Владикавказский математический журнал
2019, Том 21, Выпуск 2, С. 38–57

УДК 517.927
DOI 10.23671/VNC.2019.2.32116

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СПЕКТРА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

С. И. Митрохин[1]

[1] НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Аннотация. В работе изучается функционально-дифференциальный оператор восьмого порядка с суммируемым потенциалом. Граничные условия являются разделенными. Функционально-дифференциальные операторы такого рода возникают при изучении колебаний балок и мостов, составленных из материалов различной плотности. Чтобы решить функционально-дифференциальное уравнение, задающее дифференциальный оператор, применяется метод вариации постоянных. Решение исходного функционально-дифференциального уравнения сведено к решению интегрального уравнения Вольтерры. Получившееся интегральное уравнение Вольтерры решается методом последовательных приближений Пикара. В результате исследования интегрального уравнения получены асимптотические формулы и оценки для решений функционально-дифференциального уравнения, задающего дифференциальный оператор. При больших значениях спектрального параметра выведена асимптотика решений дифференциального уравнения, определяющего дифференциальный оператор. Аналогично асимптотическим оценкам решений дифференциального оператора второго порядка с гладкими и кусочно-гладкими коэффициентами устанавливаются асимптотические оценки решений исходного функционально-дифференциального уравнения. Полученные асимптотические формулы применяются для изучения граничных условий. В результате приходим к изучению корней функции, представленной в виде определителя восьмого порядка. Чтобы найти корни этой функции, необходимо изучить индикаторную диаграмму. Корни уравнения на собственные значения находятся в восьми секторах бесконечно малого раствора, определяемых индикаторной диаграммой. Изучены поведение корней этого уравнения в каждом из секторов индикаторной диаграммы и асимптотика собственных значений исследуемого дифференциального оператора.

Ключевые слова: функционально-дифференциальный оператор, краевая задача, суммируемый потенциал, граничные условия, спектральный параметр, индикаторная диаграмма, асимптотика собственных значений.

Mathematical Subject Classification (2010): 34K08.

Образец цитирования: *Митрохин С. И.* Об исследовании спектра функционально-дифференциального оператора с суммируемым потенциалом // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 2.—С. 38–57. DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32116.

1. Постановка задачи

Исследуем функционально-дифференциальный оператор (ФДО), задаваемый уравнением

$$y^{(8)}(x) + q(x)y(x) = \lambda a^8 y(x) + \alpha r(x)y(b), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 < b < \pi, \quad a > 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $\alpha \in \mathbb{C}$, с разделенными граничными условиями

$$y^{(m_1)}(0) = y^{(m_2)}(0) = \cdots = y^{(m_6)}(0) = y^{(n_1)}(\pi) = y^{(n_2)}(\pi) = 0, \tag{2}$$

$m_1 < m_2 < \cdots < m_6$, $n_1 < n_2$; $m_k, n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$.

В уравнении (1) $q(x)$ — потенциал, $\rho(x) = a^8 > 0$ — весовая функция. Мы предполагаем, что $q(x)$ и $r(x)$ — суммируемые функции на отрезке $[0;\pi]$:

$$\begin{aligned} q(x) \in L_1[0;\pi] &\Leftrightarrow \left(\int\limits_0^x q(t)dt\right)'_x = q(x) \quad \text{почти для всех значений } x \text{ на } [0;\pi]; \\ r(x) \in L_1[0;\pi] &\Leftrightarrow \left(\int\limits_0^x r(t)dt\right)'_x = r(x) \quad \text{почти для всех значений } x \text{ на } [0;\pi]. \end{aligned} \tag{3}$$

2. Исторический обзор

Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов в случае достаточно гладких коэффициентов изучаются уже достаточно давно. В монографии [1, гл. 2] изучено асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций дифференциальных операторов с гладкими, несколько раз дифференцируемыми коэффициентами. Там же описана методика нахождения асимптотики решений дифференциальных уравнений, задающих дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами, при больших значениях спектрального параметра. Пользуясь такой асимптотикой решений, в работе [2] были найдены асимптотические формулы для корней одного класса целых функций, которые возникают в случае изучения обыкновенных дифференциальных операторов с регулярными граничными условиями с достаточно гладкими коэффициентами.

С помощью асимптотических формул, найденных в работе [2], в работах [3] и [4] были найдены формулы для вычисления регуляризованных следов дифференциальных операторов высших порядков с достаточно гладкими коэффициентами.

В работе [5] автор продемонстрировал методику нахождения формул регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами. Спектральные свойства дифференциальных операторов с кусочно-гладкими коэффициентами изучались автором в работе [6], а в работе [7] был изучен дифференциальный оператор с кусочно-гладкой весовой функцией.

В работах [8, 9] была изучена краевая задача для функционально-дифференциального оператора второго порядка с гладким потенциалом, были вычислены формулы регуляризованных следов такого оператора. В работе [10] автором были вычислены формулы регуляризованных следов для функционально-дифференциальных операторов второго порядка с кусочно-гладким потенциалом.

В работе [11] был совершен большой прогресс в изучении дифференциальных операторов с негладкими коэффициентами, был изучен оператор второго порядка с суммируемым потенциалом, найдены асимптотики собственных значений и собственных функций оператора Штурма — Лиувилля на отрезке. В работах [12, 13] были изучены операторы второго порядка, у которых потенциал является δ-функцией.

В работах [14–17] автор продемонстрировал новую методику изучения дифференциальных операторов порядка выше второго с суммируемыми коэффициентами. Заметим, что методика работы [11] не переносится на операторы, у которых порядок равен четырем или выше. Отметим также, что сложность изучения дифференциальных операторов возрастает с увеличением порядка дифференциальных уравнений, задающих дифференциальный оператор.

Граничные условия (2) показывают, что мы изучаем сразу целое семейство функционально-дифференциальных операторов восьмого порядка с суммируемыми коэффициентами. Функционально-дифференциальные операторы (так называемые нагруженные операторы) порядка выше второго ранее фактически не изучались (даже в случае гладких коэффициентов).

3. Асимптотика решений вспомогательного уравнения при $\lambda \to \infty$

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное уравнение, получающееся из (1) при $\alpha = 0$ (или при $r(x) \equiv 0$):

$$y^{(8)}(x) + q(x)y(x) = \lambda a^8 y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad a > 0. \tag{4}$$

Обозначим $\lambda = s^8$, $s = \sqrt[8]{\lambda}$, причем для корректности дальнейших выкладок выберем основную ветвь арифметического корня, для которой $\sqrt[8]{1} = +1$. Пусть w_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ — различные корни восьмой степени из единицы:

$$\begin{gathered} w_k^8 = 1, \quad w_k = e^{\frac{2\pi i}{8}(k-1)},\ k = 1, 2, \ldots, 8;\ w_1 = 1; \\ w_2 = e^{\frac{2\pi i}{8}} = \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = z \neq 0, \\ w_3 = e^{\frac{4\pi i}{8}} = i = z^2; \ldots; w_m = z^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots, 8. \end{gathered} \tag{5}$$

Числа w_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ из (5) делят единичную окружность на восемь равных частей. Для них справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{8} w_k^m = 0,\ m = 1, 2, \ldots, 7; \quad \sum_{k=1}^{8} w_k^m = 8,\ m = 0,\ m = 8. \tag{6}$$

Методами работ [14–16] устанавливается следующая теорема.

Теорема 1. *Общее решение дифференциального уравнения* (4) *имеет следующий вид:*

$$y(x, s) = \sum_{k=1}^{8} C_k y_k(x, s); \quad y^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^{8} C_k y_k^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, \ldots, 7, \tag{7}$$

где C_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ — произвольные постоянные, при этом при больших значениях спектрального параметра λ для фундаментальной системы $\{y_k(x, s)\}_{k=1}^{8}$ справедливы *следующие асимптотические формулы и оценки:*

$$y_k(x,s) = e^{aw_k sx} - \frac{A_{7k}(x,s)}{8a^7 s^7} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|ax}}{s^{14}}\right), \quad k = 1,2,\ldots,8, \tag{8}$$

$$y_k^{(m)}(x,s) = (as)^m \left\{ w_k^m e^{aw_k sx} - \frac{A_{7k}^m(x,s)}{8a^7 s^7} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|ax}}{s^{14}}\right) \right\}, \tag{9}$$
$$k = 1,2,\ldots,8; \quad m = 1,2,\ldots,7;$$

$$A_{7k}(x,s) = w_e^{aw_1 sx} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_1)st} dt_{ak1} + w_2 e^{aw_2 sx} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_2)st} dt_{ak2}$$
$$+ \cdots + w_8 e^{aw_8 sx} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_8)st} dt_{ak8}, \quad k = 1,2,\ldots,8, \tag{10}$$

$$A_{7k}^m(x,s) = \sum_{n=1}^{8} w_n w_n^m e^{aw_n sx} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_n)st} dt_{akn}, \quad m = 1,2,\ldots,7. \tag{11}$$

При выводе формул (8)–(11) мы требовали выполнения следующих начальных условий:

$$\begin{gathered} A_{7k}(0,s) = 0; \quad A_{7k}^m(0,s) = 0; \quad y_k(0,s) = 1; \quad y_k^{(m)}(0,s) = (as)^m w_k^m, \\ k = 1,2,\ldots,8; \quad m = 1,2,\ldots,7. \end{gathered} \tag{12}$$

4. Решение функционально-дифференциального уравнения (1)

Обозначим через $\Delta_0(x,s)$ определитель Вронского фундаментальной системы решений $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^8$ вспомогательного дифференциального уравнения (4):

$$\Delta_0(x,s) = \det \operatorname{Wr}[y_1(x,s), y_2(x,s), \ldots, y_8(x,s)]$$
$$= \begin{vmatrix} y_1(x,s) & y_2(x,s) & \ldots & y_7(x,s) & y_8(x,s) \\ y_1'(x,s) & y_2'(x,s) & \ldots & y_7'(x,s) & y_8'(x,s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(6)}(x,s) & y_2^{(6)}(x,s) & \ldots & y_7^{(6)}(x,s) & y_8^{(6)}(x,s) \\ y_1^{(7)}(x,s) & y_2^{(7)}(x,s) & \ldots & y_7^{(7)}(x,s) & y_8^{(7)}(x,s) \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Из общей теории дифференциальных уравнений следует, что определитель Вронского $\Delta_0(x,s)$ не зависит от параметра x:

$$\Delta_0(x,s) = \Delta_0(s) = \Delta_0(0;s). \tag{14}$$

Используя формулы (8)–(12), находим

$$\Delta_0(x,s) = \Delta_0(0,s) = \Delta_0(s)$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ (as)w_1 & (as)w_2 & \ldots & (as)w_7 & (as)w_8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (as)^6 w_1^6 & (as)^6 w_2^6 & \ldots & (as)^6 w_7^6 & (as)^6 w_8^6 \\ (as)^7 w_1^7 & (as)^7 w_2^7 & \ldots & (as)^7 w_7^7 & (as)^7 w_8^7 \end{vmatrix} = \Delta_{00}(as)^{28}, \tag{15}$$

где Δ_{00} — определитель Вандермонда чисел $w_1, w_2, \ldots, w_8$:

$$\Delta_{00} = \det \mathrm{Wandermond's}(w_1, w_2, \ldots, w_8) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_7 & w_8 \\ w_1^6 & w_2^6 & \ldots & w_7^6 & w_8^6 \\ w_1^7 & w_2^7 & \ldots & w_7^7 & w_8^7 \end{vmatrix} = \prod_{\substack{k>m \\ k,m=1,2,\ldots,8}} (w_k - w_m) = \Delta_{00} \neq 0. \tag{16}$$

Разложив определитель $\Delta_0(x, s)$ из (13) по последней строке, получим

$$\Delta_0(x,s) = -y_1(x,s)D_{81}(x,s) + y_2(x,s)D_{82} - \cdots - y_7(x,s)D_{87}(x,s) + y_8(x,s)D_{88}(x,s), \tag{17}$$

где $D_{8k}(x,s)$ $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ — алгебраические миноры к элементам восьмой строки и k-го столбца определителя $\Delta_0(x,s)$ из (13):

$$D_{81}(x,s) = \begin{vmatrix} y_2(x,s) & \ldots & y_7(x,s) & y_8(x,s) \\ y_2'(x,s) & \ldots & y_7'(x,s) & y_8'(x,s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_2^{(6)}(x,s) & \ldots & y_7^{(6)}(x,s) & y_8^{(6)}(x,s) \end{vmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{18}$$

$$D_{88}(x,s) = \begin{vmatrix} y_1(x,s) & y_2(x,s) & \ldots & y_7(x,s) \\ y_1'(x,s) & y_2'(x,s) & \ldots & y_7'(x,s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(6)}(x,s) & y_2^{(6)}(x,s) & \ldots & y_7^{(6)}(x,s) \end{vmatrix}.$$

Перепишем уравнение (1) в виде $y^{(8)}(x) + q(x)y(x) - \lambda a^8 y(x) = \alpha r(x)y(b)$ и решим его методом вариации постоянных: будем искать решение в виде $y = \sum_{k=1}^{8} C_k(x,s) y_k(x,s)$, где $C_k(x,s)$ — неизвестные функции, $y_k(x,s)$ $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ — линейно-независимые решения вспомогательного уравнения (4). В результате докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Решение $y(x,s)$ функционально-дифференциального уравнения* (1) *представляется в виде*

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{8} C_k y_k(x,s) + \frac{\alpha y(b,s)}{\Delta_0(s)} H_8(x,s), \tag{19}$$

где C_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ — произвольные постоянные, $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^{8}$ — фундаментальная система решений уравнения (4), *определяемая формулами* (7)–(12),

$$H_8(x,s) = \sum_{k=1}^{8} (-1)^k y_k(x,s) \int_0^x r(t) D_{8k}(t,s)\, dt_{rk}. \tag{20}$$

При этом в силу свойств суммируемости (3), свойств определителей и формул (6) получаем

$$y^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{8} C_k y_k^{(m)}(x,s) + \frac{\alpha y(b,s)}{\Delta_0(s)} H_8^{(m)}(x,s), \quad m = 1, 2, \ldots, 7, \tag{21}$$

$$H^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{8} (-1)^k y_k^{(m)}(x,s) \int_0^x r(t) D_{8k}(t,s) dt_{rk}, \quad m = 1, 2, \ldots, 7, \tag{22}$$

величина $\Delta_0(s)$ определена формулами (14)–(16).

Справедливость формул (19)–(22) можно перепроверить непосредственной подстановкой этих формул в уравнение (1).

Подставляя $x = b$ в уравнение (19), (20), находим

$$y(b,s) = \sum_{k=1}^{8} C_k y_k(b,s) + \frac{\alpha y(b,s)}{\Delta_0(s)} H_8(b,s), \quad \Delta_0(s) \neq 0,$$

откуда получаем

$$y(b,s) = \frac{\sum_{k=1}^{8} C_k y_k(b,s)}{\psi_8(b,s)}, \quad \psi_8(b,s) = 1 - \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} H_8)b,s) \neq 0. \tag{23}$$

Поставим $y(b,s)$ из (23) в (19), сделаем необходимые преобразования, придем к выводу о справедливости следующего утверждения.

Теорема 3. *Общее решение функционально-дифференциального уравнения* (1) *имеет следующий вид:*

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{8} C_k h_k(x,s); \quad y^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{8} C_k h_k^{(m)}(x,s), \quad m = 1,2,\ldots,7, \tag{24}$$

C_k $(k = 1,2,\ldots,8)$ — *произвольные постоянные,*

$$h_k(x,s) = y_k(x,s) + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_k(b,s)}{\psi_8(b,s)} H_8(x,s), \quad k = 1,2,\ldots,8, \tag{25}$$

$$h_k^{(m)}(x,s) = y_k^{(m)}(x,s) + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_k(b,s)}{\psi_8(b,s)} H_8^{(m)}(x,s), \tag{26}$$

$$k = 1,2,\ldots,8, \quad m = 1,2,\ldots,7,$$

функции $y_k(x,s)$, $y_k^{(m)}(x,s)$ *определены формулами* (7)–(12), $H_8(x,s)$, $H_8^{(m)}(x,s)$ *определены в* (20)–(22), $\psi_8(b,s)$ *определена в* (23).

При этом справедливы следующие начальные условия:

$$\begin{gathered} H_8(0,s) = 0; \quad H_8^{(m)}(0,s) = 0; \quad h_k(0,s) = y_k(0,s) = 1; \\ h_k^{(m)}(0,s) = y_k^{(m)}(0,s) = (as)^m w_k^m, \quad k = 1,2,\ldots,8; \quad m = 1,2,\ldots,7. \end{gathered} \tag{27}$$

Формулы (24)–(27) позволяют изучать граничные условия (2).

5. Изучение граничных условий (2)

Подставляя формулы (24)–(27) в граничные условия (2), имеем

$$y^{(m_p)}(0,s)=0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{8} C_k h_k^{(m_p)}(0,s)=0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{8} C_k y_k^{(m_p)}(0,s)=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{8} C_k (as)^{m_p} w_k^{m_p}=0, \quad p=1,2,\dots,6; \tag{28}$$

$$y^{(n_j)}(\pi,s)=0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{8} C_k h_k^{(n_j)}(\pi,s)=0, \quad j=1,\ j=2. \tag{29}$$

Система (28), (29) — система из восьми уравнений с восемью неизвестными $C_1, C_2, \dots, C_8$. Эта система имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому верно следующее утверждение.

Теорема 4. *Уравнение на собственные значения ФДО* (1)–(3) *имеет вид*

$$f(s)=\begin{vmatrix} y_1^{(m_1)}(0,s) & y_2^{(m_1)}(0,s) & \dots & y_7^{(m_1)}(0,s) & y_8^{(m_1)}(0,s) \\ y_1^{(m_2)}(0,s) & y_2^{(m_2)}(0,s) & \dots & y_7^{(m_2)}(0,s) & y_8^{(m_2)}(0,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(m_6)}(0,s) & y_2^{(m_6)}(0,s) & \dots & y_7^{(m_6)}(0,s) & y_8^{(m_6)}(0,s) \\ h_1^{(n_1)}(\pi,s) & h_2^{(n_1)}(\pi,s) & \dots & h_7^{(n_1)}(\pi,s) & h_8^{(n_1)}(\pi,s) \\ h_1^{(n_2)}(\pi,s) & h_2^{(n_2)}(\pi,s) & \dots & h_7^{(n_2)}(\pi,s) & h_8^{(n_2)}(\pi,s) \end{vmatrix}. \tag{30}$$

Учитывая начальные условия (27), перепишем уравнение (30) в следующем виде:

$$f(s)=(as)^{m_1}(as)^{m_2}(\dots)(as)^{m_6}$$

$$\times\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_7^{m_1} & w_8^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_7^{m_2} & w_8^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_6} & w_2^{m_6} & \dots & w_7^{m_6} & w_8^{m_6} \\ h_1^{(n_1)}(\pi,s) & h_2^{(n_1)}(\pi,s) & \dots & h_7^{(n_1)}(\pi,s) & h_8^{(n_1)}(\pi,s) \\ h_1^{(n_2)}(\pi,s) & h_2^{(n_2)}(\pi,s) & \dots & h_7^{(n_2)}(\pi,s) & h_8^{(n_2)}(\pi,s) \end{vmatrix}=0. \tag{31}$$

Разложив определитель $f(s)$ из формулы (31) по последним двум строчкам, получим

$$\begin{gathered} f(s)=H_{12}W_{345678}+H_{23}W_{145678}-H_{34}W_{125678}+\dots+H_{78}W_{123456} \\ +H_{18}W_{234567}-H_{13}W_{245678}+H_{14}W_{235678}=\dots=0, \end{gathered} \tag{32}$$

$$H_{mk}=\begin{vmatrix} h_m^{(n_1)}(\pi,s) & h_k^{(n_1)}(\pi,s) \\ h_m^{(n_2)}(\pi,s) & h_k^{(n_2)}(\pi,s) \end{vmatrix}, \quad m,k=1,2,\dots,8; \tag{33}$$

$W_{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5,j_6}$ ($j_k=1,2,\dots,8$; $k=1,2,\dots,6$) — алгебраические миноры к элементу H_{mk} в определителе $f(s)$ из (31), $j_n \neq m$, $j_n \neq k$, знак «+» в формуле (32) ставится в том случае, если перестановка $(m,k,j_1,j_2,j_3,j_4,j_5,j_6)$ четная, знак «−» — если перестановка нечетная.

Алгебраические миноры $W_{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5,j_6}$ благодаря удобным обозначениям легко вычисляются:

$$W_{123456} = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_6^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_6^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_6} & w_2^{m_6} & \dots & w_6^{m_6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^{m_1} & z^{m_1} & \dots & z^{5m_1} \\ 1^{m_2} & z^{m_2} & \dots & z^{5m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{m_6} & z^{m_6} & \dots & z^{5m_6} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{\substack{k>n;\\ k,n=1,2,\dots,6}} (z^{m_k} - z^{m_n}) = W_6 \neq 0, \qquad (34)$$

так как определитель W_{123456} представляет собой определитель Вандермонда чисел $z^{m_1}, z^{m_2}, \dots, z^{m_6}$.

Далее имеем

$$W_{234567} = \begin{vmatrix} w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & \dots & w_7^{m_1} \\ w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & \dots & w_7^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^{m_6} & w_3^{m_6} & \dots & w_7^{m_6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z^{m_1} & z^{2m_1} & \dots & z^{6m_1} \\ z^{m_2} & z^{2m_2} & \dots & z^{6m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{m_6} & z^{2m_6} & \dots & z^{6m_6} \end{vmatrix}$$

$$= z^{m_1} z^{m_2} (\dots) z^{m_6} W_{123456} = z^{M_6} W_6, \quad M_6 = \sum_{k=1}^{6} m_k. \qquad (35)$$

Аналогичным образом выводим

$$\begin{gathered} W_{345678} = z^{2M_6} W_6; \quad W_{145678} = (-1) z^{3M_6} W_6; \quad W_{125678} = z^{4M_6} W_6; \\ W_{123678} = (-1) z^{5M_6} W_6; \quad W_{123478} = z^{6M_6} W_6; \\ W_{123458} = (-1) z^{7M_6} W_6; \quad W_{123456} = z^{8M_6} W_6 = W_6. \end{gathered} \qquad (36)$$

Подставим формулы (34)–(36) в уравнение (33), поделим на $z^{2M_6} W_6 \neq 0$, получим

$$f(s) = \begin{vmatrix} h_1^{(n_1)}(\pi,s) & h_2^{(n_1)}(\pi,s) \\ h_1^{(n_2)}(\pi,s) & h_2^{(n_2)}(\pi,s) \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} h_2^{(n_1)}(\pi,s) & h_3^{(n_1)}(\pi,s) \\ h_2^{(n_2)}(\pi,s) & h_3^{(n_2)}(\pi,s) \end{vmatrix} z^{M_6} + z^{2M_6} \begin{vmatrix} h_3^{(n_1)}(\pi,s) & h_4^{(n_1)}(\pi,s) \\ h_3^{(n_2)}(\pi,s) & h_4^{(n_2)}(\pi,s) \end{vmatrix} - \dots$$

$$= \{\phi_{12} - \phi_{23} z^{M_6} + \phi_{34} z^{2M_6} - \dots\} (as)^{n_1} (as)^{n_2} = 0, \qquad (37)$$

при этом каждый из определителей ϕ_{mk} можно выписать более подробно с помощью формул (25), (26):

$$\phi_{12} = \begin{vmatrix} \frac{h_1^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}} & \frac{h_2^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}} \\ \frac{h_1^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}} & \frac{h_2^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{y_1^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}} + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_1(b,s)}{\psi_8(b,s)} \frac{H_8^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}} & \frac{y_2^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}} + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_2(b,s)}{\psi_8(b,s)} \frac{H_8^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}} \\ \frac{y_1^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}} + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_1(b,s)}{\psi_8(b,s)} \frac{H_8^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}} & \frac{y_2^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}} + \frac{\alpha}{\Delta_0(s)} \frac{y_2(b,s)}{\psi_8(b,s)} \frac{H_8^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}} \end{vmatrix}, \qquad (38)$$

$$\phi_{23}=\begin{vmatrix}\dfrac{h_2^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}} & \dfrac{h_3^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}}\\[2mm] \dfrac{h_2^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}} & \dfrac{h_3^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_{12} & u_{13}\\ u_{22} & u_{23}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{y_2^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}}+\dfrac{\alpha}{\Delta_0(s)}\dfrac{y_2(b,s)}{\psi_8(b,s)}\dfrac{H_8^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}} & \dfrac{y_3^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}}+\dfrac{\alpha}{\Delta_0(s)}\dfrac{y_3(b,s)}{\psi_8(b,s)}\dfrac{H_8^{(n_1)}(\pi,s)}{(as)^{n_1}}\\[2mm] \dfrac{y_2^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}}+\dfrac{\alpha}{\Delta_0(s)}\dfrac{y_2(b,s)}{\psi_8(b,s)}\dfrac{H_8^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}} & \dfrac{y_3^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}}+\dfrac{\alpha}{\Delta_0(s)}\dfrac{y_3(b,s)}{\psi_8(b,s)}\dfrac{H_8^{(n_2)}(\pi,s)}{(as)^{n_2}}\end{vmatrix},\ldots \tag{39}$$

Подставляя формулы (8)–(11) и (17)–(22) в (38), (39), видим, что определители ϕ_{12}, ϕ_{13} представляют собой квазиполиномы. Таким образом, функция $f(s)$ из (37) также представляет собой квазиполином.

Для нахождения корней уравнения (37) необходимо изучить так называемую индикаторную диаграмму этого уравнения (см. [18, гл. 12]), т. е. выпуклую оболочку показателей экспонент, входящих в это уравнение. Раскладывая определители $\phi_{12}, \phi_{13}, \ldots$ по столбцам, применяя формулы (8)–(11), видим, что в определитель ϕ_{12} входят экспоненты $e^{a(w_1+w_2)s\pi}$, в определитель ϕ_{23} входят экспоненты $e^{a(w_2+w_3)s\pi}, \ldots$, в определитель ϕ_{mk} — экспоненты $e^{a(w_m+w_k)s\pi}$. Значит, индикаторная диаграмма уравнения (37)–(39) имеет следующий вид:

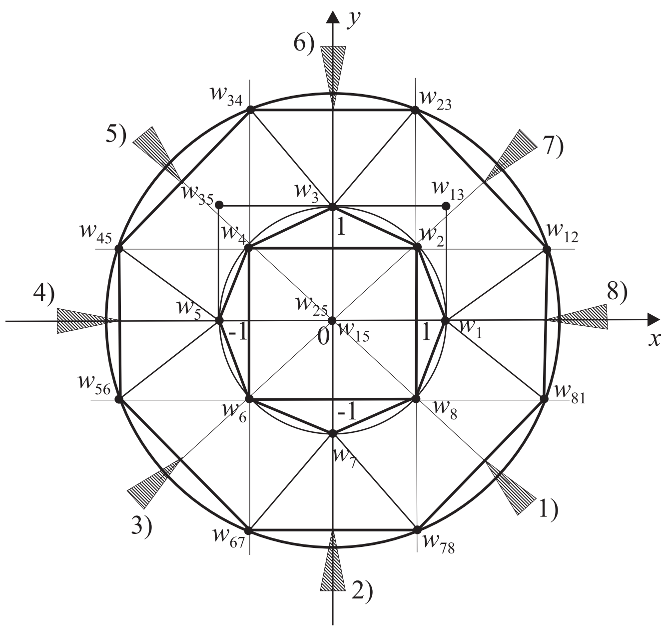

Рис. 1.

На рис. 1 внутренняя единичная окружность делится числами w_k $(k=1,2,\ldots,8)$ из (5) на восемь равных частей, для второй окружности введены обозначения $w_{km}=w_k+w_m$ $(k,m=1,2,\ldots,8)$. На наружнюю окружность (индикаторную диаграмму) попадают только точки w_1+w_2, w_2+w_3, $w_3+w_4,\ldots$, w_7+w_8, $w_8+w_9=w_8+w_1$, точки w_k+w_m, $(m-k)\geqslant 2$ попадают внутрь индикаторной диаграммы и на асимптотику корней уравнения (37)–(39) не влияют. Корни уравнения (37)–(39) могут находиться только в восьми заштрихованных секторах рис. 1, бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам правильного восьмиугольника $w_{12}w_{23}w_{34}\ldots w_{78}w_{81}w_{12}$.

6. Уравнение на собственные значения ФДО (1)–(3) в секторе 1) индикаторной диаграммы

Для того, чтобы изучить корни уравнения (37)–(39) в секторе 1) индикаторной диаграммы на рис. 1, надо оставить только экспоненты с показателями $\bar{w}_{81} = w_{12} = w_1 + w_2$ и $\bar{w}_{78} = w_{23} = w_2 + w_3$, т. е. экспоненты $e^{a(w_1+w_2)s\pi}$ и $e^{a(w_2+w_3)s\pi}$. Поэтому справедливо утверждение.

Теорема 5. *Уравнение на собственные значения ФДО* (1)–(3) *в секторе* 1) *индикаторной диаграммы на рис. 1 имеет следующий вид:*

$$g_1(s) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{22} & u_{23} \end{vmatrix} z^{M_6} = 0, \tag{40}$$

причем во всех асимптотических формулах необходимо оставить только экспоненты с показателями $w_1 + w_2$, $w_2 + w_3$, величины u_{mk} определены в (38), (39).

Изучим сначала асимптотическое поведение функций $D_{8k}(x,s)$ $(k = 1, 2, \dots, 8)$ из (17), (18).

Применяя формулы (8)–(12) и свойства определителей, из (18) имеем

$$D_{81}(x,s) = \begin{vmatrix} v_2 - \frac{A_{72}(x,s)}{R_7} + \dots & \dots & v_7 - \frac{A_{77}(x,s)}{R_7} + \dots & v_8 - \frac{A_{78}(x,s)}{R_7} + \dots \\ w_2 v_2 - \frac{A^1_{72}(x,s)}{R_7} + \dots & \dots & w_7 v_7 - \frac{A^1_{77}(x,s)}{R_7} + \dots & w_8 v_8 - \frac{A^1_{78}(x,s)}{R_7} + \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^6 v_2 - \frac{A^6_{72}(x,s)}{R_7} + \dots & \dots & w_7^6 v_7 - \frac{A^6_{77}(x,s)}{R_7} + \dots & w_8^6 v_8 - \frac{A^6_{78}(x,s)}{R_7} + \dots \end{vmatrix}$$
$$\times (as)(as)^2(\dots)(as)^6 = (as)^{21}\left[D_{81,0}(x,s) - \frac{D_{81,7}(x,s)}{8a^7s^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right)\right], \tag{41}$$

где введены обозначения $v_k = e^{aw_k sx}$ $(k = 1, 2, \dots, 8)$, $R_7 = 8a^7s^7$, «$+\dots$» $=$«$+\underline{O}(\frac{1}{s^{14}})$»,

$$D_{81,0}(x,s) = \begin{vmatrix} v_2 & \dots & v_7 & v_8 \\ w_2 v_2 & \dots & w_7 v_7 & w_8 v_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^6 v_2 & \dots & w_7^6 v_7 & w_8^6 v_8 \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^{8} v_k \delta_{81}, \tag{42}$$

при этом в силу формул (5), (6) имеем

$$\prod_{k=2}^{8} v_k = \prod_{k=2}^{8} e^{aw_k sx} = \exp(a(w_2 + w_3 + \dots + w_8)sx) = e^{-aw_1 sx}, \tag{43}$$

δ_{81} — алгебраический минор к элементу восьмой строки и первого столбца определителя Δ_{00} из (16):

$$\delta_{81} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ w_2 & \dots & w_7 & w_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^6 & \dots & w_7^6 & w_8^6 \end{vmatrix}. \tag{44}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Матрица δ_{kn} $(k,n=1,2,\ldots,8)$ алгебраических миноров к элементам b_{kn} $(k,n=1,2,\ldots,8)$ определителя Δ_{00} из (16) имеет следующий вид:*

$$(\delta_{kn})=\begin{pmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\delta_{13}&\ldots&\delta_{17}&\delta_{18}\\ \delta_{21}&\delta_{22}&\delta_{23}&\ldots&\delta_{27}&\delta_{28}\\ \delta_{31}&\delta_{32}&\delta_{33}&\ldots&\delta_{37}&\delta_{38}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ \delta_{71}&\delta_{72}&\delta_{73}&\ldots&\delta_{77}&\delta_{78}\\ \delta_{81}&\delta_{82}&\delta_{83}&\ldots&\delta_{87}&\delta_{88}\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{\Delta_{00}}{8}\begin{pmatrix}1&-1&1&\ldots&1&-1\\ -w_1^{-1}&w_2^{-1}&-w_3^{-1}&\ldots&-w_7^{-1}&w_8^{-1}\\ w_1^{-2}&-w_2^{-2}&w_3^{-2}&\ldots&w_7^{-2}&-w_8^{-2}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ w_1^{-6}&-w_2^{-6}&w_3^{-6}&\ldots&w_7^{-6}&-w_8^{-6}\\ -w_1^{-7}&w_2^{-7}&-w_3^{-7}&\ldots&-w_7^{-7}&w_8^{-7}\end{pmatrix} \tag{45}$$

В справедливости леммы можно убедиться, раскладывая определитель Δ_{00} из (16) по строчкам или по столбцам, используя формулы (45).

Строгое доказательство леммы приведено автором в работе [19].

С учетом (43)–(45), формула (42) примет вид

$$D_{81,0}(x,s)=\prod_{k=2}^{8}v_k\delta_{81}=e^{-aw_1sx}(-w_1^{-7})=(-1)w_1e^{-aw_1sx}, \tag{46}$$

так как $w_1^8=w_k^8$ $(k=1,2,\ldots,8)$, при этом в формуле (41) имеем

$$D_{81,7}(x,s)=\begin{vmatrix}A_{72}(x,s)&v_3&\ldots&v_8\\ A_{72}^1(x,s)&w_3v_3&\ldots&w_8v_8\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ A_{72}^6(x,s)&w_3^6v_3&\ldots&w_8^6v_8\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}v_2&\ldots&v_7&A_{78}(x,s)\\ w_2v_2&\ldots&w_2v_7&A_{78}^1(x,s)\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ w_2^6v_2&\ldots&w_2^6v_7&A_{78}^6(x,s)\end{vmatrix}. \tag{47}$$

Аналогично формулам (41)–(47) можно вычислить определители $D_{8k}(x,s)$ $(k=1,2,\ldots,8)$ из (17)–(18):

$$D_{8k}(x,s)=(as)^{21}\left[D_{8k,0}(x,s)-\frac{D_{8k,7}(x,s)}{8a^7s^7}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right)\right],\quad k=1,2,\ldots,8, \tag{48}$$

$$D_{8k,0}(x,s)=(-1)^kw_ke^{-aw_ksx},\quad k=1,2,\ldots,8, \tag{49}$$

при этом величины $D_{8k,7}(x,s)$ выписываются в виде суммы определителей аналогично величине $D_{81,7}(x,s)$ из (47).

Используя формулы (7)–(12), (42)–(50), (23)–(27), (37), (39), векторы-столбцы $(u_{1k};u_{2k})^*$ $(k=1,2,3)$ из формулы (40) приведем к следующему виду:

$$\begin{pmatrix}u_{11}\\ u_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w_1^{n_1}e^{aw_1s\pi}-\frac{A_{71}^{n_1}(\pi,s)}{8a^7s^7}+\frac{\alpha e^{aw_1sb}}{8a^7s^7}R(\pi;s;n_1)\\ w_1^{n_2}e^{aw_1s\pi}-\frac{A_{71}^{n_2}(\pi,s)}{8a^7s^7}+\frac{\alpha e^{aw_1sb}}{8a^7s^7}R(\pi;s;n_2)\end{pmatrix}, \tag{50}$$

$$R(\pi;s;n,k)=\sum_{m=1}^{8}w_mw_m^{n_k}e^{aw_msx}\int_0^x r(t)e^{-aw_mst}dt_{rm},\quad k=1,2; \tag{51}$$

$$\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2^{n_1} e^{aw_2 s\pi} - \frac{A_{72}^{n_1}(\pi,s)}{8a^7s^7} + \frac{\alpha e^{aw_2 sb}}{8a^7s^7} R(\pi;s;n_1) \\ w_2^{n_2} e^{aw_2 s\pi} - \frac{A_{72}^{n_2}(\pi,s)}{8a^7s^7} + \frac{\alpha e^{aw_2 sb}}{8a^7s^7} R(\pi;s;n_2) \end{pmatrix}, \tag{52}$$

$$\begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_3^{n_1} e^{aw_3 s\pi} - \frac{A_{73}^{n_1}(\pi,s)}{8a^7s^7} + \frac{\alpha e^{aw_3 sb}}{8a^7s^7} R(\pi;s;n_1) \\ w_3^{n_2} e^{aw_3 s\pi} - \frac{A_{73}^{n_2}(\pi,s)}{8a^7s^7} + \frac{\alpha e^{aw_3 sb}}{8a^7s^7} R(\pi;s;n_2) \end{pmatrix}, \tag{53}$$

причем для сектора 1) в величинах $A_{7m}^{n_k}(\pi,s)$ из (10), (11) и $R(\pi;s;n_k)$ ($k=1,2$; $m=1,2,3$) из (51) необходимо оставлять только экспоненты $e^{aw_1 s\pi}$, $e^{aw_2 s\pi}$ и $e^{aw_3 s\pi}$.

Применяя формулы (50)–(53), уравнение (40) можно переписать в следующем виде:

$$g_1(s) = g_{1,0}(s) - \frac{g_{1,7,1}(s)}{8a^7s^7} + \frac{g_{1,7,2}(s)}{8a^7s^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right) = 0, \tag{54}$$

$$g_{1,0}(s) = \begin{vmatrix} w_1^{n_1} e^{aw_1 s\pi} & w_2^{n_1} e^{aw_2 s\pi} \\ w_1^{n_2} e^{aw_1 s\pi} & w_2^{n_2} e^{aw_2 s\pi} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} w_2^{n_1} e^{aw_2 s\pi} & w_3^{n_1} e^{aw_3 s\pi} \\ w_2^{n_2} e^{aw_2 s\pi} & w_3^{n_2} e^{aw_3 s\pi} \end{vmatrix} z^{M_6}, \tag{55}$$

$$\begin{aligned} g_{1,7,1}(s) = {} & \begin{vmatrix} A_{71}^{n_1}(\pi,s) & w_2^{n_1} e^{aw_2 s\pi} \\ A_{71}^{n_2}(\pi,s) & w_2^{n_2} e^{aw_2 s\pi} \end{vmatrix}_1 + \begin{vmatrix} w_1^{n_1} e^{aw_2 s\pi} & A_{72}^{n_1}(\pi,s) \\ w_1^{n_2} e^{aw_2 s\pi} & A_{72}^{n_2}(\pi,s) \end{vmatrix}_2 \\ & - \begin{vmatrix} A_{72}^{n_1}(\pi,s) & w_3^{n_1} e^{aw_3 s\pi} \\ A_{72}^{n_2}(\pi,s) & w_3^{n_2} e^{aw_3 s\pi} \end{vmatrix}_3 z^{M_6} - \begin{vmatrix} w_2^{n_1} e^{aw_2 s\pi} & A_{73}^{n_1}(\pi,s) \\ w_2^{n_2} e^{aw_2 s\pi} & A_{73}^{n_2}(\pi,s) \end{vmatrix}_4 z^{M_6}, \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} g_{1,7,2}(s) = {} & \begin{vmatrix} \alpha e^{aw_1 sb} R(\pi;s;n_1) & w_2^{n_1} e^{aw_2 s\pi} \\ \alpha e^{aw_1 sb} R(\pi;s;n_2) & w_2^{n_2} e^{aw_2 s\pi} \end{vmatrix}_5 + \begin{vmatrix} w_1^{n_1} e^{aw_1 s\pi} & \alpha e^{aw_2 sb} R(\pi;s;n_1) \\ w_1^{n_2} e^{aw_1 s\pi} & \alpha e^{aw_2 sb} R(\pi;s;n_2) \end{vmatrix}_6 \\ - & \begin{vmatrix} \alpha e^{aw_2 sb} R(\pi;s;n_1) & w_3^{n_1} e^{aw_3 s\pi} \\ \alpha e^{aw_2 sb} R(\pi;s;n_2) & w_3^{n_2} e^{aw_3 s\pi} \end{vmatrix}_7 z^{M_6} - \begin{vmatrix} w_2^{n_1} e^{aw_2 s\pi} & \alpha e^{aw_3 sb} R(\pi;s;n_1) \\ w_2^{n_2} e^{aw_2 s\pi} & \alpha e^{aw_3 sb} R(\pi;s;n_2) \end{vmatrix}_8 z^{M_6}. \end{aligned} \tag{57}$$

Применяя свойства определителей, функцию $g_{1,0}(s)$ из (55) приведем к виду

$$g_{1,0}(s) = \begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1} \\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2} \end{vmatrix} e^{a(w_1+w_2)s\pi} - \begin{vmatrix} w_2^{n_1} & w_3^{n_1} \\ w_2^{n_2} & w_3^{n_2} \end{vmatrix} e^{a(w_2+w_3)s\pi} z^{M_6}, \tag{58}$$

при этом благодаря формулам (5) имеем

$$\begin{gathered} \begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1} \\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^{n_1} & z^{n_1} \\ 1^{n_2} & z^{n_2} \end{vmatrix} = z^{n_2} - z^{n_1} = E_2; \\ \begin{vmatrix} w_2^{n_1} & w_3^{n_1} \\ w_2^{n_2} & w_3^{n_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z^{n_1} & z^{2n_1} \\ z^{n_2} & z^{2n_2} \end{vmatrix} = z^{n_1} z^{n_2} E_2 = z^{N_2} E_2, \quad N_2 = n_1 + n_2. \end{gathered} \tag{59}$$

Вычислим определитель $|\ldots|_1$ из (56), применяя формулы (10), (11), (59) и свойства определителей

$$|\ldots|_1=\begin{vmatrix} w_1w_1^{n_1}v_1\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a11}+w_2w_2^{n_1}v_2\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a12}+w_3w_3^{n_1}v_3\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a13} & w_2^{n_1}\\ w_1w_1^{n_2}v_1\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a11}+w_2w_2^{n_2}v_2\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a12}+w_3w_3^{n_2}v_3\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a13} & w_2^{n_2}\end{vmatrix}e^{aw_2s\pi}$$

$$=e^{aw_2s\pi}\left\{w_1v_1\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a11}\begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1}\\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2}\end{vmatrix}+w_2v_2\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a12}\begin{vmatrix} w_2^{n_1} & w_2^{n_1}\\ w_2^{n_2} & w_2^{n_2}\end{vmatrix}\right. \tag{60}$$

$$\left.+w_3v_3\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a13}\begin{vmatrix} w_3^{n_1} & w_2^{n_1}\\ w_3^{n_2} & w_2^{n_2}\end{vmatrix}\right\}\overset{(60)}{=}w_1E_2e^{a(w_1+w_2)s\pi}\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a11}$$

$$-w_3E_2z^{N_2}e^{a(w_2+w_3)s\pi}\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a13},$$

где были введены обозначения $v_k=e^{aw_ks\pi}$ $(k=1,2,\ldots,8)$.

Аналогичным образом выводятся формулы для определителей $|\ldots|_2, |\ldots|_3$ и $|\ldots|_4$ из (56):

$$|\ldots|_2=e^{aw_1s\pi}\begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_1w_1^{n_1}v_1\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a21}+w_2w_2^{n_1}v_2\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a22}+w_3w_3^{n_1}v_3\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a23}\\ w_1^{n_2} & w_1w_1^{n_2}v_1\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a21}+w_2w_2^{n_2}v_2\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a22}+w_3w_3^{n_2}v_3\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a23}\end{vmatrix} \tag{61}$$

$$=w_2E_2e^{a(w_1+w_2)s\pi}\int\limits_0^\pi q(t)dt_{a22};$$

$$|\ldots|_3=w_2E_2z^{N_2}e^{a(w_2+w_3)s\pi}\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a22};$$

$$|\ldots|_4=-w_1E_2e^{a(w_1+w_2)s\pi}\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a31}+w_3E_2z^{N_2}e^{a(w_2+w_3)s\pi}\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{a33}. \tag{62}$$

Далее вычисляем определители $|\ldots|_m$ $(m=5,6,7,8)$ из (57):

$$|\ldots|_5=\alpha\begin{vmatrix} w_1w_1^{n_1}v_1\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{r1}+w_2w_2^{n_1}v_2\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{r2}+w_3w_3^{n_1}v_3\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{r3} & w_2^{n_1}\\ w_1w_1^{n_2}v_1\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{r1}+w_2w_2^{n_2}v_2\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{r2}+w_3w_3^{n_2}v_3\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{r3} & w_2^{n_2}\end{vmatrix}$$

$$\times e^{aw_1sb}e^{aw_2s\pi}=w_1E_2\alpha e^{aw_1sb}e^{a(w_1+w_2)s\pi}\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{r1} \tag{63}$$

$$-\alpha w_3E_2z^{N_2}e^{aw_1bs}e^{a(w_2+w_3)s\pi}\left(\int\limits_0^\pi\ldots\right)_{r3};$$

$$|\ldots|_6=\alpha\begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_1w_1^{n_1}v_1\Big(\int\limits_0^\pi\ldots\Big)_{r1}+w_2w_2^{n_1}v_2\Big(\int\limits_0^\pi\ldots\Big)_{r2}+w_3w_3^{n_1}v_3\Big(\int\limits_0^\pi\ldots\Big)_{r3}\\ w_1^{n_2} & w_1w_1^{n_2}v_1\Big(\int\limits_0^\pi\ldots\Big)_{r1}+w_2w_2^{n_2}v_2\Big(\int\limits_0^\pi\ldots\Big)_{r2}+w_3w_3^{n_2}v_3\Big(\int\limits_0^\pi\ldots\Big)_{r3}\end{vmatrix} \tag{64}$$

$$\times e^{aw_2sb}e^{aw_2s\pi}=\alpha w_2E_2e^{aw_2sb}e^{a(w_1+w_2)s\pi}\int\limits_0^\pi q(t)dt_{r2};$$

$$|\ldots|_7=w_2E_2z^{N_2}\alpha e^{aw_2sb}e^{a(w_2+w_3)s\pi}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{r2};$$

$$|\ldots|_8=(-\alpha)w_1E_2e^{aw_3sb}e^{a(w_1+w_2)s\pi}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{r1}+\alpha w_3E_2z^{N_2}e^{aw_3sb}e^{a(w_2+w_3)s\pi}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{r3}. \tag{65}$$

Подставляя формулы (60)–(65) в уравнение (54)–(59) и поделив на $E_2e^{a(w_2+w_3)s\pi}\neq 0$, приведем его к следующему виду:

$$g_1(s)=\Big[e^{a(w_1-w_3)s\pi}-z^{M_6}z^{N_2}\Big]-\frac{1}{8a^7s^7}\big[\theta_1(s)+\theta_2(s)\big]+\frac{\alpha}{8a^7s^7}\theta_3(s)+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^{14}}\Big)=0, \tag{66}$$

$$\theta_1(s)=w_1e^{a(w_1-w_3)s\pi}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{a11}+w_2e^{a(w_1-w_3)s\pi}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{a22}$$

$$-w_2z^{M_6}z^{N_2}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{a22}-w_3z^{M_6}z^{N_2}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{a33};$$

$$\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{ann}\overset{(10)}{=}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{a11}=\int\limits_0^\pi q(t)dt_{a11},\quad k=1,2,\ldots,8; \tag{67}$$

$$\theta_2(s)=w_1z^{M_6}e^{a(w_1-w_3)s\pi}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{a31}-w_3z^{N_2}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{a13};$$

$$\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{a13}\overset{(10)}{=}\int\limits_0^\pi q(t)e^{a(w_1-w_3)st}dt_{a13}; \tag{68}$$

$$\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{a31}\overset{(10)}{=}\int\limits_0^\pi q(t)e^{a(w_3-w_1)st}dt_{a31};$$

$$\theta_3(s)=w_1e^{aw_1sb}e^{a(w_1-w_3)s\pi}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{r1}-w_3z^{N_2}e^{aw_1sb}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{r3}$$

$$+w_2e^{aw_2sb}e^{a(w_1-w_2)s\pi}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{r2}-w_2z^{M_6}z^{N_2}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{r2}$$

$$+w_1z^{M_6}e^{aw_3sb}e^{a(w_1-w_3)s\pi}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{r1}-w_3z^{M_6}z^{N_2}e^{aw_3sb}\Bigg(\int\limits_0^\pi\ldots\Bigg)_{r3};$$

$$\left(\int_0^\pi \dots\right)_{rk} \overset{(52)}{=} \int_0^\pi r(t)e^{-aw_k st}dt_{rk}, \quad k=1,2,\dots,8. \tag{69}$$

7. Асимптотика собственных значений ФДО (1)–(3) в секторе 1) индикаторной диаграммы

Основное приближение уравнения (66)–(69) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} e^{a(w_1-w_3)s\pi} = z^{M_6}z^{N_2} = e^{2\pi ik}e^{\frac{2\pi i}{8}M_6}e^{\frac{2\pi i}{8}N_2} \Leftrightarrow s_{k,1,\text{осн}} = \frac{2i\tilde{k}}{a(w_1-w_3)}, \\ \tilde{k} = k + \frac{M_6}{8} + \frac{N_2}{8}, \quad M_6 = \sum_{k=1}^{6} m_k, \quad N_2 = n_1+n_2, \quad k\in\mathbb{N}. \end{gathered} \tag{70}$$

Формула для $s_{k,1,\text{осн}}$ из (70) помогает выписать формулу для нахождения корней квазиполинома вида (66)–(69) (см. [20, 21]).

Теорема 6. *Асимптотика собственных значений ФДО* (1)–(3) *в секторе* 1) *индикаторной диаграммы на рис.* 1 *имеет следующий вид:*

$$s_{k,1} = \frac{2i}{a(w_1-w_3)}\left[\tilde{k} + \frac{d_{7k,1}}{\tilde{k}^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right)\right], \quad k\in\mathbb{N}, \tag{71}$$

где величина $\tilde{k}$ *определена формулой* (70).

◁ Для доказательства теоремы 6 необходимо доказать, что величины $d_{7k,1}$ из (71) находятся единственным образом, попутно мы приведем явные формулы для их вычисления.

По формулам Маклорена имеем

$$\begin{aligned} e^{a(w_1-w_3)s\pi}\Big|_{s_{k,1}} &\overset{(71)}{=} \exp\left[a(w_1-w_3)\pi\frac{2i}{a(w_1-w_3)}\left(\tilde{k} + \frac{d_{7k,1}}{\tilde{k}^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right)\right)\right] \\ &= z^{M_6}z^{N_2}\left[1 + \frac{2\pi i d_{7k,1}}{\tilde{k}^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right)\right], \end{aligned} \tag{72}$$

$$\frac{1}{s^7}\Big|_{s_{k,1}} \overset{(72)}{=} \frac{a^7(w_1-w_3)^7}{2^7 i^7}\frac{1}{\tilde{k}^7}\left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right)\right). \tag{73}$$

Подставляя формулы (71)–(73) в уравнения (66)–(69), получаем

$$\begin{gathered} \left[z^{M_6}z^{N_2} + z^{M_6}z^{N_2}\frac{2\pi i d_{7k,1}}{\tilde{k}^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right) - z^{M_6}z^{N_2}\right] - \frac{a^7(w_1-w_3)^7 i}{2^7 i^7 i}\frac{1}{\tilde{k}^7}\left(\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right)\right) \\ \times\left\{\theta_1(s)\big|_{s_{k,1}} + \theta_2(s)\big|_{s_{k,1}} - \alpha\theta_3(s)\big|_{s_{k,1}}\right\} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right) = 0, \end{gathered} \tag{74}$$

$$\begin{aligned} \theta_1(s)\big|_{s_{k,1}} &= w_1 z^{M_6}z^{N_2}\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a11} + w_2 z^{M_6}z^{N_2}\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a22} \\ &- w_2 z^{M_6}z^{N_2}\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a22} - w_3 z^{M_6}z^{N_2}\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a33} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{14}}\right) \\ &= (w_1-w_3)z^{M_6}z^{N_2}\int_0^\pi q(t)dt_{a11}; \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2(s)\Big|_{s_{k,1}} &= z^{M_6} z^{N_2}\left[w_1 z^{M_6}\Big(\int\limits_0^\pi \dots\Big)_{a31} - w_3 z^{-M_6}\Big(\int\limits_0^\pi \dots\Big)_{a13}\right]\Bigg|_{s_{k,1}} \\
&= (-1) z^{M_6} z^{N_2} e^{\frac{2\pi i}{8}}\left[e^{\frac{2\pi i}{8}} e^{-\frac{2\pi i}{8}M_6}\int\limits_0^\pi q(t)\exp\left[a(w_1-w_3)\frac{2i\tilde{k}t}{a(w_1-w_3)} + \underline{O}\Big(\frac{1}{\tilde{k}^7}\Big)\right]\right]dt_{a13} \\
&\quad - e^{-\frac{2\pi i}{8}} e^{\frac{2\pi i}{8}M_6}\int\limits_0^\pi q(t)\left[e^{-2i\tilde{k}t} + \underline{O}\Big(\frac{1}{\tilde{k}^7}\Big)\right]dt_{a31} \\
&= (-2i) z^{M_6} z^{N_2} e^{\frac{2\pi i}{8}}\int\limits_0^\pi q(t)\sin\left[2\tilde{k}t - \frac{2\pi}{8}M_6 + \frac{2\pi}{8}\right]dt_{b1};
\end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3(s)\big|_{s_{k,1}} &\overset{(70),(73)}{=} z^{M_6} z^{N_2}\Bigg\{w_1 e^{aw_1 sb}\Big(\int\limits_0^\pi \dots\Big)_{r1} - w_3 z^{-M_6} e^{aw_1 sb}\Big(\int\limits_0^\pi \dots\Big)_{r3} \\
&+ w_2 e^{aw_2 sb}\Big(\int\limits_0^\pi \dots\Big)_{r2} - w_2 e^{aw_2 sb}\Big(\int\limits_0^\pi \dots\Big)_{r2} + w_1 z^{M_6} e^{aw_3 sb}\Big(\int\limits_0^\pi \dots\Big)_{r1} \\
&- w_3\Big(\int\limits_0^\pi \dots\Big)_{r1} - w_3 e^{aw_3 sb}\Big(\int\limits_0^\pi \dots\Big)_{r3} + \underline{O}\Big(\frac{1}{\tilde{k}^7}\Big)\Bigg\} = z^{M_6} z^{N_2}[\theta_{31}(s) + \theta_{32}(s)]\Big|_{s_{k,1}},
\end{aligned} \tag{77}$$

$$\theta_{31}(s) = w_1 z^{M_6} e^{aw_3 sb}\int\limits_0^\pi r(t) e^{-aw_1 st} dt_{r1} - w_3 z^{-M_6} e^{aw_1 sb}\int\limits_0^\pi r(t) e^{-aw_3 st} dt_{r3}, \tag{78}$$

$$\theta_{32}(s) = w_1 e^{aw_1 sb}\int\limits_0^\pi r(t) e^{-aw_1 st} dt_{r1} - w_3 e^{aw_3 sb}\int\limits_0^\pi r(t) e^{-aw_3 st} dt_{r3}. \tag{79}$$

При этом из формул (78) и (70) получаем

$$\begin{aligned}
\theta_{31}(s)\big|_{s_{k,1}\text{осн}} &= e^{\frac{2\pi i}{8}}\Bigg[e^{-\frac{2\pi i}{8}} e^{\frac{2\pi i}{8}M_6}\exp\Big(\frac{w_1+w_3}{w_1-w_3} i\tilde{k}b\Big)\exp\Big(-\frac{w_1-w_3}{w_1-w_3} i\tilde{k}b\Big) \\
&\times \int\limits_0^\pi r(t)\exp\Big(-\frac{w_1+w_3}{w_1-w_3} i\tilde{k}t\Big)\exp\Big(-\frac{w_1-w_3}{w_1-w_3} i\tilde{k}t\Big) dt_{r1} \\
&- e^{-\frac{2\pi i}{8}} e^{\frac{2\pi i}{8}M_6}\exp\Big(\frac{w_1+w_3}{w_1-w_3} i\tilde{k}b\Big)\exp\Big(\frac{w_1-w_3}{w_1-w_3} i\tilde{k}b\Big) \\
&\times \int\limits_0^\pi r(t)\exp\Big(-\frac{w_1+w_3}{w_1-w_3} i\tilde{k}t\Big)\exp\Big(\frac{w_1-w_3}{w_1-w_3} i\tilde{k}t\Big) dt_{r3}\Bigg].
\end{aligned} \tag{80}$$

Из формул (5) получаем

$$\frac{w_1+w_3}{w_1-w_3} = \frac{1+e^{\frac{4\pi i}{8}}}{1-e^{\frac{4\pi i}{8}}} i = \frac{e^{\frac{2\pi i}{8}}(e^{-\frac{2\pi i}{8}} + e^{\frac{2\pi i}{8}})}{e^{\frac{2\pi i}{8}}(e^{-\frac{2\pi i}{8}} - e^{\frac{2\pi i}{8}})} i = -\operatorname{ctg}\Big(\frac{2\pi}{8}\Big). \tag{81}$$

Подставляя (81) в формулу (80), выводим

$$\theta_{31}(s)\big|_{s_{k,1}\text{осн}} = e^{\frac{2\pi i}{8}} e^{-\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4})\tilde{k}b} \int\limits_0^\pi r(t) e^{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4})\tilde{k}b}(-1)\Bigg[\exp\left(i\tilde{k}t + \frac{2\pi}{8} - \frac{2\pi}{8}M_6 + i\tilde{k}b\right)$$

$$- \exp\left(-i\tilde{k}t - \frac{2\pi}{8} + \frac{2\pi}{8}M_6 - i\tilde{k}b\right)\Bigg]dt \tag{82}$$

$$= (-2i)e^{\frac{2\pi i}{8}} e^{-\tilde{k}b} \int\limits_0^\pi r(t) e^{\tilde{k}t} \sin\left[i\tilde{k}t + i\tilde{k}b + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi M_6}{4}\right] dt_{b2}.$$

Аналогичным образом из формул (5), (79) и (70) выводим

$$\theta_{32}(s)\big|_{s_{k,1}\text{осн}} = (-2i)e^{\frac{2\pi i}{8}} e^{-\tilde{k}b} \int\limits_0^\pi r(t) e^{\tilde{k}t} \sin\left[\tilde{k}t - \tilde{k}b + \frac{\pi}{4}\right] dt_{b3}. \tag{83}$$

Подставляя формулы (75)–(83) в уравнение (74), видим, что коэффициенты при $\tilde{k}^0$ сокращаются, а приравнивая коэффициенты при $\frac{1}{\tilde{k}^7}$, находим

$$d_{7k,1} = \frac{(w_1 - w_2)^8 i}{2\pi i 8 \cdot 2^7 i^8} \Bigg\{ \frac{\theta_1(s)\big|_{s_{k,1}\text{осн}}}{w_1 - w_3} + \frac{\theta_2(s)\big|_{s_{k,1}\text{осн}}}{w_1 - w_3}$$

$$- \frac{\alpha}{w_1 - w_3}\Big[\theta_{31}(s)\big|_{s_{k,1}\text{осн}} + \theta_{32}(s)\big|_{s_{k,1}\text{осн}}\Big]\Bigg\}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{84}$$

Из формулы (5) получаем

$$w_1 - w_3 = 1 - e^{\frac{4\pi i}{8}} = e^{\frac{2\pi i}{8}}\left(e^{-\frac{2\pi i}{8}} - e^{\frac{2\pi i}{8}}\right) = (-2i)e^{\frac{2\pi i}{8}} \sin\left(\frac{2\pi}{8}\right). \tag{85}$$

С помощью формул (75)–(83) и (85) из (84) находим

$$d_{7k,1} = \frac{(w_1 - w_3)^8}{8\pi 2^8} \Bigg\{ \left(\int\limits_0^\pi \dots\right)_{a11} + \frac{(-2i)e^{\frac{2\pi i}{8}}}{w_1 - w_3}\left(\int\limits_0^\pi \dots\right)_{b1} - \frac{\alpha}{w_1 - w_3}(-2i)e^{\frac{2\pi i}{8}} e^{-\tilde{k}b}$$

$$\times \int\limits_0^\pi r(t) e^{\tilde{k}t}\left[\sin\left(\tilde{k}t - \tilde{k}b + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\tilde{k}t + \tilde{k}b + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi M_6}{4}\right)\right] dt\Bigg\}. \tag{86}$$

Применяя формулы

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right), \quad \frac{2ie^{\frac{2\pi i}{8}}}{w_1 - w_3} = \frac{2ie^{\frac{2\pi i}{8}}}{(-2i)e^{\frac{2\pi i}{8}}\sin(\frac{2\pi}{8})} = -\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4})},$$

из (86) выводим

$$d_{7k,1} = \frac{(\sin(\frac{\pi}{4}))^8}{8\pi} \Bigg\{ \int\limits_0^\pi q(t) dt_{a11} + \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4})} \int\limits_0^\pi q(t) \sin\left[2\tilde{k}t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi M_6}{4}\right] dt_{b1}$$

$$- \frac{2\alpha}{\sin(\frac{\pi}{4})} e^{-\tilde{k}b} \sin\left(\tilde{k}b - \frac{\pi M_6}{8}\right) \int\limits_0^\pi r(t) e^{\tilde{k}t} \cos\left[\tilde{k}t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi M_6}{8}\right] dt_{b4}\Bigg\}, \tag{87}$$

$$\tilde{k} = k + \frac{M_6}{8} + \frac{N_2}{8}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Формула (87) показывает, что коэффициенты $d_{7k,1}$ формулы (71) находятся единственным образом, тем самым теорема 6 доказана. $\triangleright$

Аналогичным образом изучаются сектора 2)–8) индикаторной диаграммы на рис. 1.

Теорема 7. *Асимптотика собственных значений ФДО* (1)–(3) *в секторах* 2)–8) *индикаторной диаграммы представляется в следующем виде:*

$$s_{k,2} = s_{k,1}e^{\frac{2\pi i}{8}}; \quad s_{k,3} = s_{k,2}e^{\frac{2\pi i}{8}} = s_{k,1}e^{\frac{4\pi i}{8}}; \ \ldots; \ s_{k,m} = s_{k,m-1}e^{\frac{2\pi i}{8}} = s_{k,1}e^{\frac{2\pi i}{8}(m-1)},$$
$$\lambda_{k,m} = (s_{k,m})^8, \quad m = 1, 2, \ldots, 8,$$

при этом $s_{k,1}$ *определены формулами* (70), (71), (87).

Литература

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.—М.: Наука.—1969.—528 с.
2. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Мат. сб.—1968.—Т. 75 (117), № 4.—С. 558–566.
3. *Садовничий В. А.* О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Мат. сб.—1967.—Т. 72 (114), № 2.—С. 293–317.
4. *Лидский В. В., Садовничий В. А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функцион. анализ и его прил.—1967.—Т. 1, № 2.—С. 52–59.
5. *Митрохин С. И.* О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестн. МГУ. Сер. Математика. Механика.—1986.—№ 6.—С. 3–6.
6. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами // Диф. уравнения.—1992.—Т. 28, № 3.—С. 530–532.
7. *Митрохин С. И.* О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Докл. РАН.—1997.—Т. 356, № 1.—С. 13–15.
8. *Мартинович М.* Об одной краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, № 2.—С. 239–245.
9. *Мартинович М.* Дзета-функция и формулы следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, № 3.—С. 537–540.
10. *Митрохин С. И.* О формулах следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением с разрывным коэффициентом // Диф. уравнения.—1986.—Т. 22, № 6.—С. 927–931.
11. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Изв. РАН. Сер. Математика.—2000.—Т. 64, № 4.—С. 47–106. DOI: 10.4213/im295.
12. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма — Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки.—1999.—Т. 66, № 6.—С. 897–912. DOI: 10.4213/mzm1234.
13. *Савчук А. М.* Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма — Лиувилля с δ-потенциалом // Успехи мат. наук.—2000.—Т. 55, № 6 (336).—С. 155–156. DOI: 10.4213/rm352.
14. *Митрохин С. И.* Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четверного порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестн. МГУ. Сер. Математика. Механика.—2009.—№ 3.—С. 102–104.
15. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечетного порядка с суммируемым потенциалом // Диф. уравнения.—2011.—Т. 47, № 12.—С. 1808–1811.
16. *Митрохин С. И.* Об исследовании дифференциального оператора с суммируемым потенциалом с разрывной весовой функцией // Уфимский мат. журн.—2017.—Т. 9, № 4.—С. 74–86.
17. *Митрохин С. И.* Периодическая краевая задача для дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемым потенциалом // Владикавк. мат. журн.—2017.—Т. 19, № 4.—С. 35–49. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.9166.
18. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения.—М.: Мир.—1967.—548 с.
19. *Митрохин С. И.* Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией // Изв. вузов. Математика.—2018.—№ 6.—С. 31–47.

20. *Садовничий В. А., Любишкин В. А., Белабасси Ю.* О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 254, № 6.—С. 1346–1348.
21. *Садовничий В. А., Любишкин В. А.* О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, № 1.—С. 109–116.

Статья поступила 30 мая 2018 г.

Митрохин Сергей Иванович
НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2019, Volume 21, Issue 2, P. 38–57

ON THE STUDY OF THE SPECTRUM OF A FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL OPERATOR WITH A SUMMABLE POTENTIAL

Mitrokhin, S. I.[1]

[1] Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Abstract. The paper deals with a functional-differential operator of the eighth order with a summable potential. The boundary conditions are separated. Functional-differential operators of this kind arise in the study of vibrations of beams and bridges made up of materials of different density. To solve the functional-differential equation that defines a differential operator, the method of variation of constants is applied. The solution of the initial functional-differential equation is reduced to the solution of the Volterra integral equation. The resulting Volterra integral equation is solved by Picard's method of successive approximations. As a result of the investigation of the integral equation, asymptotic formulas and estimates for the solutions of the functional-differential equation that defines the differential operator are obtained. For large values of the spectral parameter, the asymptotics of the solutions of the differential equation defining the differential operator is derived. Similar to the asymptotic estimates of solutions of the differential operator of the second order with smooth and piecewise smooth coefficients, asymptotic estimates of solutions of the initial functional differential equation are established. The obtained asymptotic formulas are used to study the boundary conditions. As a result, we come to the study of the roots of a function represented as a determinant of the eighth order. To find the roots of this function, it is necessary to study the indicator diagram. The roots of the eigenvalue equation are in eight sectors of an infinitesimal solution, defined by the indicator diagram. The behavior of the roots of this equation in each of the sectors of the indicator diagram and the asymptotics of the eigenvalues of the differential operator under study are studied.

Key words: functional-differential operator, boundary value problem, summable potential, boundary conditions, spectral parameter, indicator diagram, asymptotics of the eigenvalues.

Mathematical Subject Classification (2010): 34K08.

For citation: *Mitrokhin, S. I.* On the Study of the Spectrum of a Functional-Differential Operator with a Summable Potential, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 2, pp. 38–57 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32116.

References

1. *Naimark, M. A. Lineynye differencial'nye operatory* [Linear Differential Operators], Moscow, Nauka, 1969, 528 p. (in Russian).
2. *Lidskyi, V. B.* and *Sadovnichiy, V. A.* Asymptotic Formulas for the Zeros of a Class of Entire Functions, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 519–527. DOI: 10.1070/SM1968v004n04 ABEH002812.

3. Sadovnichiy, V. A. About Traces of Ordinary Differential Operators of the Highest Orders, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 263–288. DOI: 10.1070/SM1967v001n02ABEH001979.
4. Lidskyi, V. B. and Sadovnichiy, V. A. The Trace of Ordinary Differential Operators of High Order, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 263–288. DOI: 10.1070/SM1967v001n02 ABEH001979.
5. Mitrokhin, S. I. About Formulas of Regularized Traces for Differential Operators of the Second Order with Discontinuous Coefficients, *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya: matematika, mehanika* [Vestnik MGU. Ser. Mathematics, Mechanics], 1986, no. 6, pp. 3–6 (in Russian).
6. Mitrokhin, S. I. About Spectral Properties of Differential Operators with Discontinuous Coefficients, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1992, vol. 28, no. 3, pp. 530–532 (in Russian).
7. Mitrokhin, S. I. About Some Spectral Properties of Differential Operators of the Second Order with Discontinuous Weight Function, *Doklady RAN* [Reports of the Russian Academy of Sciences], 1997, vol. 356, no. 1, pp. 13–15 (in Russian).
8. Martinovich, M. On a Boundary Value Problem for a Functional-Differential Equation, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1982, vol. 18, no. 2, pp. 239–245 (in Russian).
9. Martinovich, M. The Zeta-Function and Trace Formulas for one Boundary-Value Problem with a Functional-Differential Equation, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1982, vol. 18, no. 3, pp. 537–540 (in Russian).
10. Mitrokhin, S. I. On the Trace Formulas for a Boundary Value Problem with a Functional-Differential Equation with a Discontinuous Coefficient, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1986, vol. 22, № 6, pp. 927–931 (in Russian).
11. Vinokurov, V. A. and Sadovnichii, V. A. Asymptotics of any Order for the Eigenvalues and Eigenfunctions of the Sturm–Liouville Boundary-Value Problem on a Segment with a Summable Potential, *Izvestiya: Mathematics*, 2000, vol. 64, no. 4, pp. 695–754. DOI: 10.1070/IM2000v064n04 ABEH000295.
12. Sachuk, A. M. and Shkalikov, A. A. Sturm–Liouville Operators with Singular Potentials, *Mathematical Notes*, 1999, vol. 66, no. 6, pp. 741–753. DOI: 10.1007/BF02674332.
13. Sachuk, A. M. First-Order Regularised Trace of the Sturm–Liouville Operator with δ-Potential, *Russian Mathematical Surveys*, 2000, vol. 55, no. 6, pp. 1168–1169.
14. Mitrokhin, S. I. The Asymptotics of the Eigenvalues of a Fourth Order Differential Operator with Summable Coefficients, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2009, vol. 64, no. 3, pp. 102–104. DOI: 10.3103/S0027132209030024.
15. Mitrokhin, S. I. On the Spectral Properties of Odd-Order Differential Operators with Integrable Potential, *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 12, pp. 1833–1836. DOI: 10.1134/S00122 66111120123.
16. Mitrokhin, S. I. Study of Differential Operator with Summable Potential with Discontinuous Weight Function, *Ufa Mathematical J.*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 72–84. DOI: 10.13108/2017-9-4-72.
17. Mitrokhin, S. I. A Periodic Boundary Value Problem for a Fourth Order Differential Operator with a Summable Potential, *Vladikavkaz Math. J.*, 2017, vol. 19, no. 1, pp. 35–49. DOI: 10.23671/ VNC.2018.4.9166.
18. Bellman, R. and Cooke, K. L. *Differential-Difference Equations*, New York, Academic Press, 1963, 482 p.
19. Mitrokhin, S. I. Asymptotics of Eigenvalues of Differential Operator With Alternating Weight Function, *Russian Mathematics* (*Izvestiya VUZ. Matematika*), 2018, vol. 62, no. 6, pp. 27–42. DOI: 10.3103/S1066369X1806004X.
20. Sadovnichii, V. A., Lubishkin, V. A. and Belabassi Yu. On Regularized Sums of Roots of an Entire Function of a Certain Class, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1980, vol. 254, no. 6, pp. 1346–1348 (in Russian).
21. Sadovnichii, V. A. and Lubishkin, V. A. Some New Results of the Theory of Regularized Traces of Differential Operators, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1982, vol. 18, no. 1, pp. 109–116 (in Russian).

Received May 30, 2018

Sergei I. Mitrokhin
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia,
Senior Researcher
E-mail: `mitrokhin-sergey@yandex.ru`