Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 61–68

УДК **517.98**

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ JBW-ФАКТОРОВ

М. М. Ибрагимов, К. К. Кудайбергенов, Ж. Х. Сейпуллаев

Посвящается памяти профессора
Иномжона Гуламджановича Ганиева

Одной из интересных задач теории операторных алгебр является геометрическая характеризация пространств состояний йордановых операторных алгебр. В середине 80-х гг. прошлого века появилась работа Я. Фридмана и Б. Руссо, в которой были введены гранево симметричные пространства, основной целью введения которых является геометрическая характеризация предсопряженных пространств JB*-троек, допускающих алгебраическую структуру. Многие из свойств, требуемых в этих характеризациях, являются естественными предположениями для пространств состояний физических систем. Такие пространства рассматриваются как геометрическая модель для состояний квантовой механики. Я. Фридман и Б. Руссо показали, что предсопряженное пространство для комплексных алгебры фон Неймана и более общих JB*-троек является нейтральным сильно гранево симметричным пространством. В связи с этим Я. Фридман и Б. Руссо в основном изучали нейтральные гранево симметричные пространства, и в этих пространствах получили результаты, которые были раньше известны для предсопряженных пространств. В 2004 г. М. Нейл и Б. Руссо дали геометрические характеризации предсопряженных пространств комплексных JBW*-троек в классе гранево симметричных пространств. В тоже время описание вещественных JBW*-троек остается открытым вопросом.

Настоящая работа посвящена исследованию предсопряженных пространств вещественных JBW-факторов. Доказано, что предсопряженное пространство вещественного JBW-фактора является сильно гранево симметричным пространством в том и только в том случае, когда он либо абелев, либо является спин-фактором.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11398.

Ключевые слова: банахово пространство, гранево симметричное пространство, JBW-алгебра, JBW-фактор, грань.

Введение

Исследования гранево симметричных пространств связаны с геометрической характеризацией предсопряженных пространств JBW*-троек, допускающих алгебраическую структуру, и восходят к работам Я. Фридмана и Б. Руссо [1, 2]. Аксиомы, требуемые в этих характеризациях, являются естественными предположениями для пространств состояний физических систем. Такие пространства рассматриваются как геометрические модели для состояний квантовой механики. Естественно, что предсопряженные пространства для комплексных алгебр фон Неймана и более общих JBW*-троек являются нейтральными сильно гранево симметричными пространствами [3].

В работе [4] были даны геометрическая характеризация комплексных гильбертовых пространств и комплексных спин-факторов, а также дано описание JBW*-троек рангов 1 и 2, факторов Картана типа 1 и 4. Позже Я. Фридман и Б. Руссо в работе [5] получили описание атомических гранево симметричных пространств, и было показано, что нейтральное, сильно гранево симметричное пространство изометрически изоморфно предсопряженному пространству одного из факторов Картана типа 1–6. М. Нейл и Б. Руссо в [6] нашли геометрические условия, при которых гранево симметричное пространство является изометричным предсопряженному пространству JBW*-тройки. В работе [7] доказано, что предсопряженное вещественной части алгебры фон Неймана является сильно гранево симметричным пространством в том и только в том случае, когда оно есть прямая сумма абелевой алгебры и алгебры типа I_2.

Настоящая работа посвящена исследованию предсопряженных пространств вещественных JBW-факторов. Доказано, что предсопряженное пространство вещественного JBW-фактора является сильно гранево симметричным пространством в том и только в том случае, когда он абелев или спин-фактор.

1. Предварительные сведения

В этом параграфе мы даем необходимые сведения о гранево симметричных пространствах и вещественных JBW-факторах (подробно см. [2, 8]).

Пусть Z — нормированное пространство. Элементы $x, y \in Z$ называются *ортогональными,* обозначение $x\diamondsuit y$, если

$$\|x+y\| = \|x-y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Для подмножества S пространства Z положим

$$S^{\diamondsuit} = \{x \in Z:\ x\diamondsuit y\ (\forall\, y \in S)\}$$

и назовем $S^{\diamondsuit}$ *ортогональным дополнением* к S. Выпуклое подмножество F единичного шара $Z_1 = \{x \in Z:\ \|x\| \leqslant 1\}$ называется *гранью*, если включение $\lambda y + (1-\lambda)z \in F$, где $y, z \in Z_1$, $\lambda \in (0,1)$, влечет $y, z \in F$. Грань F из Z_1 называется *выставленной по норме*, если

$$F = F_u = \{x \in Z_1:\ u(x) = 1\}$$

для некоторого $u \in Z^*$ с $\|u\| = 1$. Элемент $u \in Z^*$ называется *проективной единицей*, если $\|u\| = 1$ и $u(y) = 0$ при всех $y \in F_u^{\diamondsuit}$ (см. [1]).

Выставленная по норме грань F_u из Z_1 называется *симметричной гранью*, если существует линейная изометрия S_u из Z на Z такая, что $S_u^2 = I$, и множество неподвижных точек которой в точности совпадает с топологической прямой суммой замыкания $\overline{\mathrm{span}}\, F_u$ линейной оболочки грани F_u и ее ортогонального дополнения $F_u^{\diamondsuit}$.

Пространство Z называется *слабо гранево симметричным пространством* (WFS-*пространством*), если каждая выставленная по норме грань из Z_1 симметрична (см. [1]).

Проективная единица u из Z^* называется *геометрическим трипотентом*, если F_u является симметричной гранью и $S_u^* u = u$ для симметрии S_u соответствующей к F_u.

WFS-пространство Z называется *сильно гранево симметричным пространством* (SFS-*пространством*), если для каждой выставленной по норме грани F_u из Z_1 и каждого $v \in Z^*$ с $\|v\| = 1$ и $F_u \subset F_v$ мы имеем $S_u^* v = v$, где S_u — симметрия, соответствующая F_u (см. [1]).

Пример 1. Известно [3], что гильбертово пространство H является SFS-пространством. Всякий элемент $u \in H$ с нормой $\|u\| = 1$ является геометрическим трипотентом и $F_u = \{u\}$. Кроме того, симметрия S_u, соответствующая грани F_u, определяется следующим образом:

$$S_u(\lambda u + x) = \lambda u - x, \quad \lambda u + x \in \overline{\operatorname{span}}\,\{u\} \oplus u^{\perp} = H.$$

Банахово пространство A над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ называется *йордановой банаховой алгеброй* (JB-*алгеброй*), если в A введена операция умножения $x \circ y$ $(x, y \in A)$, удовлетворяющая условиям (см. [8]):

1) $x \circ y = y \circ x$ для любых $x, y \in A$;

2) $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$ для любых $x, y \in A$;

3) $\lambda(x \circ y) = (\lambda x) \circ y$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x, y \in A$;

4) $x^2 \circ (y \circ x) = (x^2 \circ y) \circ x$ для любых $x, y \in A$;

5) $\|x^2\| = \|x\|^2$ для любых $x \in A$;

6) $\|x^2\| \leqslant \|x^2 + y^2\|$ для любых $x, y \in A$.

JB-алгебра A называется JBW-*алгеброй*, если она обладает предсопряженным пространством, т. е. существует такое нормированное пространство A_*, что $(A_*)^* = A$. Элементы $x, y \in A$ называются *совместными* $(x \leftrightarrow y)$, если $x \circ (x \circ y) = x^2 \circ y$. Множество $Z(A) = \{x \in A : \ x \leftrightarrow y, \, \forall\, y \in A\}$ называется *центром* A. Если $Z(A) = \{\lambda \mathbf{1}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, то A называется JBW-фактором. Проекторы e и f из JBW-алгебры A называются *связанными через симметрию*, если существует такая симметрия s, что $ses = f$.

JBW-алгебра A имеет

1) тип I, если в ней существует точный абелев проектор;

2) тип II, если она содержит точный модулярный проектор и не содержит ненулевых абелевых проекторов;

3) тип III, если она не содержит ненулевых модулярных проекторов.

Пусть H — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$, $x, y \in H$. Рассмотрим декартово произведение $A = \mathbb{R} \times H = \{(\alpha, x) : \ \alpha \in \mathbb{R}, x \in H\}$ и определим в A произведение

$$(\alpha, x) \circ (\beta, y) = (\alpha\beta + \langle x, y\rangle, \alpha y + \beta x),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in H$. Норму в A определим по формуле

$$\|(\alpha, x)\| = |\alpha| + \|x\|_2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ x \in H.$$

С этим произведением и нормой алгебра A является JBW-фактором с единицей $\mathbf{1} = (1, 0)$, который называется *спин-фактором* (см. [8]).

Заметим, что $(\mathbb{R} \times H, \|\cdot\|)^* = (\mathbb{R} \times H, \|\cdot\|_\infty)$, где $\|(\beta, y)\|_\infty = \max\{|\beta|, \|y\|_2\}$. Двойственность между A и его сопряженным A^* задается формулой

$$\langle (\alpha, x), (\beta, y)\rangle = \alpha\beta + \langle x, y\rangle.$$

Отметим, что в работе [9] изучены геометрические свойства конуса положительных элементов в абстрактном спин-факторе. Установлена равносильность алгебраической ортогональности и ортогональности по Роберу.

2. Основной результат

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть A_* — предсопряженное пространство к JBW-фактору A. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *A_* является SFS-пространством*;

2) *$A = \mathbb{R}$ или A — спин-фактор.*

$\triangleleft$ Доказательство теоремы вытекает из нижеследующих лемм 1–3. $\triangleright$

Лемма 1. *Пусть A — спин-фактор. Тогда каждый геометрический трипотент $u \in A$ имеет один из следующих видов:*

а) $u = (\pm 1, 0)$;

б) $u = (0, a)$, *где* $\|a\|_2 = 1$;

в) $u = \left(\pm\frac{1}{2}, a\right)$, *где* $\|a\|_2 = \frac{1}{2}$.

$\triangleleft$ Пусть A — спин-фактор и $u \in A$, где $u = (\alpha, a), \|u\| = 1$. Так как $\|u\| = 1$, то достаточно рассмотреть следующие возможные три случая:

Случай 1. Если $|\alpha| = 1$, то $u = (\pm 1, 0)$. Пусть $u = (1, 0)$ и $\langle u, (\beta, y)\rangle = 1$, где $(\beta, y) \in A_{*1}$. Тогда

$$1 = \langle (1, 0), (\beta, y)\rangle = \beta.$$

Отсюда вытекает, что выставленная по норме грань F_u единичного шара A_{*1}, соответствующая u, имеет вид

$$F_u = \{(1, y) : \; y \in H, \; \|y\|_2 \leqslant 1\}.$$

Таким образом, $\overline{\operatorname{span}} \, F_u = A$ и $F_u^\diamond = \{0\}$. Поэтому $\langle u, F_u^\diamond\rangle = 0$, и u является проективной единицей. Так как $\overline{\operatorname{span}} \, F_u = A$, то отображение $S_u = I$ является изометрией на A_* соответствующей выставленной по норме грани F_u. Следовательно, $S_u^*(u) = u$. Значит, проективная единица u является геометрическим трипотентом. При $u = (-1, 0)$ рассуждения аналогичны.

Случай 2. Если $\|a\|_2 = 1$, то $u = (0, a)$. Пусть $\langle u, (\beta, y)\rangle = 1$, где $(\beta, y) \in A_{*1}$. Тогда

$$1 = \langle (0, a), (\beta, y)\rangle = \langle a, y\rangle.$$

Поэтому $y = a$ и выставленная по норме грань F_u единичного шара A_{*1}, соответствующая u, имеет вид

$$F_u = \{(\beta, a) : \; |\beta| \leqslant 1\}.$$

Отсюда $\overline{\operatorname{span}} \, F_u = \operatorname{span}\{(\pm 1, a)\}$. Пусть $(\gamma, z) \in F_u^\diamond$. Тогда по определении ортогональности получим

$$\max\{|\beta + \gamma|, \|a + z\|_2\} = \max\{|\beta - \gamma|, \|a - z\|_2\} = 1 + \max\{|\gamma|, \|z\|_2\}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\gamma = 0$ и $z = 0$. Это означает, что $F_u^\diamond = \{0\}$. Поэтому $\langle u, F_u^\diamond\rangle = 0$, и u является проективной единицей. Определим в A отображение S_u^* следующим образом:

$$S_u^*(\beta, y) = (\beta, S_a^* y),$$

где S_a^* — симметрия в гильбертовом пространстве H, соответствующая a (см. пример 1). Тогда из двойственности следует, что S_u, сопряженное к S_u^*, является изометрией на A_*, соответствующая выставленной по норме грани F_u такой, что $S_u^2 = I$, при этом, множество всех неподвижных точек для S_u совпадает с $\overline{\operatorname{span}}\, F_u \oplus F_u^{\diamond}$. Так как

$$S_u^*(u) = S_u^*(\alpha, a) = (\alpha, S_a^* a) = (\alpha, a) = u,$$

то проективная единица u является геометрическим трипотентом.

Случай 3. Пусть $|\alpha| \neq 1, \|a\|_2 \neq 1$ и $\langle u, (\beta, y)\rangle = 1$, где $(\beta, y) \in A_{*1}$. Тогда

$$1 = \alpha\beta + \langle a, y\rangle \leqslant |\alpha||\beta| + |\langle a, y\rangle| \leqslant |\alpha||\beta| + \|a\|_2\|y\|_2 \leqslant |\alpha| + \|a\|_2 = 1.$$

Отсюда $\|y\|_2 = |\beta| = 1$. Пусть $\beta = 1$. Тогда выставленная по норме грань F_u имеет вид

$$F_u = \{(1, y) :\ \|y\|_2 = 1\}.$$

Если $(\gamma, z) \in F_u^{\diamond}$, то по определению ортогональности имеем

$$\max\{|1+\gamma|, \|y+z\|_2\} = \max\{|1-\gamma|, \|y-z\|_2\} = 1 + \max\{|\gamma|, \|z\|_2\}.$$

Нетрудно видеть, что $z = -\gamma y$. Это означает, что

$$F_u^{\diamond} = \{(\gamma, z) :\ z = -\gamma y\}.$$

Покажем, что $\langle u, F_u^{\diamond}\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \frac{1}{2}$, $\|a\|_2 = \frac{1}{2}$.

Действительно, из равенства $\alpha\gamma - \gamma\langle a, y\rangle = 0$ вытекает, что $\alpha = \langle a, y\rangle$. Поэтому из $\alpha + \langle a, y\rangle = 1$ имеем $\alpha = \frac{1}{2}$.

С другой стороны, $|\alpha| + \|a\|_2 = 1$, и поэтому $\|a\|_2 = \frac{1}{2}$. Значит, элемент $u = \left(\frac{1}{2}, a\right)$, $\|a\|_2 = \frac{1}{2}$, является проективной единицей.

Из равенств

$$\langle 2a - y, 2a - y\rangle = 4(\|a\|_2)^2 - 4\langle a, y\rangle + (\|y\|_2)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0$$

вытекает, что $y = 2a$. Поэтому

$$F_u = \left\{(1, 2a) :\ \|a\|_2 = \frac{1}{2}\right\}.$$

Следовательно, $\overline{\operatorname{span}}\, F_u = \operatorname{span}\{(1, 2a)\}$ и $F_u^{\diamond} = \left\{(\gamma, -2\gamma a) :\ \|a\|_2 = \frac{1}{2}\right\}$.

Теперь, определив на A отображение S_u^*, как и в случае 2, получим, что $S_u^*(u) = u$. Это означает, что проективная единица u является геометрическим трипотентом.

Аналогично рассуждая при $\beta = -1$ имеем, что $u = \left(-\frac{1}{2}, a\right)$, $\|a\|_2 = \frac{1}{2}$, является геометрическим трипотентом. $\rhd$

Лемма 2. *Если A — спин-фактор, то A_* является SFS-пространством.*

$\lhd$ Из доказательства леммы 1 вытекает, что для всякого F_u из A_{*1} существует изометрия S_u такая, что $S_u^2 = I$, и множество всех неподвижных точек которой совпадает с $\overline{\operatorname{span}}\, F_u \oplus F_u^{\diamond}$. Поэтому A_* является WFS-пространством. Кроме того, так как всякая проективная единица $u \in A$ является геометрическим трипотентом, то в силу теоремы 1 из [10] следует, что WFS-пространство A_* является SFS-пространством. $\rhd$

Лемма 3. *Если A — JBW-фактор типа* I_n $(n \geqslant 3)$ *или* II *или* III, *то A_* не является WFS-пространством.*

$\lhd$ Если A — JBW-фактор типа I_n $(n \geqslant 3)$, то по определению существуют ненулевые связанные через симметрии взаимно ортогональные проектоы $e_1, e_2, e_3 \in A$.

Если A — JBW-фактор типа II или III, то в силу [8, гл. I, предложение 2.10] также существуют ненулевые связанные через симметрии взаимно ортогональные проектор $e_1, e_2, e_3 \in A$.

Положим $u = e_1 + e_2 - e_3$ и $e_4 = \mathbf{1} - e_1 - e_2 - e_3$. Пусть $A = \bigoplus\limits_{i,j=1}^{4} e_iAe_j$ — разложение Пирса алгебры A.

Достаточно рассмотреть два возможных случая:

Случай 1. Пусть $e_4 = 0$. Тогда S_u^* — сопряженное к симметрии S_u действует на $\bigoplus\limits_{i,j=1}^{3} e_iAe_j$ по правилу

$$S_u^* : \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12} & -x_{13} \\ -x_{21} & x_{22} & -x_{23} \\ -x_{31} & -x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Случай 2. Пусть $e_4 \neq 0$. Тогда S_u^* действует на $\bigoplus\limits_{i,j=1}^{4} e_iAe_j$ по правилу

$$S_u^* : \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12} & -x_{13} & -x_{14} \\ -x_{21} & x_{22} & -x_{23} & -x_{24} \\ -x_{31} & -x_{32} & x_{33} & -x_{34} \\ -x_{41} & -x_{42} & -x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}.$$

Возьмем элемент

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \bigoplus_{i,j=1}^{4} e_iAe_j,$$

при $e_4 = 0$, последние строка и столбец отсуствуют. Тогда

$$S_u^*(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\|x\| = 3$ и $\|S_u^*(x)\| = 2$. Это означает, что S_u^* не является изометрией на A. Следовательно, S_u также не является изометрией. Значит, выставленная по норме грань F_u не является симметричной. Поэтому A_* не является WFS-пространством. $\triangleright$

Литература

1. *Friedman Y., Russo B.* A geometric spectral theorem // Quart. J. Math. Oxford.—1986.—Vol. 37 (2).—P. 263–277. DOI: 10.1093/QMATH/37.3.263.
2. *Friedman Y., Russo B.* Affine structure of facially symmetric spaces // Math. Proc. Camb. Philos. Soc.—1989.—Vol. 106 (1).—P. 107–124. DOI: 10.1017/S030500410006802X.
3. *Friedman Y., Russo B.* Some affine geometric aspects of operator algebras // Pacif. J. Math.—1989.—Vol. 137 (1).—P. 123–144. DOI: 10.2140/pjm.1989.137.123.
4. *Friedman Y., Russo B.* Geometry of the dual ball of the spin factor // Proc. Lon. Math. Soc. III Ser.—1992.—Vol. 65 (1).—P. 142–174. DOI: 10.1112/plms/s3-65.1.142.

5. *Friedman Y., Russo B.* Classification of atomic facially symmetric spaces // Canad. J. Math.—1993.—Vol. 45 (1).—P. 33–87. DOI: 10.4153/CJM-1993-004-0.
6. *Neal M., Russo B.* State space of JB*-triples // Math. Ann.—2004.—Vol. 328 (4).—P. 585–624. DOI: 10.1112/plms/s3-65.1.142.
7. *Ибрагимов М. М., Кудайбергенов К. К., Сейпуллаев Ж. Х.* Гранево симметричные пространства и предсопряженные эрмитовой части алгебр фон Неймана // Изв. вузов. Математика.—2018.—№ 5.—С. 33–40.
8. *Аюпов Ш. А.* Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр.—Ташкент: Фан, 1986.—124 с.
9. *Коробова К. В., Худалов В. Т.* О порядковой структуре абстрактного спиин-фактора // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, вып. 1.—С. 46–57.
10. *Ядгоров Н. Ж.* Слабо и сильно гранево симметричные пространства // Докл. АН РУз.—1996.—Т. 5.—С. 6–8.

Статья поступила 5 декабря 2017 г.

Ибрагимов Мухтар Мамутович
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха,
доцент кафедры функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 230113, Нукус, ул. Академика Ч. Абдирова, 1
E-mail: `mukhtar_nukus@mail.ru`

Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха,
заведующий кафедрой функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 230113, Нукус, ул. Академика Ч. Абдирова, 1
E-mail: `karim2006@mail.ru`

Сейпуллаев Жумабек Хамидуллаевич
Институт математики им. В. И. Романовского АН НУз, *докторант*
УЗБЕКИСТАН, 100170, Ташкент, ул. Мирзо Улугбека, 81
E-mail: `jumabek81@mail.ru`

GEOMETRIC CHARACTERIZATION OF REAL JBW-FACTORS

Ibragimov M. M., Kudajbergenov K. K., Sejpullaev Zh. H.

One of the interesting problems in the theory of operator algebras is the geometric characterization of the state spaces of Jordan operator algebras. In the mid-1980s, Y. Friedman and B. Russo introduced the co-called facially symmetric spaces. The main purpose of introducing them is the geometric characterization of predual spaces of JB*-triples that admit an algebraic structure. Many of the properties required in these characterizations are natural assumptions for the state spaces of physical systems. Such spaces are considered as a geometric model for states of quantum mechanics. Y. Fridman and B. Russo showed that the predual space of a complex von Neumann algebra and more general JBW*-triple is a neutral strongly facially symmetric space. In this connection, Y. Friedman and B. Russo mainly studied neutral facially symmetric spaces, and in these spaces they obtained results that were previously known for the aforementioned predual spaces. In 2004, M. Neal and B. Russo gave geometric characterizations of the predual spaces of complex JBW*-triples in the class of facially symmetric spaces. At the same time, the description of real JBW*-triples remains an open question. The present paper is devoted to the study of predual spaces of real JBW-factors. It is proved that the predual space of a real JBW-factor is a strongly facially symmetric space if and only if it either is abelian or is a spin-factor.

Key words: Banach space, facially symmetric space, JBW-algebra, JBW-factor, face.

References

1. *Friedman Y., Russo B.* A geometric spectral theorem, *Quart. J. Math. Oxford*, 1986, vol. 37, no. 2, pp. 263–277. DOI: 10.1093/QMATH/37.3.263.
2. *Friedman Y., Russo B.* Affine structure of facially symmetric spaces, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1989, vol. 106, no. 1, pp. 107–124. DOI: 10.1017/S030500410006802X.
3. *Friedman Y., Russo B.* Some affine geometric aspects of operator algebras, *Pacif. J. Math.*, 1989, vol. 137, no. 1, pp. 123–144. DOI: 10.2140/pjm.1989.137.123.
4. *Friedman Y., Russo B.* Geometry of the dual ball of the spin factor, *Proc. Lon. Math. Soc.*, 1992, vol. 65, no. 3, pp. 142–174. DOI: 10.1112/plms/s3-65.1.142.
5. *Friedman Y., Russo B.* Classification of atomic facially symmetric spaces, *Canad. J. Math.*, 1993, vol. 45, no. 1, pp. 33–87. DOI: 10.4153/CJM-1993-004-0.
6. *Neal M., Russo B.* State space of JB^*-triples, *Math. Ann.*, 2004, vol. 328, no. 4, pp. 585–624. DOI: 10.1112/plms/s3-65.1.142.
7. *Ibragimov M. M., Kudayberegenov K. K., Seypullaev J. X.* Facially symmetric spaces and preduals of a hermitian part of von Neumann algebras, *Izvestija vuzov. Matematika* [*Russian Math.*], 2018, no. 5, pp. 33–40 (in Russian).
8. *Ayupov Sh. A. Classification and Representation of Ordered Jordan Algebras*, Tashkent, Fan, 1986, 121 p. (in Russian).
9. *Korobova K. B., Xudalov V. T.* On ordered structure of abstract spin-factor, Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal [Vladikavkaz Math. J.], 2004, vol. 6, no. 1, pp. 46–57 (in Russian).
10. *Yadgorov N. J.* Weakly and strongly facially symmetric spaces, *Dokl. AN RUz*, 1996, no. 5, pp. 6–8 (in Russian).

Received December 5, 2017

Ibragimov Mukhtar Mamutovich
Karakalpak state university named after Berdakh,
Docent of the Department Functional analysis
1 Academician Ch. Abdirov str., Nukus, 230113, Uzbekistan
E-mail: mukhtar_nukus@mail.ru

Kudaybergenov Karimberegn Kadirbergenovich
Karakalpak state university named after Berdakh,
Head of the Department Functional analysis
1 Academician Ch. Abdirov str., Nukus, 230113, Uzbekistan
E-mail: karim2006@mail.ru
ORCID: orcid.org/0000-0003-0311-9683

Seipullaev Jumabek Xamidullaevich
V. I. Romanovski Institute of Mathematics, *Doctorant*
81 Mirzo Ulughbek str., Tashkent, 100170, Uzbekistan
E-mail: jumabek81@mail.ru