Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 76–91

УДК 517.518.85
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23390

СХОДИМОСТЬ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА — ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

А. Ю. Трынин[1]
[1] Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: atrynin@gmail.com

Аннотация. Установлена равномерная сходимость внутри интервала $(a,b) \subset [0,\pi]$ процессов Лагранжа, построенных по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля $L_n^{SL}(f,x) = \sum_{k=1}^n f(x_{k,n})\frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})}$. (Здесь через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} < \pi$ обозначены нули собственной функции U_n задачи Штурма — Лиувилля.) Непрерывные на $[0,\pi]$ функции f ограниченной вариации на $(a,b) \subset [0,\pi]$ могут быть равномерно приближены внутри интервала $(a,b) \subset [0,\pi]$. Получен признак равномерной сходимости внутри интервала (a,b) интерполяционных процессов, построенных по собственным функциям регулярной задачи Штурма — Лиувилля. Условие признака сформулировано в терминах максимума суммы модулей разделенных разностей функции f. Вне интервала (a,b) построенный интерполяционный процесс может расходиться. Установлена ограниченность в совокупности фундаментальных функций Лагранжа, построенных по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля. Рассмотрен случай регулярной задачи Штурма — Лиувилля с непрерывным потенциалом ограниченной вариации. Изучены краевые условия задачи Штурма — Лиувилля третьего рода без условий Дирихле. При наличии сервисных функций вычисления собственных функций регулярной задачи Штурма — Лиувилля изучаемый оператор Лагранжа — Штурма — Лиувилля легко реализуется на вычислительной технике.

Ключевые слова: равномерная сходимость, синк приближения, ограниченная вариация, процессы Лагранжа — Штурма — Лиувилля.

Mathematical Subject Classification (2000): 41A05, 41A58, 94A12.

Образец цитирования: *Трынин А. Ю.* Сходимость процессов Лагранжа — Штурма — Лиувилля для непрерывных функций ограниченной вариации // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 76–91. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23390.

1. Введение

В отличие от подхода Крамера [1], положившего начало изучению аппроксимативных свойств лагранжевых операторов с узлами интерполирования в собственных значениях задачи Штурма — Лиувилля, Г. И. Натансон в [2] получил признак Дини — Липшица равномерной сходимости внутри интервала $(0,\pi)$, т. е. равномерной на любом компакте, содержащемся в $(0,\pi)$, процессов Лагранжа — Штурма — Лиувилля вида

$$L_n^{SL}(f,x) = \sum_{k=1}^n f(x_{k,n})\frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})} = \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}) l_{k,n}^{SL}(x). \tag{1.1}$$

Где U_n есть n-ая собственная функция регулярной задачи Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} U'' + [\lambda - q]U = 0, \\ U'(0) - hU(0) = 0, \\ U'(\pi) + HU(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

с непрерывным потенциалом q ограниченной вариации на $[0, \pi]$ и граничными условиями, гарантирующими, что главный член в асимптотических формулах для U_n будет косинусом, т. е. $h \neq \pm\infty$, $H \neq \pm\infty$. Здесь через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} < \pi$ обозначены нули функции U_n.

Свойства операторов интерполирования функций вида (1.1) тесно переплетаются с поведением так называемых синк-приближений

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right), \tag{1.3}$$

используемых в теореме отсчетов Уиттекера — Котельникова — Шеннона (см. [3–6]). Оператор (1.3) представляет собой оператор (1.1), построенный по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля (1.3), в случае нулевого потенциала и краевых условий первого рода. Достаточно подробный обзор результатов, полученных в области исследования свойств синк-аппроксимаций (1.3) аналитических на действительной оси функции, экспоненциально убывающих на бесконечности, а также наиболее важные приложения синк-аппроксимаций можно найти, например, в [5].

Синк-приближения активно используются при построении различных численных методов математической физики и приближения функций как одной так и нескольких переменных [6–25] в теории квадратурных и кубатурных формул [5] и всплесков или теории вейвлет-преобразований [3, 4, 6].

До появления работ [11, 12, 14, 16–19, 22] приближение такими операторами на отрезке или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций (см., например, [5]) сведением к случаю оси с помощью конформного отображения. В [19] получена оценка сверху наилучшего приближения непрерывных функций комбинациями синков.

В [20] установлено, что при попытке приближения негладких непрерывных функций значениями операторов (1.3) возможно появление резонанса, приводящего к неограниченному росту погрешности аппроксимации на всем интервале $(0, \pi)$. В [21–25] предложены различные модификации синк-приближений (1.3), позволяющие аппроксимировать непрерывные функции на отрезке $[0, \pi]$. Исследование полноты системы синков (1.3) в [24] в пространствах $C[0, \pi]$ и $C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi],\ f(0) = f(\pi) = 0\}$ позволяет сделать вывод о бесполезности попыток построить сумматорный оператор из синков, допускающий возможность равномерной аппроксимации произвольной непрерывной функции на отрезке.

Изучение операторов Лагранжа — Штурма — Лиувилля (1.1) также тесно связано с исследованием аппроксимативных свойств операторов интерполирования, построенных по решениям задач Коши с линейными дифференциальными выражениями второго порядка [26]. Операторы, предложенные в [26], являются обобщением операторов Лагранжа — Штурма — Лиувилля (1.1) и классических синк-приближений (1.3) одновременно. В [27] приводятся некоторые приложения результатов работы [26] к исследованию аппроксимативных свойств классических алгебраических интерполяционных многочленов Лагранжа с матрицей узлов интерполирования, каждая строка которой состоит из нулей многочленов Якоби $P_n^{\alpha_n, \beta_n}$ с параметрами, зависящими от n.

Изучению различных свойств операторов Лагранжа — Штурма — Лиувилля (1.1) посвящены также работы [28–34]. В работе [31] устанавливается существование непрерывной на $[0,\pi]$ функции, интерполяционный процесс Лагранжа — Штурма — Лиувилля (1.1) которой неограниченно расходится почти всюду на $[0,\pi]$. Исследования, проведенные в [28–30], показывают, что задача представления непрерывной функции как предела значений операторов (1.1) некорректна по Адамару.

В монографии [34] приведены более подробные доказательства и исправлены опечатки, обнаруженные в некоторых формулах более ранних публикаций.

В настоящей работе, используя концепции исследований в [35–42], установлена равномерная внутри интервала (a,b) сходимость интерполяционных процессов (1.1), построенных по решениям задачи Штурма — Лиувилля (1.2) для непрерывных на $[0,\pi]$ и имеющих ограниченное изменение на $[a,b]$ функций f.

В этой работе будем считать потенциал q задачи Штурма — Лиувилля (1.2) непрерывной функцией с ограниченным изменением на $[0,\pi]$. Пусть также каждая собственная функция будет удовлетворять условию нормировки $U_n(0)=1$. Рассматриваем краевые условия (1.2) третьего рода, из которых исключены условия первого рода, т. е. $h\neq\pm\infty$, $H\neq\pm\infty$. Для любых $0\leqslant a<b\leqslant\pi$, $0<\varepsilon<(b-a)/2$ индексы p_1, p_2, m_1 и m_2 определим с помощью соотношений

$$\begin{gathered} x_{p_1,n}\leqslant a+\varepsilon<x_{p_1+1,n},\quad x_{p_2,n}\leqslant b-\varepsilon<x_{p_2+1,n},\\ x_{k_1-1,n}<a\leqslant x_{k_1,n},\quad x_{k_2+1,n}\leqslant b<x_{k_2+2,n},\\ m_1=\left[\frac{k_1}{2}\right]+1,\quad m_2=\left[\frac{k_2}{2}\right] \end{gathered}\tag{1.4}$$

после добавления к множеству нулей $x_{1,n}<x_{2,n}<\cdots<x_{n,n}$ n-ой собственной функции U_n точек $x_{0,n}=0$ и $x_{n+1,n}=\pi$. Здесь $[z]$ обозначает целую часть числа z. Если не оговорено иное, штрих у суммы в этой работе будет означать отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю.

Модуль непрерывности функции $f\in C[0,\pi]$ обозначим, как обычно,

$$\omega(f,\delta)=\sup_{\substack{|h|<\delta;\\ x,x+h\in[0,\pi]}}|f(x+h)-f(x)|.$$

Будем называть модулем изменения функции f на отрезке $[a,b]$ функцию натурального аргумента

$$v(n,f)=\sup_{T_n}\sum_{k=0}^{n-1}\bigl|f(t_{k+1})-f(t_k)\bigr|,$$

где $T_n=\{a\leqslant t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n\leqslant b\}$, $n\in\mathbb{N}$. Заметим, что функция f является функцией ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$, т. е. $f\in V[a,b]$, если существует константа M_f такая, что для любого натурального n справедливо неравенство $v(n,f)\leqslant M_f$.

Теорема 1.1. *Пусть $0\leqslant a<b\leqslant\pi$, $0<\varepsilon<(b-a)/2$. Для любой функции $f\in C[0,\pi]\cap V[a,b]$ выполняется соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\|f-L_n^{SL}(f,\cdot)\|_{C[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}=0,\tag{1.5}$$

где оператор Лагранжа — Штурма — Лиувилля $L_n^{SL}(f,\cdot)$ определен в (1.1).

Замечание 1.1. При этом на множестве $[0,\pi]\setminus[a,b]$ соотношение

$$\lim_{n\to\infty}|f(x)-L_n^{SL}(f,x)|=0$$

может вовсе не выполняться (см., например, [28, 31, 34]).

2. Вспомогательные утверждения

Прежде чем доказывать эту теорему убедимся в справедливости ряда вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1. *Пусть U_n — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n, регулярной задачи Штурма — Лиувилля* (1.2)*. Через $0<x_{1,n}<x_{2,n}<\dots<x_{n,n}<\pi$ обозначим нули функции U_n. Тогда имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$U_n(x)=\cos nx+\frac{\beta(x)}{n}\sin nx+O(n^{-2}),\tag{2.1}$$

$$U_n'(x)=-n\sin nx+\beta(x)\cos nx+O(n^{-1}),\tag{2.2}$$

$$U_n''(x)=-n^2\cos nx-n\beta(x)\sin nx+O(1),\tag{2.3}$$

$$U_n'(x_{k,n})=(-1)^kn+O(n^{-1}),\tag{2.4}$$

$$x_{k,n}=\frac{2k-1}{2n}\pi+n^{-2}\beta\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)+O(n^{-3}),\tag{2.5}$$

$$\sqrt{\lambda_n}=n+O(n^{-1}),\tag{2.6}$$

где

$$\beta(x)=-cx+h+\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(\tau)\,d\tau,$$

$c=\frac{1}{\pi}\left(h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\,d\tau\right)$, *а оценка остаточного члена во всех формулах* (2.1)–(2.5) *равномерна по $x\in[0,\pi]$ или $1\leqslant k\leqslant n$.*

$\lhd$ По поводу доказательства (2.1), (2.2) и (2.6) смотрите, например, [44]. Убедимся в справедливости (2.5). Пусть $x_{k,n}$ — k-ый нуль собственной функции U_n. Из асимптотической формулы (2.1) получаем соотношение

$$\left|\cos nx_{k,n}+\frac{\beta(x_{k,n})}{n}\sin nx_{k,n}\right|=O(n^{-2}).$$

Положив $\cos\alpha_{k,n}:=\frac{n}{\sqrt{n^2+\beta^2(x_{k,n})}}$, получим асимптотическую формулу

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+nx_{k,n}-\alpha_{k,n}\right)\right|=O(n^{-2}).$$

Следовательно, имеем соотношение $\left|\frac{\pi}{2}+nx_{k,n}-\alpha_{k,n}-\pi k\right|=O(n^{-2})$. Но функция β, по крайней мере, один раз непрерывно дифференцируема, поэтому имеет место асимптотическая формула

$$x_{k,n}=\frac{2k-1}{2n}\pi+n^{-2}\beta\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)+O(n^{-3}).$$

Формула (2.3) следует из (2.1) и (1.2), а (2.4) — из (2.2) и (2.5). $\rhd$

Замечание 2.1. Из асимптотической формулы (2.1) видно, что выбранная нормировка собственных функций U_n обеспечивает их ограниченность в совокупности. Обозначим

$$\mathbb{M} = \sup\bigl\{|U_n(x)| : x \in [0,\pi], n \in \mathbb{N}\bigr\} < \infty, \tag{2.7}$$

Пусть $\rho_\lambda = o\bigl(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\bigr)$ при $\lambda \to +\infty$. Считаем, что значения функции $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ для произвольного неотрицательного λ. Обозначим через q_λ произвольную функцию из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций ограниченной вариации, исчезающих в нуле, т. е.

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leqslant \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\biggl(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\biggr), \quad \lambda \to \infty,\ q_\lambda(0) = 0. \tag{2.8}$$

Для произвольного потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ при $\lambda \to +\infty$ нули решения задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + \bigl(\lambda - q_\lambda(x)\bigr)\, y = 0, \\ y(0,\lambda) = 1, \quad y'(0,\lambda) = h(\lambda), \end{cases} \tag{2.9}$$

или, при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leqslant \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\biggl(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\biggr), \quad \lambda \to \infty,\ q_\lambda(0) = 0,\ h(\lambda) \neq 0, \tag{2.10}$$

задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + \bigl(\lambda - q_\lambda(x)\bigr)y = 0, \\ y(0,\lambda) = 0, \quad y'(0,\lambda) = h(\lambda), \end{cases} \tag{2.11}$$

попадающих в отрезок $[0,\pi]$, пронумеруем следующим образом:

$$0 \leqslant x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \ldots < x_{n(\lambda),\lambda} \leqslant \pi \quad (x_{-1,\lambda} < 0, \quad x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi).$$

(Здесь $x_{-1,\lambda} < 0$, $x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi$ обозначают нули какого-либо продолжения решения задачи Коши (2.9) или (2.11) при сохранении ограниченности вариации потенциала q_λ вне $[0,\pi]$). В [26, 34] описано множество непрерывных на отрезке $[0,\pi]$ функций f, допускающих равномерную внутри интервала $(0,\pi)$ аппроксимацию значениями операторов следующего вида. Определим оператор, построенный по решениям задачи Коши (2.9) или (2.11), ставящий в соответствие каждой конечнозначной на множестве $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0,n=1}^{n,\infty}$ непрерывную функцию по правилу

$$S_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x - x_{k,\lambda})} f(x_{k,\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} s_{k,\lambda}(x) f(x_{k,\lambda}). \tag{2.12}$$

Очевидно, что значение оператора (2.12) интерполирует функцию f в узлах $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0}^n$.

Обозначим $C_0[0,\pi] = \{f : f \in C[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0\}$. При приближении с помощью операторов (1.1) функций $f \in C[0,\pi] \setminus C_0[0,\pi]$ вблизи концов отрезка $[0,\pi]$ возникает явление Гиббса (см., например, [21, теорема 2], [34]). Заметим, что эта проблема решается с помощью обобщения оператора (2.12), предложенного в [26, формула (1.9)], [34], вида

$$T_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x - x_{k,\lambda})} \biggl\{ f(x_{k,\lambda}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k,\lambda} - f(0) \biggr\} + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0),$$

где $y(x,\lambda)$ — решение задачи Коши (2.9) или (2.11) и $x_{k,\lambda}$ — нули этого решения.

В следующей лемме выделяется главная часть погрешности аппроксимации функций $f \in C_0[0,\pi]$ с помощью операторов вида (2.12).

Лемма 2.2 [26, предложение 9], [34]**.** *Пусть* $y(x,\lambda)$ *— решение задачи Коши* (2.9) *или* (2.11), *и предположим, что в случае задачи Коши* (2.9) *выполняются условия* (2.8), *а в случае задачи Коши* (2.11) *— условия* (2.10). *Если* $f \in C_0[0,\pi]$, *то равномерно на* $[0,\pi]$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(f(x)-S_\lambda(f,x)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\bigl(f(x_{k+1,\lambda})-f(x_{k,\lambda})\bigr)s_{k,\lambda}(x)\right)=0. \tag{2.13}$$

Далее, нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 2.3. *Пусть* U_n *— собственная функция, соответствующая собственному значению* λ_n, *регулярной задачи Штурма — Лиувилля* (1.2). *Тогда существует константа* C_1, *зависящая только от* q, h, H, *такая, что для всех* $x \in [0,\pi]$ *и всех* $n = 1,2,3,\dots$ *справедливо неравенство*

$$\bigl|l_{k,n}^{SL}(x)\bigr| = \left|\frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})}\right| \leqslant C_1. \tag{2.14}$$

$\lhd$ Если для каких либо $1 \leqslant k \leqslant n$ и $n \in \mathbb{N}$ окажется $x = x_{k,n}$, то $\bigl|l_{k,n}^{SL}(x)\bigr| = 1$. Рассмотрим теперь случай $x \neq x_{k,n}$. Пусть сначала $0 < |x-x_{k,n}| \leqslant n^{-1}$, $x \in [0,\pi]$. Тогда по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа из (2.3) и (2.4) следует неравенство

$$\bigl|l_{k,n}^{SL}(x)\bigr| \leqslant \left|\frac{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})+U_n''(\xi_{k,n})(x-x_{k,n})^2/2}{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})}\right| = 1+\frac{O(n^2)}{n+O(n^{-1})}\frac{1}{n} \leqslant C_{1,1}$$

для некоторой константы $C_{1,1}$, выбор которой зависит только от параметров задачи Штурма — Лиувилля q, h и H. Осталось рассмотреть случай $|x-x_{k,n}| > n^{-1}$, $x \in [0,\pi]$. В силу асимптотических формул (2.1) и (2.4) существует константа $C_{1,2}$, для которой справедливо неравенство

$$\bigl|l_{k,n}^{SL}(x)\bigr| \leqslant n\left|\frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})}\right| \leqslant \left|\frac{\cos nx+\frac{\beta(x)}{n}\sin nx+O(n^{-2})}{n+O(n^{-1})}\right| n \leqslant C_{1,2}.$$

Положив $C_1 = \max(C_{1,1}, C_{1,2})$, убедимся в справедливости леммы 2.3. $\rhd$

Лемма 2.4. *Существуют константа* C_2 *и номер* $n_0 \in \mathbb{N}$, *не зависящие от функции* $f \in C[0,\pi]$, $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$ *и* $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ *такие, что для произвольных* $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ *и* $n > n_0$ *справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2}\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]}\Bigl|\bigl(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\bigr)l_{k,n}^{SL}(x)\Bigr| \leqslant C_2\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\ln\frac{\pi}{\varepsilon}. \tag{2.15}$$

$\lhd$ Введем обозначение

$$\psi_{k,n} = f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n}), \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1;\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Учитывая, что $f \in C[0,\pi]$ и (2.5), убедимся, что существует константа C_3 такая, что справедлива оценка

$$|\psi_{k,n}| \leqslant C_3\omega\Bigl(f,\frac{\pi}{n}\Bigr), \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1;\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Возьмем произвольное $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Сумму в (2.15) представим в виде двух слагаемых, каждое из которых оценим следующим образом:

$$\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]} \left|\psi_{k,n} l^{SL}_{k,n}(x)\right| \leqslant C_3\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}|l^{SL}_{k,n}(x)| + \sum_{k=k_2+1}^{n-1}|l^{SL}_{k,n}(x)|\right).$$

Воспользовавшись (2.2), (2.4) и формулой конечных приращений Лагранжа, продолжим оценку суммы в (2.15) следующим образом:

$$\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]} \left|\psi_{k,n} l^{SL}_{k,n}(x)\right| \leqslant C_3\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\frac{|U_n(x)|}{n}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}\frac{1}{|x-x_{k,n}|} + \sum_{k=k_2+1}^{n}\frac{1}{|x-x_{k,n}|}\right)$$
$$+ C_3\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]}\left|\frac{|U_n(x)|}{|U_n'(x_{k,n})||x-x_{k,n}|} - \frac{|U_n(x)|}{n|x-x_{k,n}|}\right|$$
$$= C_3\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\frac{|U_n(x)|}{n}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}\frac{1}{|x-x_{k,n}|} + \sum_{k=k_2+1}^{n}\frac{1}{|x-x_{k,n}|}\right) + \omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)O(n^{-1}).$$

Из асимптотической формулы (2.5) для нулей собственных функций U_n находим номер n_0, выбор которого зависит только от параметров задачи Штурма — Лиувилля, начиная с которого будет выполняться неравенство

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n-1}|x_{k+1,n} - x_{k,n}| \geqslant \frac{\pi}{2n}. \tag{2.18}$$

В силу того, что $\max_{x\in(0,\pi)}\big\{\ln|x(\pi-x)|\big\} = 2\ln\frac{\pi}{2}$, $\inf\ln\frac{\pi}{\varepsilon} \geqslant \ln 2$, (2.7) и (2.18) сумму в (2.15) равномерно на всем отрезке $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ можно оценить таким образом:

$$\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]} \left|\psi_{k,n} l^{SL}_{k,n}(x)\right| \leqslant C_3\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\frac{|U_n(x)|}{n}$$
$$\times\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}\frac{1}{x_{k+1,n}-x_{k,n}}\int\limits_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}}\frac{dt}{x-t} + \sum_{k=k_2+1}^{n-1}\frac{1}{x_{k,n}-x_{k-1,n}}\int\limits_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}}\frac{dt}{t-x}\right)$$
$$+ \omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)O(n^{-1}) \leqslant \left(\frac{4C_3\mathbb{M}}{\pi} + \frac{1}{\ln\frac{\pi}{\varepsilon}}O(n^{-1})\right)\ln\frac{\pi}{\varepsilon}\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big). \tag{2.19}$$

Откуда следует существование константы C_2, выбор которой зависит только от параметров задачи Штурма — Лиувилля (1.2). $\rhd$

Для любых $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ обозначим

$$Q^*_n(f,[a,b],\varepsilon) := \max_{p_1\leqslant p\leqslant p_2}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\left|\frac{f(x_{2m+1,n}) - f(x_{2m,n})}{p-2m}\right|. \tag{2.20}$$

Лемма 2.5. *Если функция $f \in C[0,\pi]$, то из соотношения*

$$\lim_{\lambda\to\infty} Q^*_n(f,[a,b],\varepsilon) = 0 \tag{2.21}$$

следует утверждение (1.5).

$\lhd$ Заметим, что из (2.16), (2.2) и (2.4) вытекает равномерная на всем отрезке $[0,\pi]$ оценка

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=k_1}^{k_2}\big(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x)-\sum_{k=k_1}^{k_2}\psi_{k,n}\frac{(-1)^kU_n(x)}{n(x-x_{k,n})}\right|\\ \leqslant\sum_{k=k_1}^{k_2}|\psi_{k,n}|\left|\frac{U_n(x)}{(x-x_{k,n})}\right|\left|\frac{(-1)^kn-U_n'(x_{k,n})}{nU_n'(x_{k,n})}\right|=\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)O(n^{-1}).\end{aligned}\tag{2.22}$$

Положив в случае задачи Коши (2.9) $h(\lambda)\equiv h$, $\lambda=\lambda_n$, где λ_n — собственное значение задачи Штурма — Лиувилля (1.2), получим тождество $U_n(x)\equiv y(x,\lambda_n)$. Следовательно, значения операторов (1.1) и (2.12) при $\lambda=\lambda_n$ тождественно совпадают. Из (2.15), леммы 2.2 в случае задачи Коши (2.9) $\lambda=\lambda_n$ и (2.22) получаем соотношение

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-L_n^{SL}(f,x)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x)\right)\\ =\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-L_n^{SL}(f,x)-\frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2}\psi_{k,n}\frac{(-1)^kU_n(x)}{n(x-x_{k,n})}\right)=0.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Выберем и зафиксируем некоторое $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$. Найдем индекс $p=p(x,\lambda)$, для которого выполняется соотношение $x\in[x_{p,n},x_{p+1,n})$. Тогда $x=x_{p,n}+\alpha(x_{p+1,n}-x_{p,n})$, где $\alpha=\alpha(x,\lambda)\in[0,1)$, и

$$x-x_{k,n}=\frac{p-k+\alpha+\beta_{k,n}}{n}\pi.$$

Из (2.17) и (2.5) одновременно для всех $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ и настолько больших n, что для всех $1\leqslant k\leqslant n-1$ имеет место неравенство $|\beta_{k,n}|<1$, справедлива оценка

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\substack{k:k_1\leqslant k\leqslant k_2;\\ |p-k|\geqslant 3}}\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k+\alpha+\beta_{k,n}}-\sum_{\substack{k:k_1\leqslant k\leqslant k_2;\\ |p-k|\geqslant 3}}\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right|\\ \leqslant C_3\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\sum_{\substack{k:k_1\leqslant k\leqslant k_2;\\ |p-k|\geqslant 3}}\frac{\alpha}{|p-k|(|p-k|-2)}\leqslant 3C_3\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big).\end{aligned}\tag{2.24}$$

Учитывая обозначение (2.16) разобьем сумму в (2.23) на два слагаемых

$$\frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2}\big(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{k:k_1\leqslant k\leqslant k_2;\\ |p-k|\geqslant 3}}\psi_{k,n}l_{k,n}^{SL}(x)+\frac{1}{2}\sum_{\substack{k:k_1\leqslant k\leqslant k_2;\\ |p-k|<3}}\psi_{k,n}l_{k,n}^{SL}(x).\tag{2.25}$$

Следовательно, из неравенства треугольника, (2.14), (2.16), (2.17), (2.23) и (2.24) имеем равномерную по $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ оценку

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2}\big(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x)-\frac{U_n(x)}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\,\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right|=o(1).\tag{2.26}$$

Из (2.26) и (2.23) также равномерно по $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ вытекает соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) - L_n^{SL}(f,x) - \frac{U_n(x)}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right) = 0. \tag{2.27}$$

Оценим последнее слагаемое в соотношении (2.27), используя (2.1), (2.7), (2.17) и неравенство треугольника,

$$\left|\frac{U_n(x)}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right| \leqslant 2\,\frac{\mathbb{M}}{2\pi}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \left|\frac{\psi_{2m,n}}{p-2m}\right| + \frac{\mathbb{M}}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| + O\left(\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)\right). \tag{2.28}$$

Можно подобрать последовательность натуральных чисел $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую свойствам:

$$l_n = o(n), \quad \lim_{n\to\infty} l_n = \infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{l_n}\frac{1}{k} = 0. \tag{2.29}$$

Оценим вторую сумму в (2.28) следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\leqslant l_n}{}' \left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| + \frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|> l_n}{}' \left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right|. \tag{2.30}$$

Из неравенства (2.17) для достаточно больших n следует оценка

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\leqslant l_n}{}' \left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\leqslant l_n}{}' \left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| \leqslant \frac{C_3}{\pi}\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{l_n}\frac{1}{k}. \tag{2.31}$$

Вторая сумма в (2.30) после преобразования Абеля в случае $k \in [k_1, k_2] : |p-k| > l_n$ может быть оценена следующим образом

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|> l_n}{}' \left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| \leqslant \frac{4\|f\|_{C[a,b]}}{l_n+1} + 4\|f\|_{C[a,b]}\sum_{k=l_n}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Отсюда, из (2.29), (2.30) и (2.31) равномерно по $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ получаем асимптотическую формулу

$$\frac{\mathbb{M}}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| = o(1). \tag{2.32}$$

Теперь из (2.27), (2.28), (2.32) и неравенства треугольника получаем оценку

$$\left|f(x) - L_n^{SL}(f,x)\right| \leqslant \frac{\mathbb{M}}{\pi}\, Q_n^*(f, [a,b], \varepsilon) + o(1).$$

Следовательно, из выполнения условия (2.21) следует равномерная сходимость (1.5). $\triangleright$

3. Равномерная сходимость интерполяционных процессов Лагранжа — Штурма — Лиувилля внутри интервала (a, b)

Убедимся в справедливости утверждения сформулированной ранее теоремы 1.1.

$\lhd$ Доказательство теоремы 1.1. В силу непрерывности функции f на отрезке $[0, \pi]$, для любого положительного $\tilde{\epsilon}$ существуют натуральные числа ν и n_1 такие, что для всех $n \geqslant n_1$ $(n \in \mathbb{N})$ одновременно справедливы два соотношения

$$\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} < \frac{\tilde{\epsilon}}{6} \tag{3.1}$$

и

$$24 \, \|f\|_{C[a,b]} < \tilde{\epsilon}\nu. \tag{3.2}$$

Пусть $n \geqslant n_1$. Найдем индекс p_0, зависящий от n, a, b, ε и f на котором достигается максимум в определении (2.20), т. е.

$$Q_n^*(f, [a, b], \varepsilon) = {\sum_{m=m_1}^{m_2}}' \left| \frac{f(x_{2m+1,n}) - f(x_{2m,n})}{p_0 - 2m} \right|.$$

Обозначим

$$Q_n^{**}(f, [a, b], \varepsilon) := {\sum_{k=k_1}^{k_2}}' \left| \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{p_0 - k} \right|.$$

Так как $Q_n^{**}(f, [a, b], \varepsilon)$ получается из $Q_n^*(f, [a, b], \varepsilon)$ добавлением неотрицательных слагаемых, то для любого натурального n справедливо неравенство

$$Q_n^*(f, [a, b], \varepsilon) \leqslant Q_n^{**}(f, [a, b], \varepsilon). \tag{3.3}$$

Разобьем $Q_n^{**}(f, [a, b], \varepsilon)$ на два слагаемых

$$Q_n^{**}(f, [a, b], \varepsilon) = {\sum_{k=k_1}^{k_2}}' \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} - 2 {\sum_{k=k_1}^{k_2}}'' \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} = S_1(p_0) + S_2(p_0), \tag{3.4}$$

где два штриха означают, что в сумме неотрицательных слагаемых и слагаемого с индексом $k = p_0$ нет.

Сначала займемся оценкой первой суммы. Для чего представим ее в виде

$$S_1(p_0) = \sum_{\substack{k: k \in [k_1, k_2], \\ 0 < |p_0 - k| < \nu}} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} + \sum_{\substack{k: k \in [k_1, k_2], \\ |p_0 - k| \geqslant \nu}} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} = S_{1,1}(p_0) + S_{1,2}(p_0). \tag{3.5}$$

В случае $\{k : \, k \in [k_1, k_2], \; 0 < |p_0 - k| \geqslant \nu\} = \varnothing$ считаем второе слагаемое равным нулю.

Из неравенства (3.1) для всех $n \geqslant n_1$ имеем соотношение

$$|S_{1,1}(p_0)| \leqslant 2\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} < \frac{\tilde{\epsilon}}{3}. \tag{3.6}$$

Теперь оценим $S_{1,2}(p_0)$. Если для p_0 имеют место неравенства $p_0 - k_1 \geqslant \nu$ и $k_2 - p_0 \geqslant \nu$, то используем (3.2) и с помощью преобразования Абеля получим оценку

$$\begin{aligned} |S_{1,2}(p_0)| &\leqslant \left| \sum_{k=k_1}^{p_0-\nu} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{p_0 - k} \right| + \left| \sum_{k=p_0+\nu}^{k_2} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{k - p_0} \right| \\ &\leqslant 4\|f\|_{C[a,b]} \sum_{i=\nu}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{4\|f\|_{C[a,b]}}{\nu} \leqslant \frac{8\|f\|_{C[a,b]}}{\nu} < \frac{\tilde{\epsilon}}{3}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Точно также доказывается (3.7) в ситуации, когда индекс p_0 удовлетворяет одному из соотношений $p_0 - \nu < k_1 \leqslant p_0 < p_0 + \nu \leqslant k_2$ или $k_1 \leqslant p_0 - \nu < p_1 \leqslant k_2 < p_0 + \nu$. Из возможных вариантов остался случай, когда $p_0 - \nu < k_1 \leqslant p_1 \leqslant k_2 < p_0 + \nu$. В этой ситуации $|S_{1,2}(p_0)| = 0$.

Таким образом, из (3.5), (3.6) и (3.7) для всех $n \geqslant n_1$ имеем оценку

$$|S_1(p_0)| \leqslant \frac{2\tilde{\epsilon}}{3}. \tag{3.8}$$

Перейдем к изучению свойств суммы $S_2(p_0)$. Возьмем произвольное натуральное m : $1 \leqslant m \leqslant k_2 - k_1 - 2$ и представим $S_2(p_0)$ в виде двух слагаемых

$$\begin{aligned} S_2(p_0) = -2 &\sum_{\substack{k: k\in[k_1,k_2], \\ |p_0-k|\leqslant m}}{}'' \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} \\ &- 2 \sum_{\substack{k: k\in[k_1,k_2], \\ |p_0-k|> m}}{}'' \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} = S_{2,1}(p_0) + S_{2,2}(p_0). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Выберем достаточно большой номер $n_2 \geqslant n_1$, зависящий только от параметров задачи Штурма — Лиувилля, начиная с которого, в силу (2.5), будут выполняться неравенства $\max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_{k+1,n} - x_{k,n}| \leqslant \frac{3\pi}{2n}$. Функция $f \in C[0,\pi]$, начиная с n_2 будем иметь соотношение

$$|f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})| \leqslant 10K_f\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \tag{3.10}$$

Поэтому,

$$S_{2,1}(p_0) = 2 \sum_{\substack{k: k\in[k_1,k_2], \\ |p_0-k|\leqslant m}}{}'' \frac{|f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})|}{|p_0 - k|} \leqslant 10K_f\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}. \tag{3.11}$$

Далее оценим сумму $S_{2,2}(p_0)$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant S_{2,2}(p_0) \leqslant 2 &\sum_{k=k_1}^{p_0-m-1} \frac{-(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}))_-}{p_0 - k} \\ &+ 2 \sum_{k=p_0+m+1}^{k_2} \frac{-(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}))_-}{k - p_0}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

где $z_- = \frac{z-|z|}{2}$. Если $p_0 - m \leqslant k_1$ или $p_0 + m \geqslant k_2$, то в (3.12) исчезает соответственно первое или второе слагаемое. В случае $p_0 - m < k_1 < k_2 < p_0 + m$ сумма $S_{2,2}(p_0)$ в (3.9) вообще отсутствует. Учитывая то, что $f \in V[a,b]$, с помощью преобразования Абеля и (3.10) оценим (3.12)

$$0 \leqslant S_{2,2}(p_0) \leqslant 4M_f \sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1} \frac{v(k,f)}{k^2} + 10K_f\omega\biggl(f, \frac{\pi}{n}\biggr).$$

Отсюда (3.9), (3.11) и (3.12) имеем

$$0 \leqslant S_2(p_0) \leqslant 10K_f\omega\biggl(f, \frac{\pi}{n}\biggr) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + 4M_f \sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1} \frac{v(k,f)}{k^2} + 10K_f\omega\biggl(f, \frac{\pi}{n}\biggr).$$

Положив при каждом $n \geqslant n_2$ $m := l_n$, выбранное как в (2.29), получим, что в силу ограниченности последовательности $\{v(k,f)\}_{k=1}^{\infty}$ и сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v(k,f)/k^2$ существует номер $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 \geqslant n_2$, такой, что для произвольного $n \geqslant n_3$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant S_2(p_0) \leqslant \frac{\tilde{\epsilon}}{3}.$$

Отсюда и из (3.3), (3.4), (3.5), (3.8) получаем, что для произвольного $\tilde{\epsilon} > 0$ можно найти номер $n_3 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n > n_3$ будут справедливы неравенства $Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) \leqslant Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon) < \tilde{\epsilon}$. Теорема 1.1 доказана. $\rhd$

Литература

1. *Kramer H. P.* A generalized sampling theorem // J. Math. Phus.—1959.—Vol. 38.—P. 68–72.
2. *Натансон Г. И.* Об одном интерполяционном процессе // Ученые записки Ленинград. пед. ин-та.—1958.—Т. 166.—С. 213–219.
3. *Новиков И. Я., Стечкин С. Б.* Основы теории всплесков // Успехи мат. наук.—1998.—Т. 53, № 6 (324).—С. 53–128.
4. *Новиков И. Я., Стечкин С. Б.* Основные конструкции всплесков // Фундамент. и прикл. математика.—1997.—Т. 3, № 4.—С. 999–1028.
5. *Stenger F.* Numerical Metods Based on Sinc and Analytic Functions.—N. Y.: Springer, 1993.—565 p.
6. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам.—Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
7. *Oren E. Livne, Achi E. Brandt.* MuST: The multilevel sinc transform // SIAM J. Sci. Comput.—2011.—Vol. 33, № 4.—P. 1726–1738. DOI: 10.1137/100806904.
8. *Coroianu L., Sorin G. Gal.* Localization results for the non-truncated max-product sampling operators based on Fejer and sinc-type kernels // Demonstratio Mathematica.—2016.—Vol. 49, № 1.—P. 38–49.
9. *Richardson M., Trefethen L.* A sinc function analogue of Chebfun // SIAM J. Sci. Comput.—2011.—Vol. 33, № 5.—P. 2519–2535.
10. *Khosrow M., Yaser R., Hamed S.* Numerical Solution for First Kind Fredholm Integral Equations by Using Sinc Collocation Method // Int. J. Appl. Phy. Math.—2016.—Vol. 6, № 3.—P. 120–128.
11. *Трынин А. Ю.* Необходимые и достаточные условия равномерной на отрезке синк-аппроксимации функций ограниченной вариации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. серия. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2016.—Т. 16, № 3.—С. 288–298.
12. *Trynin A. Yu., Sklyarov V. P.* Error of sinc approximation of analytic functions on an interval // Sampling Theory in Signal and Image Processing.—2008.—Vol. 7, № 3.—P. 263–270.
13. *Marwa M. Tharwat.* Sinc approximation of eigenvalues of Sturm–Liouville problems with a Gaussian multiplier // Calcolo: a Quarterly on Numerical Analysis and Theory of Computation.—2014.—Vol. 51, № 3.—P. 465–484. DOI: 10.1007/s10092-013-0095-3.
14. *Трынин А. Ю.* Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам // Математика. Механика.—Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005.—Т. 7.—С. 124–127.

15. *Zayed A. I., Schmeisser G.* New Perspectives on Approximation and Sampling Theory, Applied and Numerical Harmonic Analysis.—N. Y.–Dordrecht–London: Springer Int. Publ. Switzerland, 2014. DOI: 10.1007/978-3-319-08801-3.
16. *Трынин А. Ю.* Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 5.—С. 1155–1166.
17. *Трынин А. Ю.* Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Мат. сб.—2007.—Т. 198, № 10.—С. 141–158.
18. *Трынин А. Ю.* Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // Изв. высш. учебных заведений. Математика.—2008.—№ 6.—С. 66–78.
19. *Sklyarov V. P.* On the best uniform sinc-approximation on a finite interval // East J. Approx.—2008—Vol. 14, № 2.—P. 183–192.
20. *Трынин А. Ю.* О расходимости синк-приближений всюду на $(0, \pi)$ // Алгебра и анализ.—2010.—Т. 22, № 4.—С. 232–256.
21. *Трынин А. Ю.* О некоторых свойствах синк-аппроксимаций непрерывных на отрезке функций // Уфимский мат. журн.—2015.—Т. 7, № 4.—С. 116–132.
22. *Шарапудинов И. И., Умаханов А. Я.* Интерполяция функций суммами Уиттекера их модификациями: условия равномерной сходимости // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 4.—С. 61–70.
23. *Шарапудинов И. И., Умаханов А. Я.* Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости // Материалы 18-й междунар. Саратовской зимней шк. «Современные проблемы теории функций и их приложения».—Саратов, 2016.—С. 332–334.
24. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций // Алгебра и анализ.—2015.—Т. 27, № 5.—С. 170–194.
25. *Трынин А. Ю.* Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // Изв. высш. учебных заведений. Математика.—2016.—№ 3.—С. 72–81.
26. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера — Котельникова — Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Мат. сб.—2009.—Т. 200, № 11.—С. 61—108. DOI: 10.4213/sm4502.
27. *Трынин А. Ю.* Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа — Якоби // Изв. РАН. Сер. Мат.—2011.—Т. 75, № 6.—С. 129–162. DOI: 10.4213/im4275.
28. *Трынин А. Ю.* Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля // Изв. высш. учебных заведений. Математика.—2000.—Т. 9.—С. 60–73.
29. *Трынин А. Ю.* Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма — Лиувилля // Уфимский мат. журн.—2011.—Т. 3, № 4.—С. 133–143.
30. *Трынин А. Ю.* Об одной обратной узловой задаче для оператора Штурма — Лиувилля // Уфимский мат. журн.—2013.—Т. 5, № 4.—С. 116–129.
31. *Трынин А. Ю.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля // Изв. высш. учебных заведений. Математика.—2010.—Т. 11.—С. 74–85.
32. *Трынин А. Ю.* Принцип локализации для процессов Лагранжа — Штурма — Лиувилля // Математика. Механика: Сб. науч. тр.—Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.—Т. 8.—С. 137–140.
33. *Трынин А. Ю.* Об одном интегральном признаке сходимости процессов Лагранжа — Штурма — Лиувилля // Математика. Механика: Сб. науч. тр.—Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007.—Т. 9.—С. 94–97.
34. *Трынин А. Ю.* Теорема отсчетов на отрезке и ее обобщения.—LAP LAMBERT Acad. Publ., 2016.—488 с.
35. *Голубов Б. И.* Сферический скачок функции и средние Бохнера — Рисса сопряженных кратных рядов и интегралов Фурье // Мат. заметки.—2012.—Т. 91, № 4.—С. 506–514.
36. *Дьяченко М. И.* Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье // Мат. сб.—2013.—Т. 204, № 3.—С. 3–18.
37. *Скопина М. А., Максименко И. Е.* Многомерные периодические всплески // Алгебра и анализ.—2003.—Т. 15, № 2.—С. 1–39.
38. *Дьяченко М. И.* Равномерная сходимость гиперболических частичных сумм кратных рядов Фурье // Мат. заметки.—2004.—Т. 76, № 5.—С. 723–731.
39. *Borisov D. I., Dmitriev S. V.* On the spectral stability of kinks in 2D Klein–Gordon model with parity-time-symmetric perturbation // Stud. Appl. Math.—2017.—Vol. 138, № 3.—P. 317–342.
40. *Голубов Б. И.* Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье // Мат. заметки.—1985.—Т. 37, № 1.—С. 13–24.
41. *Борисов Д. И., Знойил М.* О собственных значениях $\mathscr{PT}$-симметричного оператора в тонком слое // Мат. сб.—2017.—Т. 208, № 2.—С. 3–30.
42. *Иванникова Т. А., Тимашова Е. В., Шабров С. А.* О необходимом условии минимума квадратич-

ного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2013.—Т. 13, № 2 (1).—С. 3–8.
43. *Фарков Ю. А.* О наилучшем линейном приближении голоморфных функций // Фундамент. и прикл. математика.—2014.—Т. 19, № 5.—С. 185–212.
44. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1, 2.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953.

Статья поступила 13 июня 2017 г.

Трынин Александр Юрьевич
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
РОССИЯ, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
профессор кафедры математической экономики
E-mail: atrynin@gmail.com, tayu@rambler.ru
https://orcid.org/0000-0002-6304-4962

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 76–91

CONVERGENCE OF THE LAGRANGE–STURM–LIOUVILLE PROCESSES FOR CONTINUOUS FUNCTIONS OF BOUNDED VARIATION

Trynin, A. Y.[1]

[1] Saratov State University, 83 Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia
E-mail: atrynin@gmail.com

Abstract. The uniform convergence within an interval $(a, b) \subset [0, \pi]$ of Lagrange processes in eigenfunctions $L_n^{SL}(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})}$ of the Sturm–Liouville problem is established. (Here $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} < \pi$ denote the zeros of the eigenfunction U_n of the Sturm–Liouville problem.) A continuous functions f on $[0, \pi]$ which is of bounded variation on $(a, b) \subset [0, \pi]$ can be uniformly approximated within the interval $(a, b) \subset [0, \pi]$. A criterion for uniform convergence within an interval (a, b) of the constructed interpolation processes is obtained in terms of the maximum of the sum of the moduli of divided differences of the function f. Outside the interval (a, b), the Lagrange interpolation process may diverge. The boundedness in the totality of the Lagrange fundamental functions constructed from eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem is established. The case of the regular Sturm–Liouville problem with a continuous potential of bounded variation is also considered. The boundary conditions for the third kind Sturm–Liouville problem without Dirichlet conditions are studied. In the presence of service functions for calculating the eigenfunctions of the regular Sturm–Liouville problem, the Lagrange–Sturm–Liouville operator under study is easily implemented by computer technology.

Key words: uniform convergence, sinc approximations, bounded variation, Lagrange–Sturm–Liouville processes.

Mathematical Subject Classification (2000): 41A05, 41A58, 94A12.

For citation: *Trynin, A. Y.* Convergence of the Lagrange–Sturm–Liouville Processes for Continuous Functions of Bounded Variation, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 76–91 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23390.

References

1. *Kramer, H. P.* A Generalized Sampling Theorem, *J. Math. Phus.*, 1959, vol. 38, pp. 68–72.
2. *Natanson, G. I.* Ob odnom interpolyatsionnom protsesse, *Uchen. zapiski Leningrad. ped. in-ta im. A. I. Gertsena*, 1958, vol. 166, pp. 213–219. (in Russian).

3. *Novikov, I. Ya. and Stechkin, S. B.* Basic Wavelet Theory, *Russian Mathematical Surveys*, 1998, vol. 53, no. 6, pp. 1159–1231. DOI: 10.1070/RM1998v053n06ABEH000089.
4. *Novikov, I. Ya. and Stechkin, S. B.* Basic Constructions of Wavelets, *Fundamental and Applied Mathematics*, 1997, vol. 3, no. 4, pp. 999–1028. (in Russian).
5. *Stenger, F. Numerical Metods Based on Sinc and Analytic Functions*, N. Y., Springer, 1993, 565 p.
6. *Dobeshi, I. Ten Lectures on Wavelets, Society for Industrial and Appled Mathematics*, Philadelphia, Pennsylvana, 1992.
7. *Oren, E. Livne and Achi E. Brandt.* MuST: the Multilevel Sinc Transform, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2011 vol. 33, no. 4, pp. 1726–1738. DOI: 10.1137/100806904.
8. *Coroianu, L. and Sorin, G. Gal.* Localization results for the non-truncated max-product sampling operators based on Fejer and sinc-type kernels, *Demonstratio Mathematica*, 2016, vol. 49, no. 1, pp. 38–49.
9. *Richardson, M. and Trefethen, L.* A Sinc Function Analogue of Chebfun, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2011, vol. 33, no. 5, pp. 2519-–2535. DOI: 10.1137/110825947.
10. *Khosrow, M., Yaser, R. and Hamed, S.* Numerical Solution for First Kind Fredholm Integral Equations by Using Sinc Collocation Method, *International Journal of Applied Physics and Mathematics*, 2016, vol. 6, no. 3, pp. 88–94. DOI: 10.17706/ijapm.2016.6.3.88-94.
11. *Trynin, A. Yu.* Necessary and Sufficient Conditions for the Uniform on a Segment Sinc-Approximations Functions of Bounded Variation, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.,* vol. 16, no. 3, pp. 288–298 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-288-298.
12. *Trynin, A. Yu. and Sklyarov, V. P.* Error of Sinc Approximation of Analytic Functions on an Interval, *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, 2008, vol. 7, no 3, pp. 263–270.
13. *Marwa M. Tharwat.* Sinc Approximation of Eigenvalues of Sturm–Liouville Problems with a Gaussian Multiplier, *Calcolo: a Quarterly on Numerical Analysis and Theory of Computation*, 2014, vol. 51, no. 3, pp. 465–484. DOI: 10.1007/s10092-013-0095-3.
14. *Trynin, A. Yu.* On the Estimation of the Approximation of Analytic Functions by an Interpolation Operator with Respect to Syncs, *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics], Saratov, Saratov Univ., 2005, vol. 7, pp. 124–127. (in Russian).
15. *Zayed, A. I. and Schmeisser, G.* New Perspectives on Approximation and Sampling Theory, *Applied and Numerical Harmonic Analysis*, N. Y.–Dordrecht–London, Springer Int. Publ. Switzerland, 2014. DOI: 10.1007/978-3-319-08801-3.
16. *Trynin, A. Yu.* Estimates for the Lebesgue Functions and the Nevai Formula for the Sinc-Approximations of Continuous Functions on an Interval, *Siberian Mathematical Journal*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 929–938. DOI: 10.1007/s11202-007-0096-z.
17. *Trynin, A. Yu.* Tests for Pointwise and Uniform Convergence of Sinc Approximations of continuous functions on a Closed Interval, *Sbornik: Mathematics*, 2007, vol. 198, no. 10, pp. 1517–1534. DOI: 10.1070/SM2007v198n10ABEH003894.
18. *Trynin, A. Yu.* A Criterion for the Uniform Convergence of Sinc-Approximations on a Segment, *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 2008, vol. 52, no. 6, pp. 58–69. DOI: 10.3103/S1066369X08060078.
19. *Sklyarov, V. P.* On the Best Uniform Sinc-Approximation on a Finite Interval, *East Journal on Approximations*, 2008, vol. 14, no. 2, pp. 183–192.
20. *Trynin, A. Yu.* On Divergence of Sinc-Approximations Everywhere on $(0, \pi)$, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2011, vol. 22, pp. 683–701. DOI: 10.1090/S1061-0022-2011-01163-X.
21. *Trynin, A. Yu.* On Some Properties of Sinc Approximations of Continuous Functions on the Interval, *Ufa Mathematical Journal*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 111–126. DOI: 10.13108/2015-7-4-111.
22. *Umakhanov, A. Y. and Sharapudinov, I. I.* Interpolation of Functions by the Whittaker Sums and Their Modifications: Conditions for Uniform Convergence, *Vladikavkaz Math. J.*, 2016, vol. 18, pp. 61–70. DOI: 10.23671/VNC.2016.4.5995.
23. *Umakhanov, A. Y. and Sharapudinov, I. I.* Interpolation of Functions by Whittaker Sums and their Modifications: Conditions of Uniform Convergence, *Materialy 18th Intern. Saratov Winter School. «Modern Problems of the Theory of Functions and their Applications»*, Saratov, 2016, pp. 332–334.
24. *Trynin, A. Yu.* On Necessary and Sufficient Conditions for Convergence of Sinc-Approximations, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2016, vol. 27, no. 5, pp. 825–840. DOI: 10.1090/spmj/1419.
25. *Trynin, A. Yu.* Approximation of Continuous on a Segment Functions with the Help of Linear Combinations of Sincs, *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 2016, vol. 60, no. 3, pp. 63–71. DOI: 10.3103/S1066369X16030087.
26. *Trynin, A. Yu.* A Generalization of the Whittaker–Kotel'nikov–Shannon Sampling Theorem for Continuous Functions on a Closed Interval, *Sbornik: Mathematics*, 2009, vol. 200, no. 11, pp. 1633–1679. DOI: 10.1070/SM2009v200n11ABEH004054.

27. *Trynin, A. Yu.* On Operators of Interpolation with Respect to Solutions of a Cauchy Problem and Lagrange–Jacobi Polynomials, *Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75, no. 6, pp. 1215–1248. DOI: 10.1070/IM2011v075n06ABEH002570.
28. *Trynin, A. Yu.* On the Absence of Stability of interpolation in Eigenfunctions of the Sturm–Liouville Problem, *Russian Mathematics* (*Iz. VUZ*), 2000, vol. 44, no. 9, pp. 58–71.
29. *Trynin, A. Yu.* Differential Properties of Zeros of Eigenfunctions of the Sturm–Liouville Problem, *Ufa Mathematical Journal*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 130–140.
30. *Trynin, A. Yu.* On Inverse Nodal Problem for Sturm–Liouville Operator, *Ufa Mathematical Journal*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 112–124. DOI: 10.13108/2013-5-4-112.
31. *Trynin, A. Yu.* The Divergence of Lagrange Interpolation Processes in Eigenfunctions of the Sturm–Liouville Problem, *Russian Mathematics* (*Iz. VUZ*), 2010, vol. 54, no. 11, pp. 66–76. DOI: 10.3103/S1066369X10110071.
32. *Trynin, A. Yu.* Localization Principle for Lagrange–Sturm–Liouville Processes, *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics], Saratov, Saratov Univ., 2005, vol. 8, pp. 137–140 (in Russian).
33. *Trynin, A. Yu.* On one Integral Sign of Convergence of Lagrange–Sturm–Liouville Processes, *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics], Saratov, Saratov Univ., 2007, vol. 9, pp. 94–97.
34. *Trynin, A. Yu. Teorema otschetov na otrezke i ee obobscheniya,* LAP LAMBERT Acad. Publ., 2016, 488 p. (in Russian).
35. *Golubov, B. I.* Spherical Jump of a Function and the Bochner–Riesz Means of Conjugate Multiple Fourier Series and Fourier Integrals, *Mathematical Notes*, 2012, vol. 91, no. 3–4, pp. 479–486. DOI: 10.4213/mzm8739.
36. *Dyachenko, M. I.* On a Class of Summability Methods for Multiple Fourier Series, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 3, pp. 307–322. DOI: 10.4213/sm8118.
37. *Maksimenko, I. E. and Skopina, M. A.* Multidimensional Periodic Wavelets, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2004, vol. 15, no. 2, pp. 165–190. DOI: 10.1090/S1061-0022-04-00808-8.
38. *Dyachenko, M. I.* Uniform Convergence of Hyperbolic Partial Sums of Multiple Fourier Series, *Mathematical Notes*, 2004, vol. 76, no. 5, pp. 673–681. DOI: 10.4213/mzm139.
39. *Borisov, D. I. and Dmitriev, S. V.* On the Spectral Stability of Kinks in 2D Klein-Gordon Model with Parity-Time-Symmetric Perturbation, *Studies in Applied Mathematics*, 2017, vol. 138, no. 3, pp. 317–342.
40. *Golubov, B. I.* Absolute Convergence of Multiple Fourier Series, *Mathematical Notes*, 1985, vol. 37, no. 1, pp. 8–15. DOI: 10.1007/BF01652507.
41. *Borisov, D. I. and Znojil, M.* On Eigenvalues of a $\mathscr{PT}$-Symmetric Operator in a thin Layer, *Sbornik: Mathematics*, 2017, vol. 208, no. 2, pp. 173–199. DOI: 10.1070/SM8657.
42. *Ivannikova, T. A., Timashova, E. V. and Shabrov, S. A.* On Necessary Conditions for a Minimum of a Quadratic Functional with a Stieltjes Integral and Zero Coefficient of the Highest Derivative on the Part of the Interval, *Izv. Saratov Univ.* (*N. S.*)*, Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 2(1), pp. 3–8. (in Russian).
43. *Farkov, Yu. A.* On the Best Linear Approximation of Holomorphic Functions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 218, no. 5, pp. 678–698. DOI: 10.1007/s10958-016-3050-4.
44. *Sansone, D. Obyknovennye differencial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Moscow, Foreign Languages Publ. House, 1953, vol. 1, 2.

Received June 13, 2017

Alexandr Yu. Trynin
Saratov State University,
83 Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia,
Professor of the Department of Mathematical Economics
E-mail: `atrynin@gmail.com`, `tayu@rambler.ru`
https://orcid.org/0000-0002-6304-4962