

УДК 517.547.22

DOI 10.46698/g8758-9884-5440-f

ОЦЕНКИ ИНДИКАТОРОВ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ
С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОРНЯМИ[#]

Г. Г. Браичев¹, В. Б. Шерстюков²

¹Московский педагогический государственный университет,
Россия, 107140, Москва, ул. Краснопрудная, 14;

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Россия, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31

E-mail: braichev@mail.ru, shervb73@gmail.com

Посвящается 90-летию профессора Коробейника Юрия Фёдоровича

Аннотация. Статья является продолжением серии работ авторов, посвященной изучению связи между закономерностями роста целой функции и характером распределения ее корней. Исследуется асимптотическое поведение целой функции конечного нецелого порядка с последовательностью отрицательных корней, имеющей предписанные нижнюю и верхнюю плотности. Особое внимание уделено случаю нулевой нижней плотности корней. Даны точные оценки для индикатора и нижнего индикатора такой функции. Описаны углы на комплексной плоскости, в которых эти характеристики тождественно равны нулю. В некоторых специальных ситуациях указаны явные формулы для вычисления индикаторов. Используемые термины — обычные плотности последовательности корней — просты и наглядны в отличие от многих типичных для теории роста целых функций сложных интегральных конструкций, содержащих считающую функцию корней. Результаты применяются к известной задаче о наименьшем типе целой функции порядка $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ с корнями на луче. Эта задача достаточно полно изучена лишь в случае $\rho \in (0, 1)$. При $\rho > 1$ не известен точный закон, выражающий наименьший возможный тип такой целой функции через плотности ее корней. Для упомянутой экстремальной величины найдена новая двусторонняя оценка, действующая на всем множестве нецелых положительных значений параметра ρ и усиливающая известные ранее оценки А. Ю. Попова (2009 г.). Сформулирована гипотеза относительно поведения экстремального типа вблизи целых значений ρ . Изложение дополнено кратким обзором классических результатов Ж. Валирона, Б. Я. Левина, А. А. Гольдберга и недавних продвижений из работ А. Ю. Попова и авторов, напрямую связанных с заданным направлением исследования. Очерчен круг перспективных задач по затронутой тематике.

Ключевые слова: целая функция, индикатор, нижний индикатор, тип целой функции, верхняя и нижняя плотности корней.

Mathematical Subject Classification (2010): 30D15, 30D20.

Образец цитирования: Браичев Г. Г., Шерстюков В. Б. Оценки индикаторов целой функции с отрицательными корнями // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 30–46. DOI: 10.46698/g8758-9884-5440-f.

Введение

Так случилось, что будучи воспитанниками ростовской школы комплексного анализа, многие годы возглавляемой профессором Ю. Ф. Коробейником, авторы этой заметки, в разное время переехав в Москву, около пятнадцати лет назад объединили свои усилия

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00236.

для изучения цикла новых, специальных задач теории роста целых функций. Аппарат целых функций является неотъемлемым инструментом при исследовании уравнений типа свертки, операторных уравнений бесконечного порядка, полных и представляющих систем, интерполяционных задач и многих других областей анализа, в которых важные и широко известные результаты принадлежат Ю. Ф. Коробейнику и его научной школе (см. [1]). Статья посвящена юбилею Юрия Федоровича Коробейника — Учителя, «заразившего» нас любовью к целым функциям.

Поздравляем Юрия Федоровича со славной датой, желаем крепкого здоровья и долгих лет творческой жизни!

1. Предварительные сведения и известные результаты

В классической теории роста целых функций давно изучается вопрос о том, как зависит скорость возрастания максимума модуля функции от закона распределения на плоскости последовательности ее корней (см., например, мемуар Э. Линделефа [2]).

Пусть f — целая функция, отличная от тождественного нуля. Будем предполагать, что f имеет бесконечно много корней и записывать их с учетом кратностей по неубыванию модулей в виде последовательности $\Lambda = \Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$. Обозначим

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad r > 0. \quad (1)$$

Одной из основных асимптотических характеристик логарифма максимума модуля (1) целой функции f порядка $\rho \in (0, +\infty)$ является ее *тип*, который определяется по формуле

$$\sigma_\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}. \quad (2)$$

При том же порядке ρ вводят *верхнюю* и *нижнюю плотности* последовательности корней $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ обычным образом:

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}, \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}. \quad (3)$$

Важной проблемой теории целых функций является задача о нахождении соотношений между характеристиками (2) и (3). Так, еще Ж. Валирон [3; ч. 2, II] показал, что в общем случае $\Lambda \subset \mathbb{C}$ при заданном значении верхней плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0$ справедлива оценка

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta}{\rho e}. \quad (4)$$

Известно, что для любого $\rho > 0$ оценка (4) достигается [4; гл. 4, § 1], т. е. существует целая функция f , для которой в (4) имеет место равенство. При дополнительной информации о нижней плотности $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha$, где $\alpha \in [0, \beta]$, оценка может быть усилена:

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta}{\rho} \exp \left\{ \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right\}. \quad (5)$$

По поводу результата (5) см. монографию [5; с. 16] и обзор [6; § 2]. В то же время, благодаря исследованиям Ж. Валирона, А. Данжуа, а затем А. А. Гольдберга, была найдена точная оценка сверху для величины (2) через верхнюю плотность $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0$

множества корней $\Lambda \subset \mathbb{C}$. Эта оценка довольно сложна, но в случае $\rho \in (0, 1)$ она упрощается к виду

$$\sigma_\rho(f) \leq \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho}. \quad (6)$$

Укажем, что (6) достигается на целых функциях с последовательностью отрицательных (или лежащих на фиксированном луче $\arg z = \theta$) корней, имеющей *плотность*

$$\Delta_\rho(\Lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \beta, \quad (7)$$

хотя наличие плотности не является строго обязательным для справедливости равенства в (6) (подробности см. в [6]). Уже здесь начинает проявляться существенное влияние «геометрии» расположения Λ в \mathbb{C} на характер подобных задач.

Переход к целым функциям f с нулями на луче (для определенности считаем, что $\Lambda = \Lambda_f \subset (-\infty, 0)$) приводит к существенному уточнению результатов (4), (5). Дадим формулировку соответствующего утверждения, полученного в работе [7].

Теорема А. Пусть $\rho \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$. Тогда для любой целой функции f порядка ρ с последовательностью отрицательных корней $\Lambda = \Lambda_f$ верхней плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$ и нижней плотности $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha$ выполняется неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^a \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau. \quad (8)$$

Равенство в (8) достигается на некоторой целой функции f с последовательностью отрицательных корней $\Lambda = \Lambda_f$ такой, что $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$ и $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$.

Только два «предельных» случая теоремы А были известны на момент ее появления: $\alpha = \beta$ и $\alpha = 0$. В первом случае, с учетом оценки Валирона (6), получаем формулу

$$\sigma_\rho(f) = \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho},$$

позволяющую вычислять тип целой функции с *измеримой* последовательностью отрицательных корней. Во втором случае из неравенства (8) извлекается принадлежащая А. Ю. Попову [8] точная оценка снизу для типа целой функции

$$\sigma_\rho(f) \geq \beta \max_{a>0} \frac{\ln(a+1)}{a^\rho} \quad (9)$$

при ограничениях $\rho \in (0, 1)$, $\Lambda = \Lambda_f \subset (-\infty, 0)$, $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$.

Еще более сложным образом локализация корней функции сказывается в задаче о наименьшем типе при переходе от луча к углу фиксированного раствора. Такое развитие теорема А получила в работе [9], основной результат которой состоит в следующем.

Теорема В. Пусть заданы числа $\rho \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$, $\theta \in [0, \pi/2]$. Тогда для любой целой функции f порядка ρ с последовательностью корней $\Lambda = \Lambda_f$, расположенной в каком-либо замкнутом угле Γ_θ раствора 2θ , при ограничениях $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha$, выполняется неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} \cos \rho\theta + \max_{a>0} \int_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^a \frac{(\beta a^{-\rho} - \alpha \tau^{-\rho})(\tau + \cos \theta)}{\tau^2 + 2\tau \cos \theta + 1} d\tau. \quad (10)$$

Равенство в (10) достигается на некоторой целой функции f с последовательностью корней $\Lambda = \Lambda_f$, расположенной на сторонах угла Γ_θ так, что $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$ и $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$.

Очевидно, что теорема А следует из теоремы В при $\theta = 0$. Подставляя в оценку (10) значение $\alpha = 0$ и вычисляя интеграл, получим доказанное в [10] незадолго до теоремы В точное неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1)}{a^\rho}. \quad (11)$$

Здесь $\Lambda = \Lambda_f \subset \Gamma_\theta$ с фиксированным раствором $2\theta \in [0, \pi]$, а $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$ с заданными параметрами $\rho \in (0, 1)$, $\beta > 0$. Кроме того [6; заключительная часть § 7], если целая функция f является экстремальной в оценке (11) (см. также (9)), то нижняя плотность (при показателе ρ) множества корней Λ_f необходимо равна нулю. Дополнительную информацию, связанную с результатами этого раздела, см. в обзорах [6, 10].

Несмотря на прозрачность постановок, задачи указанного направления, учитывающие расположение корней целой функции, весьма трудны. В частности, распространение теорем А, В на нецелые значения $\rho > 1$ является на данный момент нерешенной проблемой даже при $\alpha = 0$. В следующем разделе мы дадим возможный подход к решению этой проблемы, основанный на изучении индикатора целой функции. Наряду с новыми утверждениями, для полноты картины будут представлены также недавние результаты о нижнем индикаторе из статьи [11]. Насколько нам известно, обсуждаемые задачи не охвачены этапными исследованиями А. А. Гольдберга 60-х годов прошлого века, мощной теорией предельных множеств В. С. Азарина (см. [12; гл. 1–3]), а также недавними совместными работами К. Г. Малютина, М. В. Кабанко, Т. И. Малютиной [13, 14].

2. Индикаторы целой функции с отрицательными корнями

Напомним определения двух стандартных характеристик роста целой функции, учет которых дает в простых терминах «границы» ее асимптотического поведения на лучах комплексной плоскости.

Для целой функции $f \not\equiv 0$ *индикатор* и *нижний индикатор* при порядке $\rho > 0$ задаются соответственно формулами

$$h_\rho(f, \theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho}, \quad (12)$$

$$\underline{h}_\rho(f, \theta) = \sup_{E_0} \lim_{r \rightarrow +\infty, r \notin E_0} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho},$$

в которых аргумент $\theta \in (-\pi, \pi]$. Супремум во второй формуле берется по всем множествам $E_0 \subset (0, +\infty)$ *нулевой относительной меры* (подробную информацию об индикаторах целой функции см. в [4; гл. I, § 15; гл. II, § 1], [15, 16]).

В этом разделе рассматриваем целую функцию f положительного нецелого порядка ρ и нормального типа с последовательностью отрицательных корней $\Lambda = \Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$, где

$$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = -\infty. \quad (13)$$

Для такой функции f имеем

$$\begin{cases} \underline{h}_\rho(f, \theta) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho}, & \theta \in (-\pi, \pi), \\ \underline{h}_\rho(f, \pi) = \sup_{E_0} \lim_{r \rightarrow +\infty, r \notin E_0} \frac{\ln |f(-r)|}{r^\rho}, \end{cases} \quad (14)$$

что при $\theta \in (-\pi, \pi)$ приводит к полному единообразию записи в определении пары «индикатор — нижний индикатор», характеризующей «радиальное» поведение $|f|$ в плоскости с разрезом по отрицательному лучу.

Если последовательность (13) является измеримой, т. е. подчинена (7), то индикатор и нижний индикатор функции f совпадают и однозначно вычисляются по формуле

$$h_\rho(f, \theta) = \underline{h}_\rho(f, \theta) = \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho} \cos \rho\theta, \quad \theta \in (-\pi, \pi] \quad (15)$$

(см., например, [4; гл. I, § 17, теорема 25; гл. II, § 2], [17; гл. 7]). Если же последовательность корней *неизмерима*, т. е. $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) < \overline{\Delta}_\rho(\Lambda)$, то подобные формулы неизвестны, так как индикаторы функции, вообще говоря, не могут быть вычислены через плотности множества ее корней. Возникает вопрос о границах изменения индикатора и нижнего индикатора функции, если зафиксированы верхняя и нижняя плотности (3) последовательности (13).

Изучаем самую «нерегулярную» ситуацию, когда верхняя и нижняя плотности максимально различаются:

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0, \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0. \quad (16)$$

Без ограничения общности можно считать, что функция f задана *каноническим произведением рода $p = [\rho]$* , т. е.

$$\begin{cases} f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), & z \in \mathbb{C} \quad (p = 0), \\ f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \exp \left\{ \frac{z}{\lambda_n} + \dots + \frac{z^p}{p\lambda_n^p} \right\}, & z \in \mathbb{C} \quad (p \in \mathbb{N}). \end{cases} \quad (17)$$

Используя для (17) интегральное представление [17; теорема 7.2.1], запишем

$$\frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^p} = \int_0^{+\infty} \frac{n_\Lambda(r\tau)}{(r\tau)^\rho} K_\rho(\tau, \theta) d\tau, \quad r > 0, \quad \theta \in (-\pi, \pi), \quad (18)$$

где

$$n_\Lambda(t) = \sum_{|\lambda_n| \leq t} 1 = \max \{n : |\lambda_n| \leq t\} \quad (19)$$

— *считающая функция* корней f ,

$$K_\rho(\tau, \theta) = (-1)^p \frac{\tau^{\gamma-1} (\tau \cos((p+1)\theta) + \cos p\theta)}{\tau^2 + 2\tau \cos \theta + 1}, \quad \theta \in (-\pi, \pi). \quad (20)$$

Здесь и ниже приняты обозначения $p = [\rho]$, $\gamma = \{\rho\} = \rho - p$ соответственно для целой и дробной частей числа ρ . Функцию (20) называем *ядром* интегрального представления (18). Четность ядра по переменной θ влечет равенства

$$h_\rho(f, -\theta) = h_\rho(f, \theta), \quad \underline{h}_\rho(f, -\theta) = \underline{h}_\rho(f, \theta), \quad \theta \in (-\pi, \pi),$$

и позволяет ограничиться значениями $\theta \in [0, \pi)$. (Укажем, что не входящее в формулы (18), (20) значение $\theta = \pi$ соответствует отрицательному лучу, на котором расположены корни функции f , а там ее поведение нуждается в отдельном рассмотрении.) При

фиксированных p , θ и возрастании τ от 0 до $+\infty$ возможны две ситуации: ядро *сохраняет* постоянный знак; ядро *меняет* знак при переходе через точку $\tau_* > 0$, где

$$\tau_* = \tau_*(p, \theta) = -\frac{\cos p\theta}{\cos((p+1)\theta)}. \quad (21)$$

В этой связи вводим следующие множества, по факту зависящие только от $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, которые для удобства ссылок назовем *индикаторными множествами*:

$$\Gamma_p^{(+)} = \{\theta \in [0, \pi) : K_\rho(\tau, \theta) > 0 \text{ при всех } \tau \in (0, +\infty)\},$$

$$\Gamma_p^{(-)} = \{\theta \in [0, \pi) : K_\rho(\tau, \theta) < 0 \text{ при всех } \tau \in (0, +\infty)\},$$

$$\Gamma_p^{(\pm)} = \{\theta \in [0, \pi) : \tau_* > 0; K_\rho(\tau, \theta) > 0 \text{ при } \tau \in (0, \tau_*), K_\rho(\tau, \theta) < 0 \text{ при } \tau \in (\tau_*, +\infty)\},$$

$$\Gamma_p^{(\mp)} = \{\theta \in [0, \pi) : \tau_* > 0; K_\rho(\tau, \theta) < 0 \text{ при } \tau \in (0, \tau_*), K_\rho(\tau, \theta) > 0 \text{ при } \tau \in (\tau_*, +\infty)\}.$$

Для любого целого неотрицательного p эти множества не пересекаются и таковы, что

$$[0, \pi) = \Gamma_p^{(+)} \cup \Gamma_p^{(-)} \cup \Gamma_p^{(\pm)} \cup \Gamma_p^{(\mp)}.$$

Например, если $\rho \in (0, 1)$, то $p = 0$, $\gamma = \rho$, и по формулам (20), (21) имеем

$$K_\rho(\tau, \theta) = \frac{\tau^{\rho-1}(\tau \cos \theta + 1)}{\tau^2 + 2\tau \cos \theta + 1}, \quad \tau_* = \tau_*(0, \theta) = -\frac{1}{\cos \theta},$$

откуда

$$\Gamma_0^{(+)} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \Gamma_0^{(-)} = \emptyset, \quad \Gamma_0^{(\pm)} = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \Gamma_0^{(\mp)} = \emptyset. \quad (22)$$

Формулы (22) отвечают «начальному» значению $p = 0$, которое в определенном смысле является особым. Как выглядит результат в общем случае? Из определения (20) следует, что для ответа на вопрос достаточно при заданном $p \in \mathbb{N}$ выяснить поведение на положительной полуоси $\tau > 0$ величины $(-1)^p(\tau \cos((p+1)\theta) + \cos p\theta)$ с параметром $\theta \in [0, \pi)$. Кропотливые вычисления позволяют дать полное описание индикаторных множеств, которое выглядит по-разному для четного и нечетного (относительно индекса p) случаев. Не приводя здесь общего, весьма объемного утверждения, отметим только, что для $p = 1$ и $p = 2$ имеем соответственно

$$\Gamma_1^{(+)} = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right], \quad \Gamma_1^{(-)} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad \Gamma_1^{(\pm)} = \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right), \quad \Gamma_1^{(\mp)} = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (23)$$

$$\begin{cases} \Gamma_2^{(+)} = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right], & \Gamma_2^{(-)} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \Gamma_2^{(\pm)} = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right), & \Gamma_2^{(\mp)} = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \end{cases} \quad (24)$$

с заметным усложнением структуры по сравнению с (22). Пользуясь моментом, укажем, что при записи формул (22)–(24) исправлены неточности, допущенные в [11; п. 2].

Перейдем теперь к основным результатам работы.

Теорема 1. Пусть f — целая функция порядка $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ с последовательностью Λ отрицательных корней, подчиненной требованию (16), т. е. такой, что $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0$, и $p = [\rho]$. Тогда индикатор (12) функции f удовлетворяет неравенству

$$h_\rho(f, \theta) \geq 0, \quad \theta \in (-\pi, \pi], \quad (25)$$

причем

$$h_\rho(f, \theta) \equiv 0, \quad \theta \in \Gamma_p^{(-)}. \quad (26)$$

Нижний индикатор (14) функции f удовлетворяет неравенству

$$\underline{h}_\rho(f, \theta) \leq 0, \quad \theta \in (-\pi, \pi], \quad (27)$$

причем

$$\underline{h}_\rho(f, \theta) \equiv 0, \quad \theta \in \Gamma_p^{(+)}. \quad (28)$$

◁ Тожество (28) получено в статье [11; теорема 1]. Там же для значений $\theta \in (-\pi, \pi)$ установлено соотношение (27). То, что (27) выполнено и в предельном случае $\theta = \pi$, не рассмотренном в [11], следует из результатов работы [18; доказательство теоремы 1] (см. также [19]), согласно которым существует (возможно, равный $-\infty$) предел

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi-0} \underline{h}_\rho(f, \theta) = \underline{h}_\rho(f, \pi).$$

Добавим еще, что в соответствии с [18; теоремы 1, 3 и замечание 2] справедливы формулы

$$\begin{cases} h_\rho(f, \pi) = \lim_{\xi \rightarrow 1-0} \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^\rho} \int_0^\xi \frac{\tau^{-p-1} n_\Lambda(r\tau) - \tau^p n_\Lambda(r/\tau)}{1-\tau} d\tau, \\ \underline{h}_\rho(f, \pi) = \lim_{\theta \rightarrow \pi-0} \underline{h}_\rho(f, \theta) = \lim_{\xi \rightarrow 1-0} \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^\rho} \int_0^\xi \frac{\tau^{-p-1} n_\Lambda(r\tau) - \tau^p n_\Lambda(r/\tau)}{1-\tau} d\tau, \end{cases} \quad (29)$$

выражающие величины $h_\rho(f, \pi) \geq 0$, $\underline{h}_\rho(f, \pi) \leq 0$ непосредственно через считающую функцию (19) последовательности корней (13). (Строго говоря, в [18, 19] изучались целые функции с положительными корнями, но это не имеет принципиального значения.)

Обоснуем теперь новые результаты (25), (26). Опуская технические детали, приведем схему рассуждений, предложенную в [11; доказательство теоремы 1] при исследовании нижнего индикатора (см. также [7]).

Для произвольных положительных чисел a, r справедлива оценка

$$\frac{n_\Lambda(r\tau)}{(r\tau)^\rho} \leq \frac{\eta_a(r)}{(a\tau)^\rho}, \quad 0 < \tau \leq \frac{1}{a}, \quad (30)$$

в которой величина

$$\eta_a(r) = \frac{n_\Lambda(r/a)}{(r/a)^\rho}$$

при фиксированном $a > 0$ в силу (16) удовлетворяет соотношениям

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \eta_a(r) = \beta > 0, \quad \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \eta_a(r) = 0. \quad (31)$$

Пригодится также «грубая» оценка

$$\frac{n_\Lambda(r\tau)}{(r\tau)^\rho} \leq D, \quad r, \tau > 0, \quad (32)$$

выполненная с некоторой константой $D \geq \beta$.

Сначала докажем тождество (26). Пусть $\theta \in \Gamma_p^{(-)}$. Тогда $K_\rho(\tau, \theta) < 0$ при всех $\tau > 0$, и согласно (12), (18) имеем

$$h_\rho(f, \theta) \leq 0, \quad \theta \in \Gamma_p^{(-)}. \quad (33)$$

С другой стороны, зафиксировав $a \in (0, 1)$ и применив в (18) оценки (30), (32), при тех же $\theta \in \Gamma_p^{(-)}$ получим, что

$$\frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho} \geq \eta_a(r) a^{-\rho} \int_a^{1/a} \tau^{-\rho} K_\rho(\tau, \theta) d\tau + D \left(\int_0^a K_\rho(\tau, \theta) d\tau + \int_{1/a}^{+\infty} K_\rho(\tau, \theta) d\tau \right).$$

Последующий переход к верхнему пределу при $r \rightarrow +\infty$ с учетом второго соотношения в (31) дает неравенство

$$h_\rho(f, \theta) \geq D \left(\int_0^a K_\rho(\tau, \theta) d\tau + \int_{1/a}^{+\infty} K_\rho(\tau, \theta) d\tau \right).$$

Устремляя теперь параметр a к нулю, имеем

$$h_\rho(f, \theta) \geq 0, \quad \theta \in \Gamma_p^{(-)}. \quad (34)$$

Для получения заявленного тождества (26) осталось сопоставить (33) и (34).

Перейдем к доказательству неравенства (25). Рассуждения достаточно провести для $\theta \in \Gamma_p^{(\pm)} \cup \Gamma_p^{(\mp)}$. Пусть $\theta \in \Gamma_p^{(\pm)}$. Зафиксируем $a \in (0, \tau_*^{-1})$, где точка τ_* определена в (21). Тогда $K_\rho(\tau, \theta) > 0$ при $\tau \in (0, \tau_*)$ и $K_\rho(\tau, \theta) < 0$ при $\tau \in (\tau_*, +\infty)$. Поэтому

$$\frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho} \geq \int_{\tau_*}^{+\infty} \frac{n_\Lambda(r\tau)}{(r\tau)^\rho} K_\rho(\tau, \theta) d\tau.$$

На отрезке $\tau \in [\tau_*, 1/a]$ подынтегральную функцию оценим с помощью (30), а на луче $\tau \in [1/a, +\infty)$ — с помощью (32). Последующий переход к верхнему пределу при $r \rightarrow +\infty$ с учетом второго соотношения в (31), а затем переход к пределу при $a \rightarrow 0$ дают неотрицательность индикатора при $\theta \in \Gamma_p^{(\pm)}$. Оставшийся случай $\theta \in \Gamma_p^{(\mp)}$ разбирается схожим образом. \triangleright

Общие результаты теоремы 1 органично связаны с предположением $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0$, действуют при любом фиксированном $\beta > 0$ из условия (16), но не раскрывают зависимости индикаторов от конкретного значения β верхней плотности корней функции. Это хорошо видно из приведенного краткого доказательства, где вместо точного первого предельного соотношения в (31) применялся его ослабленный вариант в форме (32).

Следующее точное утверждение — теорема 2 — получено благодаря учету информации (31) в полном объеме. Доказательство, ввиду его громоздкости, не приводим — оно будет дано в отдельной работе (часть теоремы 2, относящаяся к нижнему индикатору, уже опубликована в [11; теорема 2]). Как оказалось, результат допускает запись в той же форме, что и в (11), указывая на связь двух экстремальных задач: о наименьшем типе целой функции с корнями в угле; о наименьшем индикаторе целой функции с корнями на луче.

Теорема 2. Пусть f — целая функция порядка $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ с последовательностью Λ отрицательных корней, подчиненной требованию (16), и $p = [\rho]$. Тогда для индикаторов функции f верны точные оценки

$$h_\rho(f, \theta) \geq \beta \sup_{a>0} \{a^{-\rho} I_p(a, \theta)\}, \quad \theta \in \Gamma_p^{(+)}, \quad (35)$$

$$\underline{h}_\rho(f, \theta) \leq \beta \inf_{a>0} \{a^{-\rho} I_p(a, \theta)\}, \quad \theta \in \Gamma_p^{(-)}, \quad (36)$$

где величина $I_p(a, \theta)$ вычисляется по правилу

$$\begin{cases} I_0(a, \theta) = \frac{1}{2} \ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1), \\ I_p(a, \theta) = \frac{1}{2} \ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1) + \sum_{m=1}^p (-1)^m \frac{a^m}{m} \cos m\theta, \quad p \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (37)$$

Для произвольно заданных $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ и $\beta > 0$ существует целая функция, которая оценки (35), (36) одновременно превращает в тождества на указанных там промежутках.

Упомянутой экстремальной функцией в теореме 2 будет каноническое произведение рода p (см. (17)), если последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ его корней выбрать так, чтобы

$$\begin{cases} 0 > \lambda_1 = \dots = \lambda_{n_1} > \lambda_{n_1+1} = \dots = \lambda_{n_2} > \dots > \lambda_{n_k+1} = \dots = \lambda_{n_{k+1}} > \dots, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} = -\infty; \\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} = \beta > 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_{k+1}}} = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Для любых $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ и $\beta > 0$ построить последовательность Λ , удовлетворяющую (39), можно следующим образом:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dots = \lambda_{n_1} = -2, & n_1 = [2^\rho \beta]; \\ \lambda_{n_1+1} = \dots = \lambda_{n_2} = -2^2, & n_2 = [2^\rho \beta] + [2^{2\rho} \beta]; \\ \dots, & \dots, \\ \lambda_{n_{k-1}+1} = \dots = \lambda_{n_k} = -2^{2^{k-1}}, & n_k = \sum_{j=1}^k [2^{2^{j-1} \rho} \beta]; \\ \lambda_{n_k+1} = \dots = \lambda_{n_{k+1}} = -2^{2^k}, & n_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} [2^{2^{j-1} \rho} \beta]; \\ \dots, & \dots \end{cases}$$

В приведенной конструкции кратность каждой точки $\lambda_{n_k} = -2^{2^{k-1}}$ в последовательности Λ равна $[2^{2^{k-1} \rho} \beta]$, а длина лакуны между соседними (различными) членами $\lambda_{n_{k+1}}$ и λ_{n_k} составляет $2^{2^{k-1}} (2^{2^{k-1}} - 1)$. Класс подобных примеров (39) образует специальный случай последовательностей (13) со свойствами (16). Специфика последовательности (39) приводит к тому, что индикаторы функции (17) вычисляются по формулам

$$h_\rho(f, \theta) = \beta \sup_{a>0} \{a^{-\rho} I_p(a, \theta)\}, \quad \underline{h}_\rho(f, \theta) = \beta \inf_{a>0} \{a^{-\rho} I_p(a, \theta)\}, \quad \theta \in (-\pi, \pi), \quad (40)$$

с величиной $I_p(a, \theta)$, определенной в (37). Тем самым, оценки (35), (36) из теоремы 2 точны, а фигурирующие в них выражения, распространенные с промежутков $\Gamma_p^{(+)}$, $\Gamma_p^{(-)}$ соответственно на весь интервал $(-\pi, \pi)$, задают закон вычисления индикаторов целой функции порядка $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ с «быстрорастущей» (без учета кратностей) последовательностью модулей корней (см. также [11]).

Конкретизируем наши результаты в наиболее простом из исследуемых в работе случае, когда целая функция f с отрицательными корнями удовлетворяет ограничениям (16) при порядке $\rho \in (0, 1)$. Можно показать (см. также [19]), что индикатор и нижний индикатор f будут непрерывными функциями аргумента $\theta \in (-\pi, \pi)$, возрастающими

при $\theta \in (-\pi, 0]$ и убывающими при $\theta \in [0, \pi)$ в нестрогом смысле. Индикатор $h_\rho(f, \theta)$ непрерывен также в точке $\theta = \pi$. В случае нижнего индикатора в точке $\theta = \pi$ имеем обобщенную непрерывность: $\underline{h}_\rho(f, \theta)$ будет непрерывен в этой точке, если $\underline{h}_\rho(f, \pi) > -\infty$; в противном случае $\lim_{\theta \rightarrow \pi-0} \underline{h}_\rho(f, \theta) = \underline{h}_\rho(f, \pi) = -\infty$. С учетом сказанного при всех $\rho \in (0, 1)$ выполнены равенства

$$\begin{cases} \max_{\theta \in (-\pi, \pi]} h_\rho(f, \theta) = h_\rho(f, 0), & \max_{\theta \in (-\pi, \pi]} \underline{h}_\rho(f, \theta) = \underline{h}_\rho(f, 0); \\ \min_{\theta \in (-\pi, \pi]} h_\rho(f, \theta) = h_\rho(f, \pi), & \min_{\theta \in (-\pi, \pi]} \underline{h}_\rho(f, \theta) = \underline{h}_\rho(f, \pi) \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}, \end{cases} \quad (41)$$

не зависящие от ограничений (16). Но для выделенного случая эти сведения можно существенно расширить, если собрать утверждения, заложенные в теоремах 1, 2. Учтем вид индикаторных множеств (22), а также предельные соотношения (29) при $p = 0$. В итоге для выбранного класса целых функций дополнительная к (41) сводная информация об индикаторе выглядит так:

$$\begin{cases} h_\rho(f, \theta) \geq 0, & \theta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right); \\ h_\rho(f, \theta) \geq \frac{\beta}{2} \sup_{a>0} \frac{\ln(a^2+2a \cos \theta+1)}{a^\rho}, & \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \\ h_\rho(f, \pi) = \lim_{\xi \rightarrow 1-0} \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^\rho} \int_0^\xi \frac{\tau^{-1} n_\Lambda(r\tau) - n_\Lambda(r/\tau)}{1-\tau} d\tau \in [0, +\infty), \end{cases} \quad (42)$$

а о нижнем индикаторе — соответственно так:

$$\begin{cases} \underline{h}_\rho(f, \theta) \leq 0, & \theta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right); \\ \underline{h}_\rho(f, \theta) \equiv 0, & \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \\ \underline{h}_\rho(f, \pi) = \lim_{\xi \rightarrow 1-0} \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^\rho} \int_0^\xi \frac{\tau^{-1} n_\Lambda(r\tau) - n_\Lambda(r/\tau)}{1-\tau} d\tau \in [-\infty, 0]. \end{cases} \quad (43)$$

Отдельный интерес представляет следующая задача: при тех же ограничениях (16) найти в терминах параметров $\rho \in (0, 1)$, $\beta > 0$ точный диапазон изменения величин $h_\rho(f, \pi)$, $\underline{h}_\rho(f, \pi)$ из формул (42), (43). Для подкласса функций с корнями (39) новые формулы (40) дают ответ

$$\begin{cases} h_\rho(f, \pi) = \frac{\beta}{2} \lim_{\theta \rightarrow \pi-0} \sup_{a>0} \frac{\ln(a^2+2a \cos \theta+1)}{a^\rho}; \\ \underline{h}_\rho(f, \pi) = \frac{\beta}{2} \lim_{\theta \rightarrow \pi-0} \inf_{a>0} \frac{\ln(a^2+2a \cos \theta+1)}{a^\rho}, \end{cases}$$

который после некоторой обработки приводится к окончательному результату

$$h_\rho(f, \pi) = \beta \max_{a>2} \frac{\ln(a-1)}{a^\rho}, \quad \underline{h}_\rho(f, \pi) = -\infty. \quad (44)$$

(Совсем не очевидно, что соотношения (44) можно получить, применив известные по работе [19] заключительные части формул (42), (43). Было бы полезно с помощью (40) доказать аналоги (44) для порядков $\rho > 1$.)

Вернемся к общему классу целых функций f порядка $\rho \in (0, 1)$ с последовательностью отрицательных корней, подчиненной (16). На основании соответствующих свойств

индикатора из (41), (42) запишем для типа $\sigma_\rho(f)$ (см. (2)) точную, достижимую оценку снизу

$$\sigma_\rho(f) = \max_{\theta \in (-\pi, \pi]} h_\rho(f, \theta) = h_\rho(f, 0) \geq \beta \max_{a > 0} \frac{\ln(a+1)}{a^\rho}.$$

Этот результат, полученный нами в предположении $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0$, справедлив при любом значении $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)$, совпадая с цитированной оценкой Попова (9).

Пусть $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$. Обозначим через $C(\rho)$ точную нижнюю грань величин $\sigma_\rho(f)$, взятую по всевозможным целым функциям порядка ρ с множеством отрицательных корней $\Lambda = \Lambda_f$ верхней плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 1$ и нижней плотности $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0$. Тогда

$$C(\rho) = \max_{a > 0} \frac{\ln(a+1)}{a^\rho}, \quad \rho \in (0, 1). \quad (45)$$

К настоящему времени формула (45) — единственный точный результат в экстремальной задаче о вычислении величины $C(\rho)$. Мы посвятим этой задаче следующий раздел.

3. Задача о наименьшем типе

В работе Попова [20] для значений функции $C(\rho)$ найдены следующие границы:

$$2^{-\rho/2} \leq C(\rho) \leq 2^{1-\rho} \left(1 + \max_{a \geq 2} \frac{\ln(a-1)}{a} \right) < 1.28 \cdot 2^{1-\rho}, \quad \rho \in (1, 2), \quad (46)$$

$$C(\rho) < \frac{2^{2-\rho}}{\rho}, \quad \rho \in \left(\frac{3}{2}, 2 \right), \quad (47)$$

$$0.47 < - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt < C(\rho) < 1, \quad \rho \in (2, +\infty) \setminus \mathbb{N}. \quad (48)$$

Используя утверждения предыдущего раздела, можно дать новые оценки экстремальной величины $C(\rho)$ при $\rho > 1$, усиливающие (46)–(48). Сейчас ограничимся простейшими приложениями полученных результатов, оставляя более глубокий анализ для отдельной публикации. Будем опираться на общую двустороннюю оценку

$$\max_{\theta \in \Gamma_p^{(+)}} \sup_{a > 0} \{ a^{-\rho} I_p(a, \theta) \} \leq C(\rho) \leq \max_{\theta \in \Gamma_p^{(+)} \cup \left[\frac{2p+1}{2p+2} \pi, \pi \right]} \sup_{a > 0} \{ a^{-\rho} I_p(a, \theta) \}, \quad (49)$$

действующую при всех $\rho \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{N}$. По-прежнему, $p = [\rho] \in \mathbb{N}$. Величина $I_p(a, \theta)$ определена в (37). Основу соотношения (49) составляет известное свойство индикатора

$$\max_{\theta \in (-\pi, \pi]} h_\rho(f, \theta) = \sigma_\rho(f),$$

которое ввиду специфики расположения корней f можно переписать так:

$$\max_{\theta \in [0, \pi]} h_\rho(f, \theta) = \sigma_\rho(f).$$

Неравенство (35) из теоремы 2 влечет оценку снизу в (49). Оценка сверху возникает благодаря примеру (39) с точным правилом (40) для вычисления индикатора, поскольку $C(\rho)$ по определению не превосходит типа любой целой функции из заданного класса. При этом дополнительно учитывается соотношение (26), доказанное в теореме 1. Оно

вкуже с характеристическим свойством индикатора — тригонометрической выпуклостью (см. [4; гл. I, § 15, лемма 6]) — позволяет при нахождении максимума $h_\rho(f, \theta)$ на $[0, \pi]$ сразу исключить из рассмотрения индикаторные множества $\Gamma_p^{(-)}$, $\Gamma_p^{(\mp)}$, а также все промежутки, входящие в $\Gamma_p^{(\pm)}$, кроме одного — отрезка $[\frac{2p+1}{2p+2}\pi, \pi]$, который при $p \rightarrow +\infty$ стягивается в точку $\theta = \pi$. Дальнейшее упрощение (49) естественно связать с исследованием на монотонность (по θ) индикатора из формулы (40). Впрочем, целесообразно отложить подробности для развернутой работы и перейти к конкретным применениям общей оценки (49), демонстрирующим близость ее границ.

Схематично разберем случаи $\rho \in (1, 2)$ и $\rho \in (2, 3)$.

Случай $\rho \in (1, 2)$. Здесь $p = 1$, и поэтому (см. (37)) работаем с представлением

$$I_1(a, \theta) = \frac{1}{2} \ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1) - a \cos \theta, \quad a > 0, \quad \theta \in (-\pi, \pi).$$

Согласно (23) имеем $\Gamma_1^{(+)} = [\pi/2, 3\pi/4]$. Записав (49) для текущего случая, получим

$$\begin{cases} C(\rho) \geq \max_{\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]} \sup_{a>0} \frac{\frac{1}{2} \ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1) - a \cos \theta}{a^\rho}; \\ C(\rho) \leq \max_{\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]} \sup_{a>0} \frac{\frac{1}{2} \ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1) - a \cos \theta}{a^\rho}. \end{cases} \quad (50)$$

Отдельные рутинные вычисления позволяют осуществить в (50) оптимальный выбор значений $\theta = 3\pi/4$ и $\theta = \pi$ соответственно и одновременно сузить промежуток изменения параметра $a > 0$. В итоге, удастся придать форме записи соотношений (50) более компактный вид:

$$2^{\rho/2-1} \max_{a \geq 2} \frac{\ln(\frac{a^2}{2} - a + 1) + a}{a^\rho} \leq C(\rho) \leq \max_{a \geq 2} \frac{\ln(a-1) + a}{a^\rho}, \quad \rho \in (1, 2). \quad (51)$$

Нетрудно убедиться в том, что двойное неравенство (51) усиливает прежний результат (46). Действительно, огрубляя оценку снизу в (51), при всех $\rho \in (1, 2)$ имеем

$$C(\rho) \geq 2^{\rho/2-1} \max_{a \geq 2} \frac{\ln(\frac{a^2}{2} - a + 1) + a}{a^\rho} \geq 2^{\rho/2-1} \frac{\ln(\frac{a^2}{2} - a + 1) + a}{a^\rho} \Big|_{a=2} = 2^{-\rho/2},$$

что дает оценку снизу в (46). Далее, огрубляя оценку сверху в (51), при всех $\rho \in (1, 2)$ имеем

$$C(\rho) \leq \max_{a \geq 2} \frac{\ln(a-1) + a}{a^\rho} = \max_{a \geq 2} a^{1-\rho} \frac{\ln(a-1) + a}{a} \leq 2^{1-\rho} \left(1 + \max_{a \geq 2} \frac{\ln(a-1)}{a} \right),$$

что дает оценку сверху в (46). Если же для огрубления левой части (51) привлечь неравенство

$$\ln(x+1) \geq x - \frac{x^2}{2}, \quad x \in [0, +\infty),$$

то простые подсчеты дадут возможность заменить нижнюю границу в (46) на бóльшую элементарную миноранту:

$$C(\rho) \geq 2^{4-3\rho/2} \frac{(3-\rho)^{3-\rho}}{(4-\rho)^{4-\rho}} > 2^{-\rho/2}, \quad \rho \in (1, 2).$$

Наконец, неравенство

$$\ln(x+1) \leq x, \quad x \in (-1, +\infty),$$

позволяет при тех же $\rho \in (1, 2)$ провести в правой части (51) выкладку

$$C(\rho) \leq \max_{a \geq 2} \frac{\ln(a-1) + a}{a^\rho} \leq \max_{a \geq 2} \frac{2(a-1)}{a^\rho} = \frac{2(a-1)}{a^\rho} \Big|_{a=\rho/(\rho-1)} = \frac{2(\rho-1)^{\rho-1}}{\rho^\rho}.$$

Полученная оценка усиливает (47), поскольку для любого значения $\rho \in (1, 2)$ справедливо неравенство

$$\frac{2(\rho-1)^{\rho-1}}{\rho^\rho} < \frac{2^{2-\rho}}{\rho},$$

сводящееся к очевидному неравенству

$$\left(\frac{2(\rho-1)}{\rho}\right)^{\rho-1} < 1, \quad \rho \in (1, 2).$$

Коснемся вопроса о предельном поведении экстремальной функции $C(\rho)$ в целых точках. Из «явной» формулы (45) можно получить (см. [8]) соотношения

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} C(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow 1-0} C(\rho) = 1. \quad (54)$$

Как указано в [20], неравенства (46), (47) влекут наличие предела

$$\lim_{\rho \rightarrow 2-0} C(\rho) = \frac{1}{2}. \quad (55)$$

Не ясно, однако, существует ли $\lim_{\rho \rightarrow 1+0} C(\rho)$. Новое двойное неравенство (51) позволяет оценить границы возможной неопределенности величины $C(\rho)$ при $\rho \rightarrow 1+0$ и показывает, что если односторонний предел $\lim_{\rho \rightarrow 1+0} C(\rho)$ существует, то он чуть больше единицы и не совпадает с $\lim_{\rho \rightarrow 1-0} C(\rho) = 1$ (см. теорему 3 ниже).

Полученную информацию о функции $C(\rho)$ при $\rho \in (1, 2)$ соберем в одно утверждение.

Теорема 3. Пусть $C(\rho)$ — точная нижняя грань типов $\sigma_\rho(f)$ целых функций порядка ρ , все корни которых отрицательны и образуют последовательность $\Lambda = \Lambda_f$ верхней плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 1$ и нижней плотности $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0$. Тогда при всех $\rho \in (1, 2)$ справедлива двусторонняя оценка

$$2^{\rho/2-1} \max_{a \geq 2} \frac{\ln\left(\frac{a^2}{2} - a + 1\right) + a}{a^\rho} \leq C(\rho) \leq \max_{a \geq 2} \frac{\ln(a-1) + a}{a^\rho},$$

влекущая оценку через элементарные функции

$$2^{4-3\rho/2} \frac{(3-\rho)^{3-\rho}}{(4-\rho)^{4-\rho}} \leq C(\rho) \leq \frac{2(\rho-1)^{\rho-1}}{\rho^\rho}, \quad \rho \in (1, 2),$$

а также соотношения

$$\begin{cases} \lim_{\rho \rightarrow 1+0} C(\rho) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \max_{a \geq 2} \frac{\ln\left(\frac{a^2}{2} - a + 1\right)}{a}\right) = 1.0109\dots; \\ \overline{\lim}_{\rho \rightarrow 1+0} C(\rho) \leq 1 + \max_{a \geq 2} \frac{\ln(a-1)}{a} = 1.2784\dots, \end{cases}$$

первое из которых ввиду (54) показывает, что при $\rho \rightarrow 1$ функция $C(\rho)$ не имеет предела.

Далее изложение ведем совсем тезисно.

Случай $\rho \in (2, 3)$. Здесь $p = 2$. Согласно (24), (37), (49) для указанных ρ получим

$$\begin{cases} C(\rho) \geq \max_{\theta \in [0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}]} \sup_{a>0} \frac{\frac{1}{2} \ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1) - a \cos \theta + \frac{a^2}{2} \cos 2\theta}{a^\rho}; \\ C(\rho) \leq \max_{\theta \in [0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]} \sup_{a>0} \frac{\frac{1}{2} \ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1) - a \cos \theta + \frac{a^2}{2} \cos 2\theta}{a^\rho}. \end{cases}$$

Отсюда, например, следует, что при всех значениях $\rho \in (2, 3)$ верны цепочки неравенств

$$C(\rho) \geq \frac{3^{\rho/2}}{2} \max_{a \geq 2} \frac{\ln(\frac{a^2}{3} - a + 1) + a + \frac{a^2}{6}}{a^\rho} \geq \frac{1}{4} 3^{(4-\rho)/2},$$

$$C(\rho) \leq \max_{a \geq \frac{3}{2}} \frac{\ln(a-1) + a + \frac{a^2}{2}}{a^\rho} = \max_{a \geq \frac{3}{2}} a^{2-\rho} \frac{\ln(a-1) + a + \frac{a^2}{2}}{a^2} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-\rho},$$

а также оценки

$$\liminf_{\rho \rightarrow 2+0} C(\rho) \geq \frac{3}{2} \max_{a \geq 2} \frac{\ln(\frac{a^2}{3} - a + 1) + a + \frac{a^2}{6}}{a^2} = \frac{3}{4},$$

$$\overline{\lim}_{\rho \rightarrow 2+0} C(\rho) \leq \max_{a \geq \frac{3}{2}} \frac{\ln(a-1) + a + \frac{a^2}{2}}{a^2} = 1,$$

указывающие (см. (55)) на отсутствие у функции $C(\rho)$ предела при $\rho \rightarrow 2$, и оценки

$$\liminf_{\rho \rightarrow 3-0} C(\rho) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \max_{a \geq 2} \frac{\ln(\frac{a^2}{3} - a + 1) + a + \frac{a^2}{6}}{a^3} = 0.5181\dots,$$

$$\overline{\lim}_{\rho \rightarrow 3-0} C(\rho) \leq \max_{a \geq \frac{3}{2}} \frac{\ln(a-1) + a + \frac{a^2}{2}}{a^3} = 0.5789\dots$$

Наконец, численная оценка $C(\rho) > 0.51$, $\rho \in (2, 3)$, подкрепляет прежний результат (48).

На этом закончим разбор случаев, поскольку, как видно, дальнейшее увеличение значений ρ сопряжено с вычислительными сложностями. Анализ проведенных расчетов придает правдоподобность следующей гипотезе: для любого $p \in \mathbb{N}$ существуют односторонние пределы $\lim_{\rho \rightarrow p-0} C(\rho)$, $\lim_{\rho \rightarrow p+0} C(\rho)$, причем $\lim_{\rho \rightarrow p-0} C(\rho) < \lim_{\rho \rightarrow p+0} C(\rho)$. Было бы интересно также (в свете нетривиальной оценки (48)) выявить точный закон асимптотического поведения $C(\rho)$ при $\rho \rightarrow +\infty$, $\rho \notin \mathbb{N}$.

Полученные результаты о наименьшем типе хотя и улучшают предыдущие, но все же носят не вполне законченный характер ввиду определенного «зазора», имеющегося в опорной формуле (49). По-видимому, для любых $p \in \mathbb{N}$ и $\rho \in (p, p+1)$ максимум в левой части (49) достигается при $\theta = \frac{2p+1}{2p+2} \pi$, а в правой части — при $\theta = \pi$. Как бы то ни было, для устранения означенного зазора нужно дополнить теорему 2 точной информацией об индикаторе $h_\rho(f, \theta)$ на отрезке $\theta \in [\frac{2p+1}{2p+2} \pi, \pi]$, что позволит в явном виде, подобном (45), выписать экстремальную функцию $C(\rho)$ и в полном объеме изучить ее свойства при всех нецелых значениях $\rho > 0$. После этого логичен переход к целым функциям с отрицательными корнями ненулевой нижней плотности. Как представляется, реализация намеченных перспектив требует масштабного исследования, развивающего аналитические разработки А. Данжуа [21], А. Ю. Попова [20] и авторов [7].

Литература

1. Коробейник Ю. Ф. Избранные труды (в 4-х томах).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011–2014.
2. Lindelöf E. Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini // Acta Soc. Sci. Fennicae.—1902.—Vol 31, № 1.—P. 1–79.
3. Valiron G. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière // Annales de la Faculté des Scinces de Toulouse: Mathématiques, Sér. 3.—1913.—Vol. 5.—P. 117–257.
4. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.
5. Voas R. P. Entire Functions.—N.Y.: Acad. Press, 1954.
6. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах // Фундам. и прикл. матем.—2018.—Т. 22, № 1.—С. 51–97.
7. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. Мат.—2011.—Т. 75, № 1.—С. 3–28. DOI: 10.4213/im4104.
8. Попов А. Ю. Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ -плотности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика.—2005.—№ 1.—С. 31–36.
9. Шерстюков В. Б. Минимальное значение типа целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$, все нули которой лежат в угле и имеют заданные плотности // Уфим. мат. журн.—2016.—Т. 8, № 1.—С. 113–126.
10. Попов А. Ю. Развитие теоремы Валирона — Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ -плотностью // Соврем. математика. Фундам. направления.—2013.—Т. 49.—С. 132–164.
11. Брайчев Г. Г. О нижнем индикаторе целой функции с корнями нулевой нижней плотности, лежащими на луче // Мат. заметки—2020.—Т. 107, № 6.—С. 817–832. DOI: 10.4213/mzm12504.
12. Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В. Целые и мероморфные функции // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления.—Т. 85.—М.: ВИНТИ, 1991.—С. 5–186.
13. Малютин К. Г., Кабанко М. В., Малютин Т. И. Интегралы и индикаторы субгармонических функций. I // Чебышевский сб.—2018.—Т. 19, № 2.—С. 272–303. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-272-303.
14. Малютин К. Г., Кабанко М. В., Малютин Т. И. Интегралы и индикаторы субгармонических функций. II // Чебышевский сб.—2019.—Т. 20, № 4.—С. 236–269. DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-4-236-269.
15. Азарин В. С. Пример целой функции с заданными индикатором и нижним индикатором // Мат. сб.—1972.—Т. 89 (131), № 4 (12).—С. 541–557.
16. Азарин В. С. Об индикаторах целой функции и регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма ее модуля // Функц. анализ и его прил.—1975.—Т. 9, № 1.—С. 47–48.
17. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.—(Encyclopedia Math. Appl. Vol. 27).
18. Кондратюк А. А., Фридман А. Н. Предельное значение нижнего индикатора и оценки снизу для целых функций с положительными нулями // Укр. мат. журн.—1972.—Т. 24, № 4.—С. 488–494.
19. Кондратюк А. А., Фридман А. Н. О нижнем индикаторе целой функции нулевого рода с положительными нулями // Укр. мат. журн.—1972.—Т. 24.—№ 1.—С. 106–109.
20. Попов А. Ю. О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ -плотности, лежащими на одном луче // Мат. заметки.—2009.—Т. 85, № 2.—С. 246–260. DOI: 10.4213/mzm4645.
21. Denjoy A. Sur les produits canoniques d'ordre infini // J. Math. Pures Appl. 6e ser.—1910.—Vol. 6.—P. 1–136.

Статья поступила 11 мая 2020 г.

БРАЙЧЕВ ГЕОРГИЙ ГЕНРИХОВИЧ
 Московский педагогический государственный университет,
 профессор кафедры математического анализа
 РОССИЯ, 107140, Москва, ул. Краснопрудная, 14
 E-mail: braichev@mail.ru

ШЕРСТЮКОВ ВЛАДИМИР БОРИСОВИЧ
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
профессор кафедры высшей математики
РОССИЯ, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31
E-mail: shervb73@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 30–46

ESTIMATES OF INDICATORS OF AN ENTIRE FUNCTION WITH NEGATIVE ROOTS

Braichev, G. G.¹ and Sherstyukov, V. B.²

¹Moscow Pedagogical State University,
14 Krasnoprudnaya St., Moscow 107140, Russia;
²National Research Nuclear University MEPhI,
31 Kashirskoye Highway, Moscow 115409, Russia
E-mail: braichev@mail.ru, shervb73@gmail.com

Abstract. The article continues the series of works by the authors devoted to the study of the relationship between the laws growth of an entire function and the features of the distribution of its roots. The asymptotic behavior of an entire function of finite non-integer order with a sequence of negative roots having the prescribed lower and upper densities is investigated. Particular attention is paid to the case when the sequence of roots has zero lower density. Accurate estimates for the indicator and lower indicator of such a function are given. The angles on the complex plane in which these characteristics are identically equal to zero are described. In some special cases explicit formulas for indicators are proved. Terms used, usual root sequence densities, are simple and illustrative, in contrast to many complicated integral constructions including root counting function that are typical for the growth theory of entire functions. The results are applied to the well-known problem of the extremal type of an entire function of order $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ with zeros on a ray. This problem has been studied in detail only in the case of $\rho \in (0, 1)$. For $\rho > 1$, the exact formula for calculating the smallest possible type of such a function in terms of the densities of its roots is still unknown. For the mentioned extreme value, a new two-sided estimate is found that strengthens Popov's results (2009). The conjecture regarding the behavior of the extremal type for $\rho \rightarrow p \in \mathbb{N}$ is formulated. The presentation is supplemented with a brief survey of classical results of Valiron, Levin, Goldberg and recent advances from the works of Popov and of the authors. Some problems on the topic under discussion are outlined.

Key words: entire function, indicator and lower indicator, type of entire function, upper and lower densities of roots.

Mathematical Subject Classification (2010): 30D15, 30D20.

For citation: Braichev, G. G. and Sherstyukov, V. B. Estimates of Indicators of an Entire Function with Negative Roots, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 30–46 (in Russian). DOI: 10.46698/g8758-9884-5440-f.

References

1. Korobeinik, Yu. F. *Izbrannye trudy (v 4-kh tomakh)* [Selected Works], Vladikavkaz, SMI VSC RAS, 2011–2014 (in Russian).
2. Lindelöf, E. Mémoire sur la Théorie des Fonctions Entières de Genre Fini, *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, 1902, vol 31, no. 1, pp. 1–79.
3. Valiron, G. Sur les Fonctions Entières D'ordre Nul et D'ordre Fini et en Particulier les Fonctions à Correspondence Régulier, *Annales de la Faculté des Scinces de Toulouse: Mathématiques, Séries 3*, 1913, vol. 5, pp. 117–257.
4. Levin, B. Ya. *Raspredelenie korney tselykh funktsiy* [Distribution of Zeros of Entire Functions], Moscow, Gostekhizdat, 1956 (in Russian).
5. Boas, R. P. *Entire Functions*, New York, Academic Press, 1954.

6. Braichev, G. G. and Sherstyukov, V. B. Sharp Bounds for Asymptotic Characteristics of Growth of Entire Functions with Zeros on Given Set, *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, 2018, vol. 22, no. 1, pp. 51–97 (in Russian).
7. Braichev, G. G. and Sherstyukov, V. B. On the Least Possible Type of Entire Functions of Order $\rho \in (0, 1)$ with Positive Zeros, *Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75, no. 1, pp. 1–27. DOI: 10.1070/IM2011v075n01ABEH002525.
8. Popov, A. Yu. The Least Possible Type under the Order $\rho < 1$ of Canonical Products with Positive Zeros of a Given Upper ρ -density, *Vestnik Moskovskogo Universiteta Seriya 1. Matematika. Mekhanika.*, 2005, no. 1, pp. 31–36 (in Russian).
9. Sherstyukov, V. B. Minimal Value for the Type of an Entire Function of Order $\rho \in (0, 1)$, whose Zeros Lie in an Angle and Have a Prescribed Density, *Ufa Mathematical Journal*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 108–120. DOI: 10.13108/2016-8-1-108.
10. Popov, A. Yu. Development of the Valiron–Levin Theorem on the Least Possible Type of Entire Functions with a Given Upper ρ -Density of Roots, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 211, no. 4, pp. 579–616. DOI: 10.1007/s10958-015-2618-8.
11. Braichev, G. G. On the Lower Indicator of an Entire Function with Roots of Zero Lower Density Lying on a Ray, *Mathematical Notes*, 2020, vol. 107, no. 6, pp. 907–919. DOI: 10.1134/S0001434620050211.
12. Gol'dberg, A. A., Levin, B. Ya. and Ostrovskiy, I. V. Entire and Meromorphic Functions, *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya «Sovremennye Problemy Matematiki. Fundamental'nye Napravleniya»*, 1991, Moscow, VINITI, vol. 85, pp. 5–185 (in Russian).
13. Malyutin, K. G., Kabanko, M. V. and Malyutina, T. I. Integrals and Indicators of Subharmonic Functions. I, *Chebyshevskii Sbornik*, 2018, vol. 19, no. 2, pp. 272–303. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-272-303 (in Russian).
14. Malyutin, K. G., Kabanko, M. V. and Malyutina, T. I. Integrals and Indicators of Subharmonic Functions. II, *Chebyshevskii Sbornik*, 2019, vol. 20, no. 4, pp. 236–269. DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-4-236-269 (in Russian).
15. Azarin, V. S. Example of an Entire Function with Given Indicator and Lower Indicator, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972, vol. 18, no. 4, pp. 541–558. DOI: 10.1070/SM1972v018n04ABEH001847.
16. Azarin, V. S. Indicators of an Entire Function and the Regularity of the Growth of the Fourier Coefficients of the Logarithm of its Modulus, *Functional Analysis and its Applications*, 1975, vol. 9, no. 1, pp. 41–42. DOI: 10.1007/BF01078174.
17. Bingham, N. H., Goldie, C. M. and Teugels, J. L. *Regular Variation (Encyclopedia Math. Appl. Vol. 27)*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1987.
18. Kondratyuk, A. A. and Fridman, A. N. Predel'noe Znachenie Nizhnego Indikatora i Otsenki Snizu dlya Tselykh Funktsiy s Polozhitel'nymi Nulyami, *Ukrainskiy Matematicheskiy Zhurnal [Ukrainian Mathematical Journal]*, 1972, vol. 24, no. 4, pp. 488–494 (in Russian).
19. Kondratyuk, A. A. and Fridman, A. N. O Nizhnem Indikatore Tseloy Funktsii Nulevogo Roda s Polozhitel'nymi Nulyami, *Ukrainskiy Matematicheskiy Zhurnal [Ukrainian Mathematical Journal]*, 1972, vol. 24, no. 1, pp. 106–109 (in Russian).
20. Popov, A. Yu. On the Least Type of an Entire Function of Order ρ with Roots of a Given Upper ρ -density Lying on One Ray, *Mathematical Notes*, 2009, vol. 85, no. 2, pp. 226–239. DOI: 10.1134/S000143460901026X.
21. Denjoy, A. Sur les Produits Canoniques D'ordre Infini, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 6e ser.*, 1910, vol. 6, pp. 1–136.

Received May 11, 2020

GEORGI G. BRAICHEV
 Moscow Pedagogical State University,
 14 Krasnoprudnaya St., Moscow 107140, Russia,
 Professor
 E-mail: braichev@mail.ru

VLADIMIR B. SHERSTYUKOV
 National Research Nuclear University MEPhI,
 31 Kashirskoye Highway, Moscow 115409, Russia,
 Professor
 E-mail: shervb73@gmail.com