пусть начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ задачи Коши* (1), (2) *принадлежат пространству $C[\mathbb{R}^1]$ вместе со своими производными до четвертого порядка включительно*[7]*, тогда при $t\in[0,t_*]$, где*

$$t_*=\sup\left\{t:\ \delta(\alpha,t)<\frac{64\alpha^8}{|\beta|(2\alpha^2+1)^3\Omega^2(\alpha,\varphi,\psi)}\right\},$$
$$\Omega(\alpha,\varphi,\psi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\varphi(x)|+\frac{1}{2\alpha\sqrt{2}}\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\psi(x)|,$$

существует единственное классическое решение $u=u(x,t)$, $(x,t)\in\mathbb{R}^1\times[0,t_*]$, этой задачи в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, для которого справедлива оценка

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|u(x,t)|\leqslant\left(1+\frac{1}{2\alpha^2}\right)\Omega(\alpha,\varphi,\psi)\mathrm{ch}\bigl(2\alpha t\sqrt{2}\bigr)\left(1-\frac{|\beta|(2\alpha^2+1)^3\Omega^2(\alpha,\varphi,\psi)}{64\alpha^8}\delta(\alpha,t)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

4. Существование глобального решения уравнения изгибных волн и разрушение его решения на конечном отрезке

Как известно [12], если функция $g(x)$, принадлежащая пространству $C[\mathbb{R}^1]$, также принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^1)$, т. е. $g(x),g'(x)\in L_2(\mathbb{R}^1)$, то справедлива оценка

$$\|g\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|g(x)|\leqslant\|g\|_{W_2^1}=\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Bigl[(g(x))^2+(g'(x))^2\Bigr]\,dx},$$

причем, если к тому же $g(x)\in C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$, то предел при $x\to\pm\infty$ функций $g(x)$, $g'(x)$ равен нулю.

[7] Здесь надо учитывать, что классическое решение уравнения (1) из $C^{(4)}[\mathbb{R}^1]$, тогда как классическое решение уравнения (19) из $C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$.

Полагая, что для всех $t \geqslant 0$ классическое решение $u = u(x,t)$ уравнения (1) принадлежит пересечению пространств $C[\mathbb{R}^1] \cap W_2^1(\mathbb{R}^1)$, исследуем так называемый интеграл энергии

$$y(t) = \|u\|^2_{W_2^1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(u^2 + u_x^2\right)\, dx,$$

в котором $u = u(x,t)$ — решение уравнения (1).

Применяя к равенству $y'(t) = 2(u, u_t) + 2(u_x, u_{xt})$ неравенство Коши — Буняковского[8] и используя элементарное неравенство $2ab \leqslant a^2 + b^2$, выводим оценку

$$y'(t) \leqslant \|u\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 + \|u_{xt}\|_2^2,$$

из которой, обозначая $z(t) = \|u_t\|^2_{W_2^1} = \|u_t\|_2^2 + \|u_{xt}\|_2^2$, имеем

$$y'(t) \leqslant y(t) + z(t). \tag{23}$$

Аналогично из равенства $[y'(t)]^2 = 4[(u,u_t)^2 + 2(u,u_t)(u_x,u_{xt}) + (u_x,u_{xt})^2]$ получаем оценку

$$[y'(t)]^2 \leqslant 4y(t)z(t). \tag{24}$$

Используя уравнение (1), представление $u_x u_{xtt} = (u u_{xtt})_x - u u_{xxtt}$ и интегрируя по частям, из соотношения

$$\frac{1}{2}y''(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t^2\, dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xt}^2\, dx - \beta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^4\, dx - \alpha^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\, dx$$

выводим первое энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}y''(t) = z(t) - \beta\left\|u_x^2\right\|_2^2 - \alpha^2\left\|u_{xx}\right\|_2^2. \tag{25}$$

Аналогично, используя представление $u_{xt}u_{xtt} = (u_t u_{xtt})_x - u_t u_{xxtt}$ и интегрируя по частям, из представления производной $z'(t)$:

$$\frac{1}{2}z'(t) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{4}\beta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^4\, dx - \frac{1}{2}\alpha^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\, dx\right),$$

следует второе энергетическое равенство

$$z(t) = S_0 - \frac{1}{2}\beta\|u_x^2\|_2^2 - \alpha^2\|u_{xx}\|_2^2, \tag{26}$$

где $S_0 = \|\psi\|^2_{W_2^1} + \alpha^2\|\varphi''\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|(\varphi')^2\|_2^2$.

Пусть в уравнении (1) параметр $\beta > 0$. Тогда из соотношений (23) и (26) следует, что $y'(\tau) \leqslant y(\tau) + S_0$, $\tau \geqslant 0$, и, значит, по лемме Гронуолла

$$y(t) \leqslant \left[y(0) + tS_0\right]e^t, \quad t \geqslant 0. \tag{27}$$

[8] $|(\varphi,\psi)| \leqslant \|\varphi\|_2\|\psi\|_2$, где $(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\psi(x)\,dx$ и $\|\varphi\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,dx}$ — соответственно скалярное произведение и норма в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$.

Из неравенства (27) следует, что при выполнении начальными функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$ условий

$$\varphi(x), \psi(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^1); \quad (\varphi'(x))^2, \varphi''(x) \in L_2(\mathbb{R}^1), \tag{28}$$

классическое решение $u = u(x,t)$ уравнения (1) принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ и, значит, справедлива оценка

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1} |u(x,t)| \leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \Big[(u(x,t))^2 + (u_x(x,t))^2\Big]\, dx} \leqslant \sqrt{y(0)+tS_0}\, e^{\frac{t}{2}}, \quad t \geqslant 0, \tag{29}$$

обеспечивающая существование глобального решения уравнения (1).

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Пусть в уравнении* (1) *параметр* $\beta > 0$, *а начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *удовлетворяют условию* (28). *Тогда существует единственное глобальное классическое решение задачи Коши* (1), (2), *для которого справедлива оценка* (29) *или в подробной записи*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1} |u(x,t)| \leqslant \sqrt{\|\varphi\|^2_{W_2^1} + t\left(\|\psi\|^2_{W_2^1} + \alpha^2\|\varphi''\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|(\varphi')^2\|_2^2\right)}\, e^{\frac{t}{2}}, \quad t \geqslant 0.$$

Исключая из энергетических равенств (25), (26) *слагаемое с параметром* β, *имеем* $y''(t) - 6z(t) + 4S_0 = 2\alpha^2\|u_{xx}\|_2^2$, *откуда, в силу оценки* (24), *вытекает дифференциальное неравенство для интеграла энергии*

$$y(t)y''(t) - \frac{3}{2}[y'(t)]^2 + 4S_0 y(t) \geqslant 0. \tag{30}$$

Сравнивая (30) *с основным дифференциальным неравенством для интеграла энергии из* [13], *заключаем, что если потребовать выполнение условий*

$$\|\varphi\|_{W_2^1} > 0, \quad M = (\varphi,\psi) + (\varphi',\psi') > 0, \quad S_0 < M^2\|\varphi\|^{-2}_{W_2^1}, \tag{31}$$

то имеет место оценка снизу интеграла энергии: $y(t) \geqslant \left(\|\varphi\|^{-1/2}_{W_2^1} - Nt\right)^{-2}$, *и оценка сверху времени* T^* *существования классического решения уравнения* (1):

$$T^* \leqslant N^{-1}\|\varphi\|^{-\frac{1}{2}}_{W_2^1}, \tag{32}$$

где $N = \|\varphi\|^{-3/2}_{W_2^1}\sqrt{M^2 - S_0\|\varphi\|^2_{W_2^1}}$.

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Пусть параметры* α, β *и начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *задачи Коши* (1), (2) *подчинены условиям* (31). *Тогда не существует глобального по времени классического решения уравнения изгибных колебаний нелинейно-упругого стержня, т. е. решение разрушается за конечное время* T^*, *причем имеет место оценка* (32) *для времени существования решения.*

Замечание 3. Оценку (29) можно существенно улучшить, если воспользоваться при $\beta > 0$ неравенствами, вытекающими из энергетических равенств (25) и (26): $1/2y''(t) \leqslant z(t) \leqslant S_0$, откуда интегрируя, имеем $y(t) \leqslant y(0) + y'(0)t + S_0t^2$.

Литература

1. *Островский Л. А., Потапов А. И.* Введение в теорию модулированных волн.—М.: Физматлит, 2003.—400 с.
2. *Ерофеев В. И., Кажаев В. В., Семерикова Н. П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность.—М.: Физматлит, 2002.—208 с.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.—М.: Изд-во иностр. лит., 1962.—895 с.
4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.—М.: Наука, 1967.—464 с.
5. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. ВИНИТИ.—1990.—Т. 28.—С. 87–202.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции.—М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983.—752 с.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы.—М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.—800 с.
8. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—500 с.
9. *Travis C. C., Webb G. F.* Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations // Acta Math. Acad. Sci. Hungar.—1978.—Vol. 32.—P. 75–96.
10. *Appell J., Zabreiko P. P.* Nonlinear Superposition Operators.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.—320 p.
11. *Dragomir S. S.* Some Gronwall Type Inequalities and Applications.—Melbourne City MC, 2002.—193 p.
12. *Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. Roy. Soc.—London, 1972.—Vol. 272.—P. 47–78.
13. *Корпусов М. О., Свешников А. Г., Юшков Е. В.* Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики.—М.: Изд-во физического факультета МГУ, 2014.—364 с.

Статья поступила 4 июля 2017 г.

Умаров Хасан Галсанович
Академия наук Чеченской Республики,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 364024, г. Грозный, пр. М. Эсамбаева, 13
E-mail: `umarov50@mail.ru`

THE CAUCHY PROBLEM FOR THE EQUATION OF BENDING VIBRATIONS OF A NONLINEAR-ELASTIC ROD OF INFINITE LENGTH

Umarov Kh. G.

For the differential equation mentioned in the title of the article, the solvability of the Cauchy problem in the space of continuous functions on the whole real axis by reducing to an abstract Cauchy problem in a Banach space is studied. An explicit form of the solution of the corresponding linear equation is found. The time interval for the existence of the classical solution of the Cauchy problem for a nonlinear equation is established and an estimate of the norm of this local solution is obtained. The conditions for the existence of a global solution and the destruction of the solution on a finite interval are considered.

Keywords: bending vibrations of a rod, Klein–Gordon equation, strongly continuous semigroups of operators.