Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 47–57

УДК 517.53
DOI 10.46698/n7823-2870-5444-g

ТЕОРЕМЫ ТИПА РИТТА — СУГИМУРЫ[#]

А. М. Гайсин[1, 2], Г. А. Гайсина[2]

[1]Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112;
[2]Башкирский государственный университет,
Россия, 450076, Уфа, ул. З. Валиди, 32
E-mail: `gaisinam@mail.ru`, `gaisinaga@mail.ru`

Посвящается девяностолетию
Юрия Фёдоровича Коробейника

Аннотация. В конце девятнадцатого века Э. Борель естественным образом ввел понятие порядка целой функции, а затем была получена соответствующая формула для вычисления этой величины через коэффициенты тейлоровского разложения данной функции. Позже Дж. Риттом это понятие было распространено и на целые функции, представленные рядами Дирихле с положительными показателями. Им же получена аналогичная формула для этой характеристики (R-порядка), явно зависящая от коэффициентов и показателей ряда Дирихле. В работах А. М. Гайсина этот результат был полностью перенесен на случай полуплоскости, а также для ограниченной выпуклой области. В последнем случае речь идет о рядах Дирихле с комплексными показателями — рядах экспонент. В настоящей статье в терминах порядка по Ритту (R-порядка) изучается связь между ростом ряда Дирихле и коэффициентами разложения. Отдельно рассмотрены случаи, когда ряд сходится равномерно во всей плоскости или лишь в некоторой полуплоскости. В обоих случаях получены необходимые и достаточные условия на показатели, при выполнении которых верны соответствующие формулы, позволяющие вычислить эту величину через коэффициенты ряда. Все ранее известные результаты такого типа носили только достаточный характер. В случае плоскости нами показана точность оценок С. Танаки для R-порядка.

Ключевые слова: ряд Дирихле, R-порядок, формула Ритта — Сугимуры — Танаки.

Mathematical Subject Classification (2010): Primary 30D10.

Образец цитирования: *Гайсин А. М., Гайсина Г. А.* Теоремы типа Ритта — Сугимуры // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 47–57. DOI: 10.46698/n7823-2870-5444-g.

1. Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

— ряд Дирихле, сходящийся абсолютно (или просто равномерно) в некоторой полуплоскости $\Pi_b = \{s = \sigma + it : \sigma > b\}$, $-\infty \leqslant b < \infty$.

В статье обсуждается задача о порядке по Ритту функции F, заданной в Π_b рядом (1), и его связи с коэффициентами разложения этой функции в ряд Дирихле (1).

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00095_а.

Следуя работе Х. Бора [1], через σ_c, σ_a, σ_u будем обозначать абсциссы простой, абсолютной и равномерной сходимости ряда (1) соответственно. Как показал Г. Валирон (см. [2, 3]),

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} \leqslant \sigma_c \leqslant \sigma_u \leqslant \sigma_a \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} + L, \tag{2}$$

где

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n}. \tag{3}$$

Вообще говоря (в отличие от степенных рядов), величины σ_c, σ_a, σ_u могут быть различными. Как видно из соотношений (2), при $L = 0$ они все совпадут: $\sigma_c = \sigma_a = \sigma_u$. В общем случае может оказаться, что $\sigma_a \neq \sigma_u$. Тогда ряд (1) сходится в соответствующей полуплоскости (или во всей плоскости) только равномерно, но не абсолютно. В этом случае актуальна формула М. Кунияды [4]:

$$\sigma_u = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln T(x)}{x}, \quad T(x) = \sup_{|t|<\infty} \left| \sum_{[x]\leqslant\lambda_n<x} a_n e^{-i\lambda_n t} \right|,$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Если $\sigma_u = -\infty$, то сумма ряда Дирихле (1) представляет собой целую функцию F. В этой ситуации наиболее подходящей и удобной характеристикой роста функции F оказалось так называемое понятие R-порядка ρ_R, введенное Дж. Риттом (1928) [5].

По определению

$$\rho_R = \overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\sigma},$$

где $M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$, $\sigma \in \mathbb{R}$ (функция $\ln M_F(\sigma)$ является выпуклой по переменной σ [6]). В предположении, что $\sigma_a = -\infty$, т. е. когда ряд Дирихле (1) сходится во всей плоскости абсолютно, Дж. Риттом была доказана следующая формула для вычисления порядка ρ_R через коэффициенты разложения:

$$-\frac{1}{\rho_R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n \ln\lambda_n}. \tag{4}$$

В работе [7] этот результат был перенесен на случай полуплоскости Π_0, а в [8] — на ограниченную выпуклую область $G \subset \mathbb{C}$. В последнем случае речь идет о рядах с комплексными показателями — рядах экспонент, — область абсолютной сходимости которых, как известно, всегда выпукла [9]. В обоих случаях были указаны достаточные условия, при выполнении которых имеют место соответствующие аналоги формулы Ритта (6), но зависящие и от опорной функции области сходимости ряда.

Цель статьи — указать необходимые и достаточные условия, при выполнении которых верна формула для вычисления порядка по Ритту или его аналога в случае полуплоскости Π_0.

2. Случай плоскости: уточнение теоремы С. Танаки*

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, и ряд Дирихле (1) сходится во всей плоскости. При $L < \infty$ этот ряд сходится там и абсолютно.

Дж. Риттом было показано, что если $L < \infty$, то [5]

$$-\frac{1}{\rho_R} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n \ln \lambda_n} \stackrel{\text{def}}{=} -R, \quad R \geqslant 0, \tag{5}$$

где

$$\rho_R = \varlimsup_{\sigma\to-\infty} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\sigma}$$

— порядок по Ритту, введенный в [5] (R — характеристика Ритта). При $L < \infty$ доказательство формулы (5) приводится также в [6, 10]. Оно основано на неравенствах типа Коши

$$|a_n| \leqslant M_F(\sigma)\, e^{\lambda_n \sigma}, \quad n \geqslant 1, \tag{6}$$

непосредственно вытекающих из формул для коэффициентов

$$a_n e^{-\lambda_n \sigma} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \int_{y_0}^{y} F(\sigma + it)\, e^{i\lambda_n t}\, dt, \quad n \geqslant 1, \tag{7}$$

где y_0 — любое фиксированное число из $\mathbb{R}$.

Из доказательства усматривается, что формулы (7) на самом деле верны и в том случае, когда ряд (1) сходится в плоскости (или в какой-то полуплоскости) равномерно (см. [10]). Но даже при абсолютной сходимости ряда условие $L < \infty$ слишком сильное. Действительно, при доказательстве оценки $\rho_R \leqslant R^{-1}$ все сводится к сходимости при любом $\varepsilon > 0$ ряда (см. [6, 10])

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon \lambda_n \ln \lambda_n}, \tag{8}$$

которая при $L < \infty$ выводится из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-c(\ln n)\ln \lambda_n}, \quad c > L.$$

На самом деле можно только предположить, что $\sigma_u = -\infty$ и воспользоваться следующим простым утверждением.

Лемма 1. *Ряд* (8) *сходится при любом* $\varepsilon > 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln n(x)}{x \ln x} = 0, \quad n(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant x} 1$$

(C — *характеристика Сугимуры* [11]).

$\lhd$ Действительно, если $C = 0$, то для любого $\delta > 0$ при $n \geqslant n_0(\delta)$ имеем

$$\frac{1}{\delta} \ln n < \lambda_n \ln \lambda_n.$$

*Результаты этого пункта получены Г. А. Гайсиной.

Если взять $\delta = \varepsilon/2$, то ряд (8), очевидно, сходится. Обратно, если при любом $\varepsilon > 0$ ряд (8) сходится, то из монотонности членов ряда будем иметь, что

$$ne^{-\varepsilon\lambda_n \ln \lambda_n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда при $n \geqslant n_1(\varepsilon)$

$$ne^{-\varepsilon\lambda_n \ln \lambda_n} \leqslant 1,$$

или

$$\frac{\ln n}{\lambda_n \ln \lambda_n} \leqslant \varepsilon.$$

Из-за произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда получаем, что $C = 0$. $\triangleright$

К. Сугимура в [11] доказал следующее утверждение: если ряд (1) сходится во всей плоскости и $0 < R \leqslant \infty$, то при $C = 0$ верна формула (5) Ритта.

Как показано в [12], в предположениях, сделанных в [11], ряд Дирихле (1) сходится во всей плоскости равномерно ($\sigma_u = -\infty$). Поэтому результат К. Сугимуры есть следствие следующей более общей теоремы С. Танаки из [12].

Теорема 1. *Пусть ряд Дирихле* (1) *сходится равномерно во всей плоскости. Тогда для порядка ρ_R по Ритту верны оценки*

$$-R \leqslant -\frac{1}{\rho_R} \leqslant -R + T, \tag{9}$$

где R — характеристика Ритта,

$$T = \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\ln N(x)}{x \ln x}, \quad N(x) = \sum_{[x]\leqslant\lambda_n<x} 1,$$

$[x]$ — целая часть числа x (T — характеристика Танаки).

Следствие 1. *Если $T = 0$, то верна формула $\rho_R = 1/R$.*

Отметим, что нижняя оценка в (9) получается так же, как и в [6, 10], если учесть, что неравенства типа Коши (6) справедливы и в случае равномерной сходимости ряда (1).

Далее, так как $N(x) \leqslant n(x)$, то при $C = 0$ и $T = 0$. Обратно, пусть $T = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $x \geqslant x_0(\varepsilon) > \lambda_1$

$$N(x) < e^{\varepsilon x \ln x}.$$

Следовательно, учитывая монотонность мажоранты $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon x \ln x$, отсюда получаем

$$n(x) \leqslant n(x_0) + ([x]+1)e^{\varepsilon x \ln x}, \quad x \geqslant x_0(\varepsilon).$$

Но

$$\ln^+(a+b) \leqslant \ln^+ a + \ln^+ b + \ln 2, \quad a > 0,\ b > 0,\ c^+ = \max(c, 0).$$

Поэтому при $x \geqslant x_0(\varepsilon)$

$$\frac{\ln n(x)}{x \ln x} \leqslant \frac{\ln 2 + \ln n(x_0)}{x \ln x} + \frac{\ln([x]+1)}{x \ln x} + \varepsilon.$$

Отсюда из произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что $C = 0$.

Таким образом, $C = 0$ тогда и только тогда, когда $T = 0$.

Отметим, что теорема 1 содержательна лишь в случае, когда $T < \infty$. При этом она охватывает и случай $R = 0$ (при $R = 0$ порядок $\rho_R = \infty$).

Наша цель — доказать точность правой оценки в (9).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для любой последовательности* $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\lambda_n > 0$, *существует ряд Дирихле вида* (1), *равномерно сходящийся во всей плоскости, для которого*

$$-\frac{1}{\rho_R} = -R + T.$$

Следствие 2. *Для того чтобы порядок* ρ_R *любого ряда Дирихле, равномерно сходящегося во всей плоскости, вычислялся по формуле* (5), *необходимо и достаточно, чтобы* $T = 0$.

$\triangleleft$ Доказательство теоремы 2. Пусть $T > 0$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$, $1 < x_n \uparrow \infty$, такая, что при $x \to \infty$

$$\frac{\ln N(x_n)}{x_n \ln x_n} = (1 + \mathrm{o}(1))T. \tag{10}$$

Обозначая

$$\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n, \quad \omega_n = \big[[x_n], x_n\big),$$

(при подходящем выборе последовательности $\{x_n\}$ из (10) следует, что $\omega_n \cap \Lambda \neq \varnothing$, $n \geqslant 1$), рассмотрим ряд Дирихле вида (1), коэффициенты которого определим следующим образом: для любого $A > T$ положим

$$a_k = \begin{cases} 0, & \lambda_k \notin \omega; \\ e^{-Ax_n \ln x_n}, & \lambda_k \in \omega_n. \end{cases}$$

Можем считать, что $x_n > n$ $(n \geqslant 1)$. Тогда ряд (1) будет сходиться во всей плоскости абсолютно. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| a_k e^{-\lambda_k s} \right| = \sum_{n \geqslant 1} \sum_{\lambda_k \in \omega_n} a_k e^{-\lambda_k \sigma}, \quad s = \sigma + it.$$

Но

$$A_n = \sum_{\lambda_k \in \omega_n} a_k e^{-\lambda_k \sigma} = e^{-Ax_n \ln x_n} \sum_{\lambda_k \in \omega_n} e^{-\lambda_k \sigma} \leqslant e^{-Ax_n \ln x_n} N(x_n) e^{[x_n]|\sigma|}.$$

Поскольку $A > T$, то при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и $n \geqslant n_0$

$$A_n \leqslant e^{-(x_n \ln x_n)[A - (1+\mathrm{o}(1))T]} e^{[x_n]|\sigma|} \leqslant e^{-\varepsilon_0 [x_n] \ln [x_n] + [x_n]|\sigma|}.$$

Так как $x_n > n$, то отсюда видно, что действительно для любого $s \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| a_k e^{-\lambda_k s} \right| < \infty.$$

Далее, так как $\lambda_k \sim \lambda_n$ при $\lambda_k \in \omega_n$ и $n \to \infty$, то $R = A$, а поскольку $a_k \geqslant 0$, то имеет место равенство

$$M_F(\sigma) = \sum_{\lambda_k \in \omega} a_k e^{-\lambda_k \sigma}.$$

Отсюда для любого $n \geqslant 1$

$$M_F(\sigma) \geqslant \sum_{[x_n]\leqslant\lambda_k<x_n} a_k e^{-\lambda_k\sigma} = e^{-Ax_n\ln x_n} \sum_{[x_n]\leqslant\lambda_k<x_n} e^{-\lambda_k\sigma}.$$

Следовательно, при $\sigma < 0$

$$M_F(\sigma) \geqslant e^{-Ax_n\ln x_n} N(x_n)\, e^{-(x_n-1)\sigma}.$$

Отсюда, если учесть (10), при $\sigma < 0$ и $n \to \infty$ имеем

$$\ln M_F(\sigma) \geqslant x_n\big[-\big(A-(1+\mathrm{o}(1))\,T\ln x_n + (1+\mathrm{o}(1))\big)|\sigma|\big]. \tag{11}$$

Возьмем

$$\sigma = \sigma_n = -(A-T+\varepsilon)\ln x_n, \quad \varepsilon > 0. \tag{12}$$

Тогда из (11) будем иметь: при $n \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma_n) \geqslant \varepsilon(1+\mathrm{o}(1))x_n\ln x_n.$$

Отсюда, если учесть (12), получим: при $n \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma_n) \geqslant \varepsilon(1+\mathrm{o}(1))\,\frac{|\sigma_n|}{A-T+\varepsilon}\, e^{(A-T+\varepsilon)^{-1}|\sigma_n|}.$$

Следовательно, при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$\ln\ln M_F(\sigma_n) > \frac{|\sigma_n|}{A-T+2\varepsilon}.$$

Значит,

$$\rho_R \geqslant \frac{1}{A-T+2\varepsilon},$$

а поскольку $\varepsilon > 0$ — любое, то

$$\rho_R \geqslant \frac{1}{A-T}.$$

Таким образом,

$$-\frac{1}{\rho_R} \geqslant -A+T = -R+T.$$

Тогда с учетом правой оценки из (9) отсюда окончательно заключаем, что

$$-\frac{1}{\rho_R} = -R+T.$$

Теорема 2 доказана полностью. $\triangleright$

2. Случай полуплоскости**

Пусть ряд Дирихле (1) сходится абсолютно в полуплоскости Π_0. В [7] введено понятие R-порядка ρ_R (или порядка по Ритту) для суммы F этого ряда следующим образом:

$$\rho_R = \varlimsup_{\sigma\downarrow 0} \frac{\ln^+\ln M_F(\sigma)}{\sigma^{-1}}.$$

**Результаты этого пункта получены А. М. Гайсиным.

В [7] доказано, что если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}\,\ln n=0, \tag{13}$$

то R-порядок ρ_R любой функции $F\in D_0(\Lambda)$ равен

$$\rho_R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}\,\ln^+|a_n|. \tag{14}$$

Здесь и далее через $D_0(\Lambda)$ обозначен класс всех функций F, представимых в полуплоскости Π_0 рядами Дирихле, сходящимися лишь в этой полуплоскости.

Покажем, что в действительности верна следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы для R-порядка ρ_R любой функции $F\in D_0(\Lambda)$ была верна формула* (14), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (13).

$\lhd$ *Достаточность*, как было отмечено, установлена в [7].

Необходимость. Покажем теперь, что условие (13) является и необходимым для того, чтобы для R-порядка любой функции $F\in D_0(\Lambda)$ была справедлива формула (14). Действительно, пусть условие (13) не выполнено, т. е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}\,\ln n>0.$$

Тогда найдется подпоследовательность n_m такая, что для любого $m\geqslant 1$

$$\frac{\ln n_m\ln\lambda_{n_m}}{\lambda_{n_m}}\geqslant\nu>0. \tag{15}$$

Теперь положим $a_n=e$ $(n\geqslant 1)$ и оценим R-порядок функции F, определенной рядом

$$F(s)=e\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n s},\quad s=\sigma+it. \tag{16}$$

Мы предполагаем, что выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0.$$

Тогда ряд (16) сходится абсолютно в полуплоскости Π_0. Значит, $F\in D_0(\Lambda)$. Вычисляя R-порядок по формуле (14), имеем $\rho_R=0$. Убедимся, что на самом деле $\rho_R>0$. Действительно, поскольку коэффициенты $a_n>0$, то $M_F(\sigma)=F(\sigma)$ $(\sigma>0)$. Следовательно, для любого натурального N имеем

$$M_F(\sigma)\geqslant e\sum_{k=\left[\frac{N}{2}\right]}^{N}e^{-\lambda_k\sigma}\geqslant e\,\frac{N}{2}\,e^{-\lambda_N\sigma}\geqslant Ne^{-\lambda_N\sigma}=\exp(\ln N-\lambda_N\sigma). \tag{17}$$

Запишем условие (15) в виде

$$\lambda_{n_m}\leqslant\frac{1}{\nu}\,\ln n_m\ln\lambda_{n_m},\quad \nu>0 \tag{18}$$

и положим в (17) $N=n_m$. Тогда для любого $m\geqslant 1$ имеем

$$M_F(\sigma)\geqslant\exp(\ln n_m-\lambda_{n_m}\sigma)\geqslant\exp\biggl(\ln n_m-\frac{\sigma}{\nu}\,\ln n_m\ln\lambda_{n_m}\biggr). \tag{19}$$

Далее, из (18) видно, что $\ln \lambda_{n_m} \leqslant 2 \ln\ln n_m$ при $m \geqslant m_0$. Учитывая это, из (19) получаем оценку

$$M_F(\sigma) \geqslant \exp\left(\ln n_m - \frac{2\sigma}{\nu} \ln n_m \ln\ln n_m\right), \quad m \geqslant m_0. \tag{20}$$

В оценках (17) $\sigma > 0$ — любое. Имея это в виду, положим $\sigma = \sigma_m$, где σ_m — решение уравнения

$$\ln\ln n_m = \frac{\nu}{4\sigma}, \quad m \geqslant m_0.$$

Тогда из (20) получаем

$$\ln M_F(\sigma) \geqslant \frac{1}{2} \exp\frac{\nu}{4\sigma}, \quad \sigma = \sigma_m,\ m \geqslant m_0.$$

Отсюда

$$\ln\ln M_F(\sigma) \geqslant \ln\left(\frac{1}{2}\exp\frac{\nu}{4\sigma}\right) \geqslant \frac{\nu}{8\sigma}, \quad \sigma = \sigma_m,\ m \geqslant m_1 > m_0.$$

Это означает, что $\rho_R \geqslant \nu/8$. Необходимость доказана. $\rhd$

Для полноты изложения приведем соответствующий результат и для класса аналитических функций, представимых рядами экспонент в ограниченной выпуклой области с некоторой фиксированной последовательностью показателей.

3. Случай ограниченной выпуклой области

Здесь мы ограничимся лишь формулировкой результата, поскольку он опубликован в статье [8]. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant |\lambda_{n+1}| \to \infty$, — последовательность комплексных чисел, G — ограниченная выпуклая область, $0 \in G$. Для любой функции f, аналитической в области G, в [8] введено понятие R-порядка ρ_G. По определению

$$\rho_G = \varlimsup_{z\to\partial G} d(z) \ln^+ \ln^+ |f(z)|,$$

где $d(z) = \inf_{\xi\in\partial G} |z - \xi|$.

Через $H_R(G, \Lambda)$ обозначим класс всех аналитических в области G функций f, имеющих конечный порядок ρ_G и представимых в G рядом экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}.$$

Всегда существует последовательность Λ, имеющая нулевую плотность и нулевой индекс конденсации, такая, что $H_R(G, \Lambda) \neq \varnothing$ (см. в [8]).

В [8] доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть G — ограниченная выпуклая область с гладкой границей, $0 \in G$. Если $q = 0$ и выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \ln|\lambda_n|}{|\lambda_n|} = 0,$$

то порядок ρ_G любой функции $f \in H_R(G, \Lambda)$ вычисляется по формуле

$$\rho_G = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{|\lambda_n|} \ln^+ \left[|a_n| e^{K(-\varphi_n)|\lambda_n|}\right], \tag{21}$$

где $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\varphi_k}$, $K(\varphi)$ *— опорная функция области* G, *а*

$$q = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|\lambda_n|}{|\lambda_n|} \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right|, \quad Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \quad \lambda_n^2 \neq \lambda_m^2,\ n \neq m.$$

В [8] приводится пример функции $f \in H_R(G, \Lambda)$, порядок ρ_G которой не равен правой части (21), если $q \neq 0$.

Рядам Дирихле посвящена и целая серия работ Юрия Фёдоровича Коробейника, которыми он занимается с начала 1990-х годов (см. в [13]), а за последние 20 лет — и теорией дзета-функции Римана (правда, как сам утверждает, «упорно, но не слишком успешно» [14]). Однако он надеется, что его работы привлекут «внимание уфимских математиков к этой, по-видимому, свежей для них тематике» (см. [14]). В работе [13] им было высказано также пожелание о том, чтобы эта его «небольшая книга послужила бы отправной точкой для создания подобной [но более подробной] монографии по рядам Дирихле». Настоящая заметка подготовлена в какой-то степени под влиянием этого пожелания.

В заключение считаю своим долгом выразить профессору Ю. Ф. Коробейнику глубокую признательность за то, что он выступал в качестве моего официального оппонента по кандидатской и докторской диссертациям, причем в первом случае — в Ростове-на-Дону в 1983 году. Его глубокие по содержанию замечания и рекомендации, высказанные в отзывах, во многом отразились в моих дальнейших исследованиях (примечание А. М. Гайсина).

Литература

1. *Bohr H.* Collected Mathematical Works.—Copenhagen, 1952.—992 p.
2. *Valiron G.* Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet // Bull. Soc. Math. France.—1924.—Vol. 52.—P. 166–174. DOI: 10.24033/bsmf.1051.
3. *Valiron G.* Entire functions and Borel's directions // Proc. Natl. Acad. Sci. USA.—1934.—Vol. 20.—P. 211–215. DOI: 10.1073/pnas.20.3.211.
4. *Kuniyeda M.* Uniform convergence — abscissa of general Dirichlet series // Tôhoku Math. J.—1916.—Vol. 9.—P. 7–27.
5. *Ritt J.* On certain points in the theory of Dirichlet series // Amer. J. Math.—1928.—Vol. 50, № 1.—P. 73–86. DOI: 10.2307/2370849.
6. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
7. *Гайсин А. М.* Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе // Мат. сб.—1982.—Т. 117, № 3.—С. 412–424.
8. *Гайсин А. М.* Поведение суммы ряда экспонент вблизи границы области регулярности // Мат. заметки.—1990.—Т. 48, № 3.—С. 45–53.
9. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент.—М.: Наука, 1983.—176 с.
10. *Мандельбройт С.* Ряды Дирихле. Принципы и методы.—М.: Мир, 1973.—171 с.
11. *Sugimura K.* Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletsche Reihen // Math. Z.—1929.—Vol. 29.—P. 264–277. DOI: 10.1007/BF01180529.
12. *Tanaka C.* Note on Dirichlet series, V. On the integral functions defined by Dirichlet series, I // Tôhoku Math. J.—1953.—Vol. 2, № 3.—P. 67–78. DOI: 10.2748/tmj/1178245352.
13. *Коробейник Ю. Ф.* Ряды экспонент с вещественными показателями.—Ростов н/Д.: ЮФУ, 2009.—84 с.
14. *Коробейник Ю. Ф.* О некоторых вопросах теории дзета-функции Римана // Уфим. мат. журн.—2015.—Т. 7, № 4.—С. 93–98.

Статья поступила 13 мая 2020 г.

Гайсин Ахтяр Магазович
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
заведующий отделом
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112;
Башкирский государственный университет,
профессор
РОССИЯ, 450076, Уфа, ул. З. Валиди, 32
E-mail: gaisinam@mail.ru

Гайсина Галия Ахтяровна
Башкирский государственный университет,
аспирант
РОССИЯ, 450076, Уфа, ул. З. Валиди, 32
E-mail: gaisinaga@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 47–57

RITT–SUGIMURA TYPE THEOREMS

Gaisin, A. M.[1,2] and Gaisina, G. A.[2]
[1]Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia;
[2]Bashkir State University,
32 Zaki Validy St., Ufa 450076, Russia
E-mail: gaisinam@mail.ru, gaisinaga@mail.ru

Abstract. At the end of the nineteenth century, E. Borel introduced the concept of the order of an entire function, and then a corresponding formula was obtained for calculating this quantity in terms of the coefficients of the Taylor expansion of this function. Later, J. Ritt extended this notion to entire functions represented by Dirichlet series with positive exponents. He also obtained a similar formula for this characteristic (R-order), which clearly depends on the coefficients and exponents of the Dirichlet series. In the works of A. M. Gaisin, this result was completely carried over to the case of a halfplane and also a bounded convex domain. In the latter case, the author deals with Dirichlet series with complex exponents, exponential series. In this article the relationship between the growth of the Dirichlet series and the expansion coefficients in terms of Ritt order (R-order) is studied. Cases when the series converges uniformly in the entire plane or only in a halfplane are considered separately. In both cases the necessary and sufficient conditions for the exponents are obtained, the fulfillment of which the corresponding formulas are correct, allowing to calculate this value through the series coefficients. All previously known results of this type were only of a sufficient character. In the case of a plane, we have shown accuracy of S. Tanaka's estimates for the R-order.

Key words: Dirichlet series, R-order, Ritt–Sugimura–Tanaka formula.

Mathematical Subject Classification (2010): Primary 30D10.

For citation: *Gaisin, A. M. and Gaisina, G. A.* Ritt–Sugimura Type Theorems, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 47–57 (in Russian). DOI: 10.46698/n7823-2870-5444-g.

References

1. *Bohr, H. Collected Mathematical Works*, Copenhagen, 1952, 992 p.
2. *Valiron, G.* Sur l'Abscisse de Convergence des Séries de Dirichlet, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1924, vol. 52, pp. 166–174. DOI: 10.24033/bsmf.1051.

3. *Valiron, G.* Entire Functions and Borel's directions, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 1934, vol. 20, pp. 211–215. DOI: 10.1073/pnas.20.3.211.
4. *Kuniyeda, M.* Uniform Convergence — Abscissa of General Dirichlet Series, *Tôhoku Mathematical Journal*, 1916, vol. 9, pp. 7–27.
5. *Ritt, J.* On Certain Points in the Theory of Dirichlet Series, *American Journal of Mathematics*, 1928, vol. 50, no. 1, pp. 73–86. DOI: 10.2307/2370849.
6. *Leont'ev, A. F. Ryady eksponent* [Exponential Series], Moscow, Nauka, 1976, 536 p. (in Russian).
7. *Gaisin, A. M.* A Bound for the Growth in a Half-Strip of a Function Represented by a Dirichlet Series, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1983, vol. 45, no. 3, pp. 411–422. DOI: 10.1070/SM1983v045n03ABEH001015.
8. *Gaisin, A. M.* Behavior of the Sum of a Series of Exponentials Near the Boundary of the Domain of Regularity, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1990, vol. 48, no. 3, pp. 904–910. DOI: 10.1007/BF01157432.
9. *Leont'ev, A. F. Tselye funktsii. Ryady eksponent* [Entire Functions. Exponential Series], Moscow, Nauka, 1983, 176 p. (in Russian).
10. *Mandelbrojt, S. Séries Adhérentes. Régularisation des Suites. Applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1952, xiv+277 p.
11. *Sugimura, K.* Übertragung Einiger Sätze aus der Theorie der Ganzen Funktionen auf Dirichletsche Reihen, *Mathematische Zeitschrift*, 1929, vol. 29, pp. 264–277. DOI: 10.1007/BF01180529.
12. *Tanaka C.* Note on Dirichlet Series, V. On the Integral Functions Defined by Dirichlet Series, I, *Tôhoku Mathematical Journal*, 1953, vol. 2, no. 3, pp. 67–78. DOI: 10.2748/tmj/1178245352.
13. *Korobeynik Yu. F. Ryady eksponent s veshchestvennymi pokazatelyami* [Exponential Series with Real Exponents], Rostov-on-Don, SFU, 2009, 84 p. (in Russian).
14. *Korobeynik Yu. F.* On Some Problems in the Theory of the Riemann's Zeta-Function, *Ufa Mathematical Journal*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 88–93. DOI: 10.13108/2015-7-4-88.

Received May 13, 2020

Ahtyar M. Gaisin
Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Head of Department;

Bashkir State University,
32 Zaki Validy St., Ufa 450076 Russia,
Professor
E-mail: gaisinam@mail.ru

Galiya A. Gaisina
Bashkir State University,
32 Zaki Validy St., Ufa 450076, Russia,
Graduate Student
E-mail: gaisinaga@mail.ru