Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 4, С. 76–85

УДК **518.517.68**

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫМИ СУММАМИ

Ю. Х. Хасанов

В работе изучаются некоторые вопросы приближения почти периодических функций двух переменных частичными суммами Фурье и суммами типа Марцинкевича в равномерной метрике, когда показатели Фурье рассматриваемых функций имеют предельную точку в бесконечности. Точнее рассматривается равномерная почти периодическая функция двух переменных, показатели Фурье которой имеют единственную предельную точку в бесконечности. Доказывается, что частичная сумма данного ряда с весовой функцией $\Phi_\sigma(t,z)$ $(\sigma > 0)$ представима в интегральной форме. Весовая функция $\Phi_\sigma(t,z)$ является произвольной, вещественной, непрерывной, четной и при $x = y = 0$ принимает значение 1, а в случае, когда либо $|x| \geqslant \sigma$, либо $|y| \geqslant \sigma$ равна нулю. Сначала доказывается почти периодичность рассматриваемой функции $f(x,y)$ и, используя формулу обращения Фурье, для этой функции определяются коэффициенты Фурье. Затем исследуется вопрос об отклонении заданной функции $f(x,y)$ от частичных сумм ее ряда Фурье, в зависимости от скорости стремления к нулю величины наилучшего приближения функции тригонометрическими полиномами ограниченной степени. Далее аналогичным образом устанавливается оценка сверху величины отклонения равномерной почти периодической функции от сумм Марцинкевича.

Ключевые слова: почти периодическая функция, приближение функции, суммы Марцинкевича, коэффициенты Фурье, показатели Фурье, предельные точки в бесконечности.

1. Введение

Через L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ обозначим пространство измеримых 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x,y)$, для которых существует конечная норма

$$\|f(x,y)\|_{L_p} = \left\{ \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x,y)|^p \, dx\, dy \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1 \leqslant p < \infty),$$

$$\|f(x,y)\|_{L_\infty} = \operatorname{vrai} \sup_{x,y} |f(x,y)| < \infty,$$

и ряд Фурье функции $f(x,y) \in L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ —

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l}(x,y), \tag{1.1}$$

где $A_{k,l}(x,y) = a_{k,l}\cos kx \cos ly + b_{k,l}\sin kx \cos ly + c_{k,l}\cos kx \sin ly + d_{k,l}\sin kx \sin ly$, $a_{k,l}$, $b_{k,l}$, $c_{k,l}$, $d_{k,l}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x,y)$.

И. Марцинкевич [1] впервые рассмотрел вопрос о поведении сумм вида

$$M_n(f;x,y)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_{k,k}(f;x,y),$$

где $S_{k,k}(f;x,y)$ — частичные суммы порядка k по каждой из переменных ряда (1.1) функции $f(x,y)\in L_p$ ($1\leqslant p\leqslant\infty$). В частности, Марцинкевичем было установлено, что если $f(x,y)$ — непрерывная функция по совокупности переменных, то

$$R_n(f)_{L_\infty}=\|f(x,y)-M_n(f;x,y)\|_{L_\infty}\to 0,\quad n\to\infty.$$

В работе Л. В. Жижиашвили [2] были даны некоторые оценки скорости стремления к нулю величины

$$R_n(f)_{L_p}=\|f(x,y)-M_n(f;x,y)\|_{L_p}\quad (1<p\leqslant\infty). \tag{1.2}$$

Исследование поведения отклонения функции двух переменных $f(x,y)\in L_p$ ($1\leqslant p\leqslant\infty$) от сумм вида

$$W_r(f;x,y)=(1-r)\sum_{k=0}^{\infty}r^kS_{k,k}(f;x,y)\quad (0<r<1)$$

при $r\to 1$ было проведено в работе Р. Таберского [3]. Некоторым уточнениям результатов Л. В. Жижиашвили и Р. Таберского посвящена работа М. Ф. Тимана и Г. Гаймназарова [4]. В работе М. Ф. Тимана и В. Г. Пономаренко [5] для случая треугольных матриц $\{\mu_{k,n}\}$ установлены оценки снизу величины

$$R_n(f;\mu)_{L_p}=\left\|f(x,y)-\sum_{k=0}^{n}\mu_{k,n}S_{k,k}(f;x,y)\right\|_{L_p}\quad (1\leqslant p\leqslant\infty),$$

где

$$\mu_{k,n}=\begin{cases}\frac{(k+1)^r-k^r}{(n+1)^r}, & k\leqslant n;\\ 0, & k>n\end{cases}$$

при любом натуральном r. В этой же работе приведены некоторые уточнения оценок из работ [2] и [3], и при любом натуральном r и $1<p<\infty$ получены следующие точные порядковые равенства:

$$R_n(f;\mu)_{L_p}\asymp\omega_r^{(1)}\left(f;\frac{1}{n}\right)_{L_p}+\omega_r^{(2)}\left(f;\frac{1}{n}\right)_{L_p},$$

где

$$\omega_r^{(1)}(f;t)_{L_p}=\sup_{|h|\leqslant t}\left\|\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{r-\nu}\tbinom{r}{\nu}f(x+\nu h,y)\right\|_{L_p},$$

$$\omega_r^{(2)}(f;t)_{L_p}=\sup_{|h|\leqslant t}\left\|\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{r-\nu}\tbinom{r}{\nu}f(x,y+\nu h)\right\|_{L_p}.$$

2. Основные результаты

В настоящей статье устанавливаются оценки сверху величины отклонения одного класса почти периодических функций двух переменных от сумм типа Марцинкевича в равномерной метрике.

Определение. Функция $f(x,y)$ $(-\infty < x, y < \infty)$ называется *равномерной почти периодической функцией*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ, для которого

$$|f(x+\tau, y) - f(x,y)| < \varepsilon \text{ равномерно по } y,$$
$$|f(x, y+\tau) - f(x,y)| < \varepsilon \text{ равномерно по } x.$$

Пусть B — класс равномерных почти периодических функций и ряд Фурье функции $f(x,y) \in B$ имеет вид

$$f(x,y) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\lambda_m, \mu_n) \exp(i(\lambda_m x + \mu_n y)), \tag{2.1}$$

где

$$A(\lambda_m, \mu_n) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} f(x,y) \exp(-i(\lambda_m x + \mu_n y))\, dx\, dy$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x,y)$, а $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$, $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — показатели Фурье (спектр функции), которые имеют предельную точку в бесконечности, т. е.

$$\lambda_0 = \mu_0 = 0; \quad \lambda_{-m} = -\lambda_m, \quad \mu_{-n} = -\mu_n; \quad \lim_{m\to\infty} \lambda_m = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty;$$

$$\lambda_m < \lambda_{m+1} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \quad \mu_n < \mu_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Через $S_{\sigma,\sigma}(f; x, y)$ обозначим частичную сумму ряда (2.1), т. е.

$$S_{\sigma,\sigma}(f; x, y) = \sum_{|\lambda_m|\leqslant\sigma} \sum_{|\mu_n|\leqslant\sigma} A(\lambda_m, \mu_n) \exp(i(\lambda_m x + \mu_n y)).$$

Положим

$$U_\sigma(f; \Phi; x, y) = \sum_{|\lambda_m|\leqslant\sigma} \sum_{|\mu_n|\leqslant\sigma} A(\lambda_m, \mu_n) \Phi_\sigma(\lambda_m, \mu_n) \exp(i(\lambda_m x + \mu_n y)),$$

где $\Phi_\sigma(t,z)$ — произвольная, вещественная, непрерывная четная функция, для которой выполнены следующие условия:

1) $\Phi_\sigma(0,0) = 1$;
2) $\Phi_\sigma(t,z) = 0$ при $|t| \geqslant \sigma$ или $|z| \geqslant \sigma$;
3)
$$\psi_\sigma(t,z) \in L^2(-\infty, \infty), \tag{2.2}$$

где

$$\psi_\sigma(u,v) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\sigma(t,z) \exp(-i(ut + vz))\, dt\, dz.$$

Лемма 1. *Если* $f(x,y) \in B$, *то*

$$U_\sigma(f;\Phi;x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t,y+z)\psi_\sigma(t,z)\,dt\,dz.$$

$\lhd$ Пусть

$$f_\sigma(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t,y+z)\psi_\sigma(t,z)\,dt\,dz.$$

Тогда в силу (2.2) равномерно по y имеем

$$|f_\sigma(x+\tau,y) - f_\sigma(x,y)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+t+\tau,y+z) - f(x+t,y+z)|\,|\psi_\sigma(t,z)|\,dt\,dz$$

$$\leqslant \sup_{x,y}\bigl|f(x+\tau,y) - f(x,y)\bigr| \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \bigl|\psi_\sigma(t,z)\bigr|\,dt\,dz.$$

Аналогично равномерно по x будем иметь

$$|f_\sigma(x,y+\tau) - f_\sigma(x,y)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+t,y+z+\tau) - f(x+t,y+z)|\,|\psi_\sigma(t,z)|\,dt\,dz$$

$$\leqslant \sup_{x,y}|f(x,y+\tau) - f(x,y)| \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi_\sigma(t,z)|\,dt\,dz.$$

Следовательно, $f_\sigma(x,y)$ является равномерной почти периодической функцией.

Пусть $A_\sigma(\lambda_m,\mu_n)$ — коэффициент Фурье функций $f_\sigma(x,y)$, соответствующий показателям λ_m и μ_n. Имеем

$$\frac{1}{4T^2}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T} f_\sigma(x,y)\exp(-i(\lambda_m x+\mu_n y))\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4T^2}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t,y+z)\psi_\sigma(t,z)\,dt\,dz\right]\exp(-i(\lambda_m x+\mu_n y))\,dx\,dy$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_\sigma(t,z)\left[\frac{1}{4T^2}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T} f(x+t,y+z)\exp(-i(\lambda_m x+\mu_n y))\,dx\,dy\right]dt\,dz$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_\sigma(t,z)\exp(-i(\lambda_m t+\mu_n z))\left[\frac{1}{4T^2}\int\limits_{-T+t}^{T+t}\int\limits_{-T+z}^{T+z} f(x,y)\exp(-i(\lambda_m x+\mu_n y))\,dx\,dy\right]dt\,dz.$$

Внутренний интеграл является допредельным выражением для коэффициентов Фурье функции $f(x,y)$, а по формуле обращения Фурье

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_\sigma(t,z)\exp(-i(\lambda_m t+\mu_n z))\,dt\,dz = \Phi_\sigma(\lambda_m,\mu_n).$$

Отсюда получим, что

$$A_\sigma(\lambda_m,\mu_n)=A(\lambda_m,\mu_n)\Phi_\sigma(\lambda_m,\mu_n).$$

Таким образом,

$$f_\sigma(x,y)=\sum_{|\lambda_m|\leqslant\sigma}\sum_{|\mu_n|\leqslant\sigma}A(\lambda_m,\mu_n)\Phi_\sigma(\lambda_m,\mu_n)\exp(i(\lambda_m x+\mu_n y)).$$

Так как $f_\sigma(x,y)$ является почти периодической функцией, то лемма 1 доказана. $\rhd$

Пусть B — пространство всех ограниченных и равномерно почти периодических в плоскости переменных x, y функций $f(x,y)$ с нормой

$$\|f\|_B=\sup_{-\infty<x,y<\infty}|f(x,y)|.$$

Рассмотрим величину

$$R(f;\Phi)=\|U_\sigma(f;\Phi;x,y)-f(x,y)\|_B, \tag{2.3}$$

в которой

$$U_\sigma(f;\Phi;x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x+t,y+z)\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz, \tag{2.4}$$

$$\Phi_\sigma(t,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{\infty}\varphi_\sigma(u)K_u(t,z)\,du,$$

$$K_u(t,z)=4\left[\cos(ut)\frac{\sin(uz)}{z}+\cos(uz)\frac{\sin(ut)}{t}\right],$$

$\varphi_\sigma(u)$ — некоторая четная функция, абсолютно интегрируемая на интервале $(0,\infty)$ при каждом фиксированном $\sigma>0$ и такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Phi_\sigma(t,z)|\,dt\,dz<\infty,\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz=1. \tag{2.5}$$

Далее исследуем вопрос о поведении величины (2.3) в зависимости от скорости стремления к нулю величины наилучшего приближения $E_{\sigma,\sigma}(f)$ (при $\sigma\to\infty$) для случаев, когда в качестве $\varphi_\sigma(u)$ выбраны функции

$$\varphi_\sigma(u)=\varphi_{\sigma,a}(u)=\begin{cases}1, & |u|\leqslant a\quad (0<a<\sigma);\\ \frac{\sigma-|u|}{\sigma-a}, & a<|u|<\sigma;\\ 0, & |u|\geqslant\sigma.\end{cases} \tag{2.6}$$

Лемма 2. *Если функция $\varphi_\sigma(u)=\varphi_{\sigma,a}(u)$ определена равенством* (2.6), *то справедлива оценка*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Phi_\sigma(t,z)|\,dt\,dz\leqslant C\frac{\sigma+a}{\sigma-a}, \tag{2.7}$$

где C — константа.

$\lhd$ Доказательство леммы 2 дано в работе [6]. $\rhd$

Теорема 1. *Если $f(x,y) \in B$ и $\varphi_\sigma(u) = \varphi_{\sigma,a}(u)$ определена равенством (2.6), то при любом Λ $(0 < \Lambda < a < \sigma)$ справедлива оценка*

$$\|U_\sigma(f;\Phi;x,y) - f(x,y)\|_B \leqslant C\,\frac{\sigma+a}{\sigma-a}\,E_{\Lambda,\Lambda}(f)_B, \tag{2.8}$$

где $U_\sigma(f;\Phi;x,y)$ определена равенством (2.4), а

$$E_{\Lambda,\Lambda}(f)_B = \inf_{A(\lambda_m,\mu_n)} \left\| f(x,y) - \sum_{|\lambda_m|\leqslant\Lambda}\sum_{|\mu_n|\leqslant\Lambda} A(\lambda_m,\mu_n)\exp(i(\lambda_m x + \mu_n y)) \right\|_B$$

— наилучшее приближение функций $f(x,y) \in B$ тригонометрическими полиномами степени не выше Λ, C — константа.

$\lhd$ Так как согласно (2.5)

$$4\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz = 1,$$

то умножая обе части этого равенства на $f(x,y)$ и вычитая полученное равенство из (2.4), получим

$$\begin{aligned}
\Delta_\sigma(f;x,y) &= U_\sigma(f;\Phi;x,y) - f(x,y)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t,y+z)\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz - 4\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \Big[f(x+t,y+z) + f(x-t,y+z) + f(x+t,y-z)\\
&\quad + f(x-t,y-z)\Big]\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz - 4\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \Big[f(x+t,y+z) + f(x-t,y+z) + f(x+t,y-z)\\
&\quad + f(x-t,y-z) - 4f(x,y)\Big]\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz = \int_0^\infty\int_0^\infty \Omega_{x,y}(f;t,z)\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz,
\end{aligned}$$

где

$$\Omega_{x,y}(f;t,z) = f(x+t,y+z) + f(x-t,y+z) + f(x+t,y-z) + f(x-t,y-z) - 4f(x,y).$$

Пусть теперь

$$T_{\Lambda,\Lambda}(x,y) = \sum_{|\lambda_m|\leqslant\Lambda}\sum_{|\mu_n|\leqslant\Lambda} B_{m,n}\exp(i(\lambda_m x + \mu_n y))$$

— произвольный тригонометрический полином и $0 < \Lambda < a < \sigma$. Тогда в силу леммы 1 имеет место равенство

$$T_{\Lambda,\Lambda}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T_{\Lambda,\Lambda}(x+t,y+z)\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz.$$

Покажем, что для полинома $T_{\Lambda,\Lambda}(x,y)$ имеет место соотношение

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \Omega_{x,y}(T_{\Lambda,\Lambda};t,z)\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz=0.$$

Действительно, на основании (2.5) имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \Omega_{x,y}(T_{\Lambda,\Lambda};t,z)\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz\\
&\qquad=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \Big[T_{\Lambda,\Lambda}(x+t,y+z)+T_{\Lambda,\Lambda}(x-t,y+z)+T_{\Lambda,\Lambda}(x+t,y-z)\\
&\qquad\qquad+T_{\Lambda,\Lambda}(x-t,y-z)-4T_{\Lambda,\Lambda}(x,y)\Big]\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz\\
&\qquad=\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty T_{\Lambda,\Lambda}(x+t,y+z)\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz-\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty T_{\Lambda,\Lambda}(x,y)\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz\\
&\qquad\qquad=T_{\Lambda,\Lambda}(x,y)-T_{\Lambda,\Lambda}(x,y)\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty \Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz=0.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\Delta_\sigma(f;x,y)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \Omega_{x,y}\Big[(f-T_{\Lambda,\Lambda});t;z\Big]\Phi_\sigma(t,z)\,dt\,dz. \tag{2.9}$$

Пусть теперь $T_{\Lambda,\Lambda}(x,y)$ — полином, осуществляющий наилучшее приближение порядка Λ, т. е.

$$\|f(x,y)-T_{\Lambda,\Lambda}(x,y)\|_B=E_{\Lambda,\Lambda}(f)_B.$$

Тогда

$$\|\Omega_{x,y}[(f-T_{\Lambda,\Lambda});t;z]\|_B\leqslant 8E_{\Lambda,\Lambda}(f)_B. \tag{2.10}$$

Из (2.7), (2.10) и (2.9) получаем оценку (2.8), что и доказывает теорему 1. ▷

Теперь докажем утверждение, которое является аналогом результата Л. В. Жижиашвили [2] и дает оценку снизу величины (1.2) для функций $f(x,y)\in B$.

Теорема 2. *Пусть $f(x,y)$ — равномерная почти периодическая функция с показателями Фурье, имеющими предельные точки на бесконечности, т. е. $\lambda_m\to\infty$, $\mu_n\to\infty$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\|f(x,y)-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n S_{k,k}(f;x,y)\right\|_B\leqslant\frac{C}{n+1}\sum_{k=0}^n E_{k,k}(f)_B,$$

где C — константа, а величина $E_{k,k}(f)_B$ определена в формулировке теоремы 1.

$\lhd$ Пусть $2^m \leqslant n \leqslant 2^{m+1}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
R_n(f)_B &= \left\| f(x,y) - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_{k,k}(f;x,y) \right\|_B \\
&= \left\| \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\Big(f(x,y) - S_{k,k}(f;x,y)\Big) \right\|_B \\
&= \left\| \frac{1}{n+1}\left[\sum_{\nu=0}^{m-1}\sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}\Big(f(x,y) - S_{k,k}(f;x,y)\Big) + f(x,y) \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - S_{0,0}(f;x,y) + \sum_{k=2^m}^{n}\Big(f(x,y) - S_{k,k}(f;x,y)\Big)\right]\right\|_B \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\left\|\sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu \frac{1}{2^\nu}\sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}\Big(f(x,y) - S_{k,k}(f;x,y)\Big)\right\|_B \\
&+ \frac{1}{n+1}\left\|\Big(f(x,y) - S_{0,0}(f;x,y)\Big)\right\|_B + \frac{1}{n+1}\left\|\sum_{k=2^m}^{n}\Big(f(x,y) - S_{k,k}(f;x,y)\Big)\right\|_B .
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Пусть $S_{k,k}(f;x,y)$ — полином, осуществляющий наилучшее приближение порядка $2^\nu - 1$, т. е.

$$
\left\|\sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}\Big(f(x,y) - S_{k,k}(f;x,y)\Big)\right\|_B \leqslant CE_{2^\nu-1,2^\nu-1}(f)_B. \tag{2.12}
$$

Тогда

$$
\left\|\sum_{k=2^\nu}^{n}\Big(f(x,y) - S_{k,k}(f;x,y)\Big)\right\|_B \leqslant C(n-2^m)E_{2^m-1,2^m-1}(f)_B. \tag{2.13}
$$

Из соотношений (2.12), (2.13) и (2.11) получим

$$
\begin{aligned}
R_n(f)_B &\leqslant \frac{C}{n+1}\sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu E_{2^\nu-1,2^\nu-1}(f)_B + \frac{1}{n+1}E_{0,0}(f)_B + C\frac{n-2^m}{n+1}E_{2^m-1,2^m-1}(f)_B \\
&\leqslant \frac{C}{n+1}\sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu E_{2^\nu-1,2^\nu-1}(f)_B + \frac{1}{n+1}E_{0,0}(f)_B + C\frac{2^m}{n+1}E_{2^m-1,2^m-1}(f)_B \\
&\leqslant \frac{C_1}{n+1}\sum_{k=1}^{2^m} E_{k,k}(f)_B + \frac{1}{n+1}E_{0,0}(f)_B \leqslant \frac{C_1}{n+1}\sum_{k=0}^{2^m} E_{k,k}(f)_B \leqslant \frac{C_2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} E_{k,k}(f)_B. \rhd
\end{aligned}
$$

В заключение отметим, что теоремы 1 и 2 приводились ранее автором без доказательства в работе [7].

Литература

1. *Marcinkewisz I.* Sur une method remarquable de soummation des series doubles de Fourier // Collecfed papers.—Warszawa, 1964.—P. 527–538.
2. *Жижиашвили Л. В.* О суммировании двойных рядов Фурье // Сиб. мат. журн.—1967.—Т. 8, № 3.—С. 548–564.

3. *Taberski R.* Abel summability of double Fourier series // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Msth. Astron. Et phys.—1970.—Vol. 18, № 6.—P. 307–314.
4. *Тиман М. Ф., Гаймназаров Г.* Уклонение периодических функций двух переменных от некоторых полиномов // Докл. АН Тадж. ССР.—1972.—Т. 15, № 5.—С. 6–8.
5. *Тиман М. Ф., Пономаренко В. Г.* О приближении периодических функций двух переменных суммами типа Марцинкевича // Изв. вузов. Математика.—1975.—№ 9.—С. 59–67.
6. *Пономаренко В. Г.* О приближении функций, равномерно непрерывных на всей вещественной плоскости // Сиб. мат. журн.—1975.—Т. 16, № 1.—С. 86–97.
7. *Хасанов Ю. Х.* О приближении почти периодических функций двух переменных // Изв. вузов. Математика.—2010.—№ 12.—С. 82–86.

Статья поступила 26 октября 2016 г.

Хасанов Юсуфали Хасанович
Российско-Таджикский (славянский) университет,
профессор кафедры информатики и информационных систем
ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, ул. М. Турсунзода, д. 30
E-mail: yukhas60@mail.ru

ON APPROXIMATION OF ALMOST PERIODIC FUNCTIONS BY SOME SUMS

Khasanov Yu. Kh.

In this paper we study some questions of approximating almost periodic functions of two variables by partial Fourier sums and Marcinkiewicz type sums in the uniform metric, provided that the Fourier exponents of the functions under consideration have a limit point at infinity. More precisely, we consider a uniform almost periodic function of two variables whose Fourier exponents have a unique limit point at infinity. It is proved that the partial sum of this series with the weight function $\Phi_\sigma(t, z)$ ($\sigma > 0$) admits an integral representation. As a weight function, we take an arbitrary real continuous even function $\Phi_\sigma(t, z)$ that takes the value 1 for $t = 0$ and $z = 0$ and vanishes when either $|t| \geqslant \sigma$ or $|z| \geqslant \sigma$. First, we prove almost periodicity of the function $f(x, y)$ and using the Fourier inversion formula we define the Fourier coefficients of this function. Then, we examine the deviation of the given function $f(x, y)$ from partial sums of its Fourier series, depending on the speed of tending to zero of value of the best approximation by trigonometric polynomial of limited degree. Similarly, we obtain the upper bound of the deviation value of uniform almost-periodic functions from sums of Marcinkiewicz type.

Key words: almost periodic function, approximation of functions, sums of Marcinkiewicz type, Fourier coefficients, Fourier exponents, limit points in infinity.

References

1. *Marcinkewisz I.* Sur une Method Remarquable de Soummation des Series Doubles de Fourier, *Collecfed Papers*, Warszawa, 1964, pp. 527–538.
2. *Zhizhiashvily L. V.* About Summability of Double Fourier Series, *Sibirskij matematicheskij zhurnal* [*Siberian Math. J.*], 1967, vol. 8, no. 3, pp. 548–564 (in Russian).
3. *Taberski R.* Abel Summability of Double Fourier Series, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Msth. Astron. Et phys.*, 1970, vol. 18, no. 6, pp. 307–314.
4. *Timan M. F., Gaimnazarov G.* Approximation of periodic functions of two variables by some polynomials, *Doklady academii nauk Respubliky Tajikistan* [*Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*], 1972, vol. 15, no. 5, pp. 6–8 (in Russian).
5. *Timan M. F., Ponomarenko V. G.* Approximation of periodic functions of two variables by Marcinkiewicz type sums, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenij. Matematika*, 1975, no. 9, pp. 59–67 (in Russian).

6. *Ponomarenko V. G.* Approximation of functions, uniformly continuous on whole real plane, *Sibirskij matematicheskij zhurnal* [*Siberian Math. J.*], 1975, vol. 16, no. 1, pp. 86–97 (in Russian).
7. *Khasanov Yu. Kh.* Approximation of almost periodic functions of two variables, *Russian Mathematics*, 2010, vol. 54, no. 12, pp. 72–75. DOI 10.3103/S1066369X1012008X.

Received October 26, 2016

Khasanov Yusufali Kh.
Russian and Tajik (Slavonic) University,,
Professor of Department of Informatics and Information Systems
30 M. Tursunzoda st., Dushanbe, 734025, Tajikistan
E-mail: yukhas60@mail.ru