Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 45–57

УДК 519.63
DOI 10.46698/p2286-5792-9411-x

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА#

М. Х. Бештоков[1], **З. В. Бештокова**[1], **М. З. Худалов**[2]

[1] Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;
[2] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru, zarabaeva@yandex.ru, hmz@mail.ru

Посвящается 75-летию Семена Самсоновича Кутателадзе

Аннотация. В прямоугольной области исследуется нелокальная краевая задача для одномерного по пространственной переменной нагруженного уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной на границе теплоемкостью, выступающего в качестве математической модели, возникающего, в частности, в практике регулирования солевого режима почв с фрактальной организацией, когда расслоение верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности, затопленного на некоторое время участка. Основным методом исследования является метод энергетических неравенств. При предположении существования регулярного решения дифференциальной задачи получена априорная оценка, откуда следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи. На равномерной сетке в соответствие дифференциальной задаче ставится разностная схема второго порядка аппроксимации по параметрам сетки. Для решения разностной задачи получена априорная оценка в разностной форме, из чего следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным. В силу линейности рассматриваемой задачи полученное неравенство позволяет утверждать сходимость приближенного решения к точному (в предположении существования последнего в классе достаточно гладких функций) со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации. Проведены численные эксперименты, иллюстрирующие полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, дробная производная Капуто, сосредоточенная теплоемкость, разностные схемы, устойчивость, сходимость.

Mathematical Subject Classification (2010): 65N06, 65N12.

Образец цитирования: *Бештоков М. Х., Бештокова З. В., Худалов М. З.* Конечно-разностный метод решения нелокальной краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности дробного порядка // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 4.—С. 45–57. DOI: 10.46698/p2286-5792-9411-x.

Введение

В настоящей работе рассматривается нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности дробного порядка с нестандартными краевыми условиями, когда на границе помещается сосредоточенная теплоемкость величины C_0 и происходит

#Исследование частично выполнено вторым соавтором при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 20-51-53007.

теплообмен с внешней средой по закону Ньютона [1, с. 396]. Такие условия возникают в случае, когда рассматривается тело с большой теплопроводностью, вследствие чего температуру по всему объему этого тела можно считать постоянной (см. [2, с. 186]), а также при решении задачи об установлении температуры в ограниченной среде при наличии нагревателя, трактуемого как сосредоточенная теплоемкость [3]. Тогда краевое условие, например, при $x = 0$, (выражающее уравнение теплового баланса) будет иметь вид

$$C_0\,\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_0), \quad C_0 = \mathrm{const} > 0,$$

где u_0 — температура внешней среды.

Условия такого рода возникают также в практике регулирования солевого режима почв, когда рассоление верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности, затопленного на некоторое время участка (см. [4, с. 233]). Если на поверхности поля имеется слой воды постоянной толщины h, то на верхней границе следует задать условие

$$h\,\frac{\partial c}{\partial t} = D\,\frac{\partial c}{\partial x}, \tag{$*$}$$

где c — концентрация соли в почвенном растворе, D — коэффициент диффузивности.

Для описания движения примеси в потоке однородной жидкости используется дифференциальное уравнение дробного порядка [5]. Для определения целесообразности режима смены воды может потребоваться решение краевой задачи с условиями на верхней границе толщи, отличающейся от ($*$). Так как почву следует рассматривать как среду фрактальную, то при написании граничных условий есть смысл также использовать концепцию фрактала

$$C_0 \partial_{0t}^{\alpha} u = k\,\frac{\partial u}{\partial x}.$$

В настоящее время стало очевидным, что при решении многих задач в механике, физике, биологии часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы, примерами последних могут служить сильно пористые среды, каковым, например, является почвогрунт. Решение различных задач для таких сред приводит к краевым задачам для дифференциальных уравнений с дробной производной. Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка являются обобщением уравнений с частными производными целочисленного порядка и вызывают большой теоретический и практический интерес [6–10].

Численным методам решения локальных и нелокальных краевых задач для различных уравнений дробного порядка посвящены работы [11–19]. В работах [11–13] получены результаты, позволяющие, как и в классическом случае ($\alpha = 1$), применять метод энергетических неравенств для нахождения априорных оценок краевых задач для уравнения дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках.

1. Постановка задачи и априорная оценка в дифференциальной форме

В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x)\,\partial u \partial x - q(x,t)u(x_0,t) + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$k(0)u_x(0,t) = \beta_{11}(t)u(0,t) + \beta_{12}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t) - \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$-k(l)u_x(l,t) = \beta_{21}(t)u(l,t) + \beta_{22}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} 0 < c_0 \leqslant k(x), \quad \beta_{12}(t), \beta_{22}(t) \leqslant c_1, \\ \bigl|\beta_{11}(t),\, \beta_{21}(t),\, r(x),\, q(x,t),\, k_x(x),\, r_x(x)\bigr| \leqslant c_2, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\, d\tau$$

— дробная производная в смысле Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, $c_i = \mathrm{const} > 0$, $i = 0, 1, 2$.

Далее предполагается, что дифференциальная задача (1)–(4) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными.

В работе будем использовать обозначения $M_i = \mathrm{const} > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, которые зависят только от входных данных рассматриваемой задачи.

Теорема 1. *Если*

$$k(x) \in C^1[0,l], \quad r(x) \in C[0,l], \quad q(x,t), f(x,t) \in C\bigl(\overline{Q}_T\bigr),$$

$$u(x,t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}\bigl(\overline{Q}_T\bigr), \quad \partial_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C\bigl(\overline{Q}_T\bigr)$$

и выполнены условия (5), *тогда для решения задачи* (1)–(4) *справедлива априорная оценка*

$$\bigl\|u\bigr\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\left(\bigl\|u_x\bigr\|_0^2 + \bigl\|\partial_{0t}^{\alpha}u\bigr\|_0^2\right) \leqslant M\left(D_{0t}^{-\alpha}\bigl(\bigl\|f\bigr\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\bigr) + \bigl\|u_0(x)\bigr\|^2_{W_2^1(0,l)}\right),$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, *зависящее только от входных данных* (1)–(4),

$$D_{0t}^{-\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$$

— дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка α, $0 < \alpha < 1$.

$\triangleleft$ Для получения априорной оценки решения задачи (1)–(4) в дифференциальной форме умножим уравнение (1) скалярно на $U = u + \partial_{0t}^{\alpha}u$:

$$(\partial_{0t}^{\alpha}u, U) = \left((ku_x)_x, U\right) + (ru_x, U) - (qu(x_0,t), U) + (f, U), \tag{6}$$

где

$$(a,b) = \int\limits_0^l ab\,dx, \quad (a,a) = \|a\|_0^2,$$

a, b — заданные на $[0,l]$ функции.

Преобразуем слагаемые, входящие в тождество (6), пользуясь неравенством Коши с ε и леммой 1 из [11]:

$$\bigl(\partial_{0t}^{\alpha}u, U\bigr) = \bigl(\partial_{0t}^{\alpha}u, u + \partial_{0t}^{\alpha}u\bigr) = \bigl(1, u\partial_{0t}^{\alpha}u\bigr) + \bigl(1, (\partial_{0t}^{\alpha}u)^2\bigr) \geqslant \frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\bigl\|u\bigr\|_0^2 + \bigl\|\partial_{0t}^{\alpha}u\bigr\|_0^2, \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \bigl((ku_x)_x, U\bigr) = \bigl((ku_x)_x, u + \partial_{0t}^{\alpha}u\bigr) = Uku_x\big|_0^l - \bigl(ku_x, u_x + \partial_{0t}^{\alpha}u_x\bigr) \\ = Uku_x\big|_0^l - \bigl(k, u_x^2\bigr) - \bigl(k, u_x\partial_{0t}^{\alpha}u_x\bigr) \leqslant Uku_x\big|_0^l - c_0\bigl\|u_x\bigr\|_0^2 - \frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\bigl\|\sqrt{k}\,u_x\bigr\|_0^2, \end{gathered} \tag{8}$$

$$(ru_x,U)=\big(ru_x,u+\partial_{0t}^{\alpha}u\big)=(ru_x,u)+\big(ru_x,\partial_{0t}^{\alpha}u\big)\leqslant\varepsilon\left\|\partial_{0t}^{\alpha}u\right\|_0^2+M_1^{\varepsilon}\big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\big),\quad(9)$$

$$\begin{gathered}-\big(qu(x_0,t),U\big)=-\big(qu(x_0,t),u+\partial_{0t}^{\alpha}u\big)=-\big(qu(x_0,t),u\big)-\big(qu(x_0,t),\partial_{0t}^{\alpha}u\big)\\ \leqslant\frac{1}{2}\,(q,u)^2+\varepsilon\left\|\partial_{0t}^{\alpha}u\right\|_0^2+M_2^{\varepsilon}u^2(x_0,t)\leqslant\varepsilon\left\|\partial_{0t}^{\alpha}u\right\|_0^2+M_3^{\varepsilon}\big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\big),\end{gathered}\quad(10)$$

$$(f,U)=\big(f,u+\partial_{0t}^{\alpha}u\big)=(f,u)+\big(f,\partial_{0t}^{\alpha}u\big)\leqslant\varepsilon\left\|\partial_{0t}^{\alpha}u\right\|_0^2+M_4^{\varepsilon}\,\|f\|_0^2+\|u\|_0^2.\quad(11)$$

Учитывая преобразования (7)–(11), из (6) находим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\big\|u\big\|_0^2+\big\|\partial_{0t}^{\alpha}u\big\|_0^2+c_0\|u_x\|_0^2+\frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\big\|\sqrt{k}\,u_x\big\|_0^2\\ \leqslant Uku_x\big|_0^l+\varepsilon\left\|\partial_{0t}^{\alpha}u\right\|_0^2+M_5^{\varepsilon}\big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\big)+M_6^{\varepsilon}\big\|f\big\|_0^2.\end{gathered}\quad(12)$$

Выбирая $\varepsilon=\frac{1}{2}$, из (12) находим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\big\|u\big\|_0^2+\frac{1}{2}\,\big\|\partial_{0t}^{\alpha}u\big\|_0^2+c_0\big\|u_x\big\|_0^2+\frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\big\|\sqrt{k}\,u_x\big\|_0^2\\ \leqslant Uku_x\big|_0^l+M_5\left(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\right)+M_6\big\|f\big\|_0^2.\end{gathered}\quad(13)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (13), тогда получим

$$\begin{gathered}Uku_x\big|_0^l=\big(u(l,t)+\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\big)\big(\mu_2(t)-\beta_{21}(t)u(l,t)-\beta_{22}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\big)\\ +\big(u(0,t)+\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\big)\big(\mu_1(t)-\beta_{11}u(0,t)-\beta_{12}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\big)=\mu_2(t)u(l,t)+\mu_2(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\\ -\beta_{21}(t)u^2(l,t)-\beta_{21}(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)-\beta_{22}(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)-\beta_{22}(t)\left(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\right)^2\\ +\mu_1(t)u(0,t)+\mu_1(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)-\beta_{11}(t)u^2(0,t)-\beta_{11}u(0,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\\ -\beta_{12}(t)u(0,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)-\beta_{12}\left(\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\right)^2\leqslant M_7^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)+\varepsilon_1\left(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\right)^2\\ +\varepsilon_2\left(\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\right)^2+M_8^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\left(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\right)-\beta_{22}(t)\left(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\right)^2-\beta_{12}(t)\left(\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\right)^2.\end{gathered}$$

Выбирая $\varepsilon_1=\beta_{22}(t)$, $\varepsilon_2=\beta_{12}(t)$, из последнего находим

$$Uku_x\big|_0^l\leqslant M_9\left(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\right)+M_{10}\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right).\quad(14)$$

Учитывая (14), из (13) находим

$$\begin{gathered}\partial_{0t}^{\alpha}\left(\|u\|_0^2+\big\|\sqrt{k}u_x\big\|_0^2\right)+\big\|u_x\big\|_0^2+\big\|\partial_{0t}^{\alpha}u\big\|_0^2\\ \leqslant M_{11}\left(\|u\|_0^2+\big\|\sqrt{k}\,u_x\big\|_0^2\right)+M_{12}\left(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\right).\end{gathered}\quad(15)$$

Применяя к обеим частям неравенства (15) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\begin{gathered}\big\|u\big\|_{W_2^1(0,l)}^2+D_{0t}^{-\alpha}\left(\|u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2\right)\leqslant M_{13}D_{0t}^{-\alpha}\big\|u\big\|_{W_2^1(0,l)}^2\\ +M_{14}\left(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\right)+\|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\right),\end{gathered}\quad(16)$$

где $\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2=\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2$.

На основании [11, лемма 2] из (16) находим априорную оценку

$$\begin{gathered}\big\|u\big\|_{W_2^1(0,l)}^2+D_{0t}^{-\alpha}\left(\|u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2\right)\\ \leqslant M\left(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\right)+\big\|u_0(x)\big\|_{W_2^1(0,l)}^2\right),\end{gathered}\quad(17)$$

где $M=\mathrm{const}>0$, зависящее только от входных данных (1)–(4).

Из оценки (17) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части в смысле нормы $\|u\|_1^2 = \|u\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\left(\|u_x\|_0^2 + \|\partial_{0t}^\alpha u\|_0^2\right)$. $\triangleright$

2. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)–(4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$:

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y = \varkappa_i\big(a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\big)_x + b_i a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x},i} + b_i a_{i+1} y^{(\sigma)}_{x,i} - d_i^j\big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\big) + \varphi_i^j, \tag{18}$$

$$\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} = \beta_{11} y_0^{(\sigma)} + 0.5hd_0\big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\big) + \tilde{\beta}_{12}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_0 - \tilde{\mu}_1, \quad t\in\overline{\omega}_\tau, \tag{19}$$

$$-\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} = \beta_{21} y_N^{(\sigma)} + 0.5hd_N\big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\big) + \tilde{\beta}_{22}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_N - \tilde{\mu}_2, \quad t\in\overline{\omega}_\tau, \tag{20}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x\in\overline{\omega}_h, \tag{21}$$

где

$$\tilde{\beta}_{12} = \beta_{12} + 0.5h, \quad \tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma}) = \mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_0^j,$$

$$\tilde{\beta}_{22} = \beta_{22}(t_{j+\sigma}) + 0.5h, \quad \tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma}) = \mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N^j,$$

$$a_i = k(x_{i-0.5}), \quad b_i^j = \frac{r(x_i)}{k(x_i)}, \quad \varphi = f(x_i, t_{j+\sigma}),$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j, \quad d_i^j = d(x_i, t_{j+\sigma}), \quad a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha},$$

$$a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha}, \quad l \geqslant 1, \quad \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha}\big[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\big] - \frac{1}{2}\big[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\big], \quad l\geqslant 1,$$

$$\text{при } j=0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j>0, \quad c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)}, & s=0,\\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)}, & 1\leqslant s\leqslant j-1,\\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)}, & s=j,\end{cases}$$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)} > \frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha} > 0, \quad x^-_{i_0} = \frac{x_{i_0+1} - x_0}{h}, \quad x^+_{i_0} = \frac{x_0 - x_{i_0}}{h}, \quad x_{i_0}\leqslant x_0\leqslant x_{i_0+1},$$

$\varkappa = \frac{1}{1+R}$, $R = \frac{0.5h|r|}{k}$ — разностное число Рейнольдса, $\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^j c^{(\alpha,\sigma)}_{j-s} y_t^s$ — дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α, $0<\alpha<1$, обеспечивающий порядок точности $O(\tau^{3-\alpha})$ [12].

Введем скалярные произведения и норму:

$$[u,v] = \sum_{i=0}^N u_i v_i \hbar, \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h, & i=0,N,\\ h, & i\neq 0,N,\end{cases}$$

$$(u,v) = \sum_{i=1}^N u_i v_i h, \quad [u,u] = \big[1,u^2\big] = \big|[u]\big|_0^2.$$

Перепишем (18)–(21) в операторной форме

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = \overline{\Lambda}\,(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)} + \overline{\Phi}, \tag{22}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{23}$$

где

$$\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}$$

$$= \begin{cases} \tilde{\Lambda} y_i^{(\sigma)} = \varkappa\big(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)_x + b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)} + b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)} - d\big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\big), \quad i = 1,\ldots,N-1, \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = \dfrac{2}{h}\,\big(\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \beta_{11} y_0^{(\sigma)} - 0.5hd_0\big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\big) - \beta_{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0\big), \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = \dfrac{2}{h}\,\big(-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \beta_{21} y_N^{(\sigma)} - 0.5hd_N\big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\big) - \beta_{22}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\big), \end{cases}$$

$$\overline{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, & i = 1,\ldots,N-1, \\ \varphi^- = \dfrac{2}{h}\,\big(\mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_0^j\big), & i = 0, \\ \varphi^+ = \dfrac{2}{h}\,\big(\mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N^j\big), & i = N, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varkappa = \dfrac{1}{1 + \frac{0.5h|r|}{k}} \\ \varkappa_0 = \dfrac{1}{1 + \frac{0.5h|r_0|}{k_{0.5}}}, & r_0 \leqslant 0 \\ \varkappa_N = \dfrac{1}{1 + \frac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}}, & r_N \geqslant 0. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (5), *тогда существует такое* τ_0, *что если* $\tau \leqslant \tau_0$, *то для решения разностной задачи* (18)–(21) *справедлива априорная оценка*

$$\big|[y^{j+1}]\big|^2_{W_2^1(0,l)} \leqslant M\Big(\big|[y^0]\big|^2_{W_2^1(0,l)} + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(\big|[\varphi^{j'}]\big|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)\Big), \tag{24}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, *не зависящая от* h *и* τ, $|[y]|^2_{W_2^1(0,l)} = |[y]|_0^2 + |[y_{\bar{x}}]|_0^2$.

$\lhd$ Умножим (22) скалярно на $\bar{y} = y^{(\sigma)} + \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y:$

$$\big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, \bar{y}\big] = \big[\,\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, \bar{y}\big] + \big[\,\overline{\Phi}, \bar{y}\big]. \tag{25}$$

Оценим суммы, входящие в (25), с учетом [12, лемма 1]:

$$\begin{gathered} \big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, \bar{y}\big] = \big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, y^{(\sigma)} + \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y\big] \\ = \big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, y^{(\sigma)}\big] + \big[1, (\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y)^2\big] \geqslant \frac{1}{2}\,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \big|[y]\big|_0^2 + \big|\big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y\big]\big|_0^2, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} \big[\,\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, \bar{y}\big] = \big(\tilde{\Lambda} y^{(\sigma)}, \bar{y}\big) + 0.5h\bar{y}_0 \Lambda^- y_0^{(\sigma)} + 0.5h\bar{y}_N \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} \\ = \big(\varkappa\big(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)_x, \bar{y}\big) + \big(b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \bar{y}\big) + \big(b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, \bar{y}\big) - \big(d\big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\big), \bar{y}\big) \\ + \bar{y}_0 \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \beta_{11} y_0^{(\sigma)} \bar{y}_0 - \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} \bar{y}_N - 0.5hd_0\big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\big)\bar{y}_0 \\ - \beta_{21} y_N^{(\sigma)} \bar{y}_N - 0.5hd_N\big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\big)\bar{y}_N - \overline{y}_0 \beta_{12} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0 - \overline{y}_N \beta_{22} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N. \end{gathered} \tag{27}$$

Преобразуем слагаемые в правой части (27):

$$
\begin{gathered}
\big(\varkappa\big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)_x,\bar{y}\big)=\bar{y}\varkappa a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big|_0^N-\big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},(\varkappa\bar{y})_{\bar{x}}\big]=\bar{y}_N\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}-\bar{y}_0\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)}\\
-\big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},\varkappa_{\bar{x}}\bar{y}+\varkappa^{(-1)}\bar{y}_{\bar{x}}\big]=\bar{y}_N\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}-\bar{y}_0\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)}-\big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},\varkappa_{\bar{x}}y^{(\sigma)}\big]\\
-\big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},\varkappa_{\bar{x}}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y\big]-\big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},\varkappa^{(-1)}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]-\big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},\varkappa^{(-1)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_{\bar{x}}\big]\leqslant\bar{y}_N\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}\\
-\bar{y}_0\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)}+\varepsilon\,\big|\big[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y\big]\big|_0^2+M_1^{\varepsilon}\left(\big|\big[y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\right)-\frac{1}{1+hM_2}\left(a\varkappa,\big(y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)^2\right]\\
-\frac{1}{2(1+hM_2)}\left(a\varkappa,\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_{\bar{x}}^2\right]\leqslant\bar{y}_N\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}-\bar{y}_0\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)}+\varepsilon\,\big|\big[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y\big]\big|_0^2\\
+M_1^{\varepsilon}\Big(\big|\big[y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\Big)-M_2\big|\big[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2-M_3\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big|\big[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar{x}}\big]\big|_0^2,
\end{gathered}\tag{28}
$$

$$
\begin{gathered}
\big(b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},\bar{y}\big)+\big(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},\bar{y}\big)=\big(b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\big)\\
+\big(b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y\big)+\big(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\big)+\big(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y\big)\\
\leqslant\varepsilon\big|\big[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y\big]\big|_0^2+M_4^{\varepsilon}\Big(\big|\big[y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\Big),
\end{gathered}\tag{29}
$$

$$
\begin{gathered}
-\big(d\big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big),\bar{y}\big)-0.5hd_0\big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big)\bar{y}_0\\
-0.5hd_N\big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big)\bar{y}_N-\overline{y}_0\beta_{12}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0-\overline{y}_N\beta_{22}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N-\beta_{11}y_0^{(\sigma)}\bar{y}_0\\
-\beta_{21}y_N^{(\sigma)}\bar{y}_N=-\big[d\big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big),y^{(\sigma)}\big]-\big[d\big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big),\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y\big]\\
-\beta_{11}\big(y_0^{(\sigma)}\big)^2-\beta_{11}y_0^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0-\beta_{21}\big(y_N^{(\sigma)}\big)^2-\beta_{21}y_N^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N-\beta_{12}y_0^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0\\
-\beta_{12}\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0\big)^2-\beta_{22}y_N^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N-\beta_{22}\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\big)^2\leqslant\varepsilon_1\big|\big[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y\big]\big|_0^2\\
+M_5^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(\big|\big[y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\Big)+\varepsilon_2\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0\big)^2+\varepsilon_3\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\big)^2\\
-\beta_{12}\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0\big)^2-\beta_{22}\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\big)^2.
\end{gathered}\tag{30}
$$

Учитывая преобразования (28)–(30), из (27) получим

$$
\begin{gathered}
\big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},\bar{y}\big]\leqslant\varepsilon_1\big|\big[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y\big]\big|_0^2+\varepsilon_2\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0\big)^2+\varepsilon_3\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\big)^2\\
-\beta_{12}\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0\big)^2-\beta_{22}\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\big)^2+M_6^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(\big|\big[y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\Big)\\
-M_2\big|\big[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2-M_3\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big|\big[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar{x}}\big]\big|_0^2,
\end{gathered}\tag{31}
$$

$$
\begin{gathered}
\big[\overline{\Phi},\bar{y}\big]=(\varphi,\bar{y})+0.5h\varphi^-\bar{y}_0+0.5h\varphi^+\bar{y}_N=(\varphi,\bar{y})+\bar{y}_0(\mu_1+0.5h\varphi_0)\\
+\bar{y}_N(\mu_2+0.5h\varphi_N)=(\varphi,\bar{y})+\bar{y}_0\mu_1+0.5h\varphi_0\bar{y}_0+\bar{y}_N\mu_2+0.5h\varphi_N\bar{y}_N\\
=[\varphi,\bar{y}]+\mu_1\bar{y}_0+\mu_2\bar{y}_N=\big[\varphi,y^{(\sigma)}\big]+\big[\varphi,\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y\big]+\mu_1y_0^{(\sigma)}+\mu_1\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0\\
+\mu_2y_N^{(\sigma)}+\mu_2\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\leqslant\varepsilon_1\big|[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y]\big|_0^2+\varepsilon_2\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0\big)^2+\varepsilon_3\big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\big)^2\\
M_7^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\big(\mu_1^2+\mu_2^2\big)+M_8\Big(\big|\big[y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\Big)+M_9^{\varepsilon_1}\big|[\varphi]\big|_0^2.
\end{gathered}\tag{32}
$$

Принимая во внимание преобразования (26)–(32), из (25) находим

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\,\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big|[y]\big|_0^2+\big|[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y]\big|_0^2+M_3\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big|\big[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar{x}}\big]\big|_0^2+M_2\big|\big[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\\
+\beta_{12}(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0)^2+\beta_{22}(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N)^2\leqslant2\varepsilon_1\big|\big[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y\big]\big|_0^2+2\varepsilon_2(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0)^2\\
+2\varepsilon_3(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N)^2+M_{11}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(\big|\big[y^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2\Big)+M_{12}^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\big(\mu_1^2+\mu_2^2\big)+M_{13}^{\varepsilon_1}\big|[\varphi]\big|_0^2.
\end{gathered}\tag{33}
$$

Выбирая $\varepsilon_1=\frac{1}{4}$, $\varepsilon_2=\frac{\beta_{12}}{4}$, $\varepsilon_3=\frac{\beta_{22}}{4}$, из (33) получаем

$$\begin{aligned}&\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left(\big|[y]\big|_0^2+\big|\big[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar x}\big]\big|_0^2\right)+\big|\big[y_{\bar x}^{(\sigma)}\big]\big|_0^2+\big|\big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y\big]\big|_0^2\\&\leqslant M_{14}\left(|[y^{\sigma}]|_0^2+\big|\big[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar x}^{\sigma}\big]\big|_0^2\right)+M_{15}\big(|[\varphi]|_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\big).\end{aligned}\tag{34}$$

Перепишем (34) в другой форме:

$$\begin{aligned}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left(\big|[y]\big|_0^2+\big|\big[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar x}\big]\big|_0^2\right)\leqslant M_{16}^{\sigma}\left(\big|[y^{j+1}]\big|_0^2+\big|\big[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar x}^{j+1}\big]\big|_0^2\right)\\+M_{17}^{\sigma}\left(\big|\big[y^{j}\big]\big|_0^2+\big|\big[\sqrt{a\varkappa}y_{\bar x}^{j}\big]\big|_0^2\right)+M_{18}\left(\big|[\varphi]\big|_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\right).\end{aligned}\tag{35}$$

На основании [13, лемма 7] из (35) получаем априорную оценку (24). ▷

Из (24) следуют единственность и устойчивость решения задачи (18)–(21) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(4), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (18)–(21). Для оценки точности разностной схемы (18)–(21) рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения (18)–(21), получаем задачу для функции z

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z=\varkappa_i\big(a_iz_{\bar x}^{(\sigma)}\big)_x+b_ia_iz_{\bar x,i}^{(\sigma)}+b_ia_{i+1}z_{x,i}^{(\sigma)}-d_i^j\big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big)+\Psi_i^j,\tag{36}$$

$$\varkappa_0a_1z_{x,0}^{(\sigma)}=\beta_{11}z_0^{(\sigma)}+0.5hd_0\big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big)+\tilde\beta_{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_0-\tilde\nu_1,\quad t\in\overline{\omega}_\tau,\tag{37}$$

$$-\varkappa_Na_Nz_{\bar x,N}^{(\sigma)}=\beta_{21}z_N^{(\sigma)}+0.5hd_N\big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\big)+\tilde\beta_{22}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_N-\tilde\nu_2,\quad t\in\overline{\omega}_\tau,\tag{38}$$

$$z(x,0)=0,\quad x\in\overline{\omega}_h,\tag{39}$$

где $\Psi=O(h^2+\tau^2)$, $\tilde\nu_1=O(h^2+\tau^2)$, $\tilde\nu_2=O(h^2+\tau^2)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1)–(4) разностной схемой (18)–(21) в классе решении $u=u(x,t)$ задачи (1)–(4).

Применяя априорную оценку (24) к решению задачи (36)–(39), получаем

$$\big|\big[z^{j+1}\big]\big|^2_{W_2^1(0,l)}\leqslant M\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\big|\big[\Psi^{j'}v\big]\big|_0^2+\nu_1^{j'2}+\nu_2^{j'2}\right),\tag{40}$$

где $M=\mathrm{const}>0$, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (40) следует сходимость решения разностной задачи (18)–(21) к решению дифференциальной задачи (1)–(4) в смысле нормы $|[z^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)}$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau\leqslant\tau_0$ справедлива оценка

$$\big|\big[y^{j+1}-u^{j+1}\big]\big|^2_{W_2^1(0,l)}\leqslant M\left(h^2+\tau^2\right).$$

Замечание. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда уравнение (1) имеет вид:

$$\partial^{\alpha}_{0t}u=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}-\sum_{s=1}^{p}q_s(x,t)u(x_s,t)+f(x,t),\quad 0<x<l,\ 0<t\leqslant T,$$

если потребовать выполнения условия $|q_s|\leqslant c_2$.

Таблица 1

Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах $|[\cdot]|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки при различных значениях $\alpha = 0.01, 0.5, 0.99$, $x_0 = 0.1, 0.5, 0.9$ на $t = 1$, когда $h = \tau$.

x_0	α	h	$\max\limits_{0<j<m} \left\|\left[z^j\right]\right\|_0$	ПС в $\|[\cdot]\|_0$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0.1	0.01	$\frac{1}{10}$	0.002461288		0.004945295	
		$\frac{1}{20}$	0.000709828	1.7939	0.001370038	1.8518
		$\frac{1}{40}$	0.000189682	1.9039	0.000358807	1.9329
		$\frac{1}{80}$	0.000048964	1.9538	0.000091710	1.9680
		$\frac{1}{160}$	0.000012434	1.9774	0.000023177	1.9844
	0.50	$\frac{1}{10}$	0.002410158		0.004896138	
		$\frac{1}{20}$	0.000695374	1.7933	0.001357438	1.8508
		$\frac{1}{40}$	0.000185902	1.9032	0.000355618	1.9325
		$\frac{1}{80}$	0.000048000	1.9534	0.000090909	1.9678
		$\frac{1}{160}$	0.000012191	1.9772	0.000022976	1.9843
	0.99	$\frac{1}{10}$	0.002348582		0.004835296	
		$\frac{1}{20}$	0.000677813	1.7928	0.001341856	1.8494
		$\frac{1}{40}$	0.000181299	1.9025	0.000351677	1.9319
		$\frac{1}{80}$	0.000046825	1.9530	0.000089918	1.9676
		$\frac{1}{160}$	0.000011895	1.9770	0.000022727	1.9842
0.5	0.01	$\frac{1}{10}$	0.005818396		0.011982345	
		$\frac{1}{20}$	0.001450348	2.0042	0.003006671	1.9947
		$\frac{1}{40}$	0.000358978	2.0144	0.000748225	2.0066
		$\frac{1}{80}$	0.000088729	2.0164	0.000185823	2.0095
		$\frac{1}{160}$	0.000021955	2.0149	0.000046162	2.0091
	0.50	$\frac{1}{10}$	0.005817273		0.011985970	
		$\frac{1}{20}$	0.001450169	2.0041	0.003007649	1.9946
		$\frac{1}{40}$	0.000358970	2.0143	0.000748501	2.0066
		$\frac{1}{80}$	0.000088736	2.0163	0.000185900	2.0095
		$\frac{1}{160}$	0.000021958	2.0148	0.000046184	2.0091
	0.99	$\frac{1}{10}$	0.005795148		0.011971269	
		$\frac{1}{20}$	0.001444472	2.0043	0.003003788	1.9947
		$\frac{1}{40}$	0.000357554	2.0143	0.000747532	2.0066
		$\frac{1}{80}$	0.000088388	2.0162	0.000185661	2.0095
		$\frac{1}{160}$	0.000021873	2.0147	0.000046125	2.0091
0.9	0.01	$\frac{1}{10}$	0.007597214		0.015083738	
		$\frac{1}{20}$	0.001892530	2.0052	0.003776815	1.9978
		$\frac{1}{40}$	0.000472130	2.0031	0.000943657	2.0008
		$\frac{1}{80}$	0.000117779	2.0031	0.000235615	2.0018
		$\frac{1}{160}$	0.000029375	2.0034	0.000058814	2.0022
	0.50	$\frac{1}{10}$	0.007645309		0.015135554	
		$\frac{1}{20}$	0.001904477	2.0052	0.003789580	1.9978
		$\frac{1}{40}$	0.000475108	2.0031	0.000946830	2.0009
		$\frac{1}{80}$	0.000118524	2.0031	0.000236407	2.0018
		$\frac{1}{160}$	0.000029562	2.0034	0.000059012	2.0022
	0.99	$\frac{1}{10}$	0.007667485		0.015167028	
		$\frac{1}{20}$	0.001909692	2.0054	0.003797057	1.9980
		$\frac{1}{40}$	0.000476377	2.0032	0.000948656	2.0009
		$\frac{1}{80}$	0.000118837	2.0031	0.000236860	2.0019
		$\frac{1}{160}$	0.000029640	2.0034	0.000059125	2.0022

Заключение

В данной работе исследуется нелокальная краевая задача в прямоугольной области для одномерного нагруженного уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной на границе теплоемкостью. Основной результат работы заключается в доказательстве априорных оценок для решения задачи как в дифференциальном, так и в разностном виде. Полученные неравенства означают устойчивость решения относительно входных данных. В силу линейности рассматриваемых задач эти неравенства позволяют утверждать сходимость приближенного решения к точному (в предположении существования последнего в классе достаточно гладких функций) со скоростью $O(h^2+\tau^2)$. Проведены численные эксперименты, иллюстрирующие полученные теоретические результаты.

Результаты численного эксперимента

Коэффициенты уравнения (1) подбираются следующим образом:

$$k(x,t)=e^x,\quad r(x,t)=(x-0.5)e^x,\quad q(x,t)=e^{x-t},$$

$$f(x,t)=e^x\,\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}-2t^3e^{2x+t}-(x-0.5)e^{2x+t}t^3+e^{x_0+x-t}t^3,\quad l=1,\ T=1.$$

$$\beta_{11}=0.5e^t,\quad \beta_{12}=e^t,\quad \beta_{21}=e^{l+t},\quad \beta_{22}=e^{l+t},$$

$$\mu_1=-0.5t^3e^t+e^t\,\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)},\quad \mu_2=2t^3e^{2l+t}+e^{2l+t}\,\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}.$$

Точным решением задачи (1)–(4) является функция

$$u(x,t)=t^3e^x.$$

В таблице 1 при различных значениях параметров $\alpha=0.01,0.5,0.99$, $x_0=0.1,0.5,0.9$ и уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности $(z=y-u)$ и порядок сходимости (ПС) в нормах $|[\,\cdot\,]|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar w_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar w_{h\tau})}=\max_{(x_i,t_j)\in\bar w_{h\tau}}|y|$, когда $h=\tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$. Порядок сходимости определяется по следующей формуле:

$$\text{ПС}=\log_{\frac{h_1}{h_2}}\frac{|[z_1]|_0}{|[z_2]|_0},$$

где z_i — это погрешность, соответствующая h_i.

Литература

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—616 с.
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1977.—735 с.
3. *Самарский А. А.* Об одной задаче распространения тепла: Избр. тр. А. А. Самарского.—М.: МАКС Пресс, 2003.—531 с.
4. *Нерпин С. В., Чудновский А. Ф.* Энерго- и массообмен в системе растение–почва–воздух.—Л.: Гидрометеоиздат, 1975.—358 с.
5. *Нигматуллин Р. Р.* Особенности релаксации системы с «остаточной» памятью // Физика твердого тела.—1985.—Т. 27, № 5.—С. 1583–1585.

6. *Тарасов В. Е.* Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка, М.–Ижевск: Ижев. ин-т компьютер. исслед., 2011.—568 с.
7. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит.—2003.—272 с.
8. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных.—Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008.—512 с.
9. *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature.—N. Y.: W. H. Freeman and Company, 1982.—460 p.
10. *Бегли Р. Л., Торвик П. Дж.* Дифференциальное исчисление, основанное на производных дробного порядка — новый подход к расчету конструкций с вязкоупругим демпфированием // Аэрокосмическая техника.—1984.—Т. 2, № 2.—С. 84–93.
11. *Алиханов А. А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Диф. уравнения.—2010.—Т. 46, № 5.—С. 658—664.
12. *Alikhanov A. A.* A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. Comput. Phys.—2015.—Vol. 280.—P. 424–438. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.09.031.
13. *Бештоков М. Х.* К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто // Изв. вузов. Математика.—2018.—№ 10.—С. 3–16.
14. *Бештоков М. Х.* Краевые задачи для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто // Диф. уравнения.—2019.—Т. 55, № 7.—С. 919–928. DOI: 10.1134/S0374064119070021.
15. *Бештоков М. Х., Водахова В. А.* Нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки.—2019.—Т. 29, № 4.—С. 459–482. DOI: 10.20537/vm190401.
16. *Бештоков М. Х., Эржибова Ф. А.* К краевым задачам для интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка // Мат. тр.—2020.—Т. 23, № 1.—С. 16–36. DOI: 10.33048/mattrudy.2020.23.102.
17. *Beshtokov M. Kh., Khudalov M. Z.* Difference methods of the solution of local and non-local boundary value problems for loaded equation of thermal conductivity of fractional order // Stability, Control and Differential Games.—2020. —P. 187–201.—(Lect. Notes Control Inform. Sci. — Proc.).—DOI: 10.1007/978-3-030-42831-0_17.
18. *Худалов М. З.* Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа // Владикавк. мат. журн.—2002.—Т. 4, № 4.—С. 59–64.
19. *Алиханов А. А., Березгов А. М., Шхануков-Лафишев М. Х.* Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.—2008.—Т. 48, № 9.—С. 1619–1628.

Статья поступила 10 июля 2020 г.

Бештоков Мурат Хамидбиевич
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов
РОССИЯ, 360000, Нальчик, Шортанова, 89 А
E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

Бештокова Зарьяна Владимировна
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
младший научный сотрудник отдела вычислительных методов
РОССИЯ, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: `zarabaeva@yandex.ru`

Худалов Марат Захарович
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры прикладной математики и информатики
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: `hmz@mail.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 45–57

FINITE-DIFFERENCE METHOD FOR SOLVING OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LOADED THERMAL CONDUCTIVITY EQUATION OF THE FRACTIONAL ORDER

Beshtokov, M. Kh.[1], Beshtokova, Z. V.[1] and Khudalov, M. Z.[2]

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova St., Nalchik 360000, Russia;
[2] North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
44–46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru, zarabaeva@yandex.ru, hmz@mail.ru

Abstract. We study a nonlocal boundary value problem in a rectangular area for a one-dimensional in a spatial variable of the loaded heat fractional conductivity equation with a heat capacity concentrated at the boundary. The problem is considered as a mathematical model, arising, in particular, in the practice of regulating the salt regime of soils with a fractal organization, when the lamination of the upper layer is achieved by drain layer of the water from the surface of an area flooded for some time. The main research method is the method of energy inequalities. An a priori estimate is obtained by the assumption of the existence of a regular solution to the differential problem, which implies the uniqueness and continuous dependence of the solution from the input data of the problem. A difference scheme of the second order of approximation by the grid parameters is put on a uniform grid by correspondence with the differential problem. Under the assumptions of the existence of a regular solution to the differential problem, an a priori estimate is obtained, which implies the uniqueness and continuous dependence of the solution on the right side and the initial data. By virtue of the linearity of the problem under consideration, the received inequality allows us to assert the convergence of the approximate solution to the exact one (assuming that the latter exists in the class of sufficiently smooth functions) with a rate equal to the order of the approximation error. The numerical experiments are carried out to illustrate the recieved theoretical results.

Key words: heat equation, fractional Caputo derivative, lumped heat capacity, difference schemes, stability, convergence.

Mathematical Subject Classification (2010): 65N06, 65N12.

For citation: *Beshtokov, M. Kh., Beshtokova, Z. V. and Khudalov, M. Z.* Finite-Difference Method for Solving of a Nonlocal Boundary Value Problem for a Loaded Thermal Conductivity Equation of the Fractional Order, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 45–57 (in Russian). DOI: 10.46698/p2286-5792-9411-x.

References

1. *Samarsky, A. A. Teoriya raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1983, 616 p. (in Russian).
2. *Tikhonov, A. N. and Samarsky, A. A. Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Moscow, Nauka, 1977, 735 p. (in Russian).
3. *Samarsky, A. A. Ob odnoy zadache rasprostraneniya tepla: Izbrannye trudy A. A. Samarskogo* [On One Problem of Heat Propagation: Selected Works A. A. Samarsky], Moscow, MAKS Press, 2003, 531 p. (in Russian).
4. *Nerpin, S. V. and Chudnovsky, A. F. Energo- i massoobmen v sisteme rastenie–pochva–vozdukh* [Energy- and mass transfer in a system plant–soil–air], Leningrad, Gidrometeoizdat, 1975, 358 p. (in Russian).
5. *Nigmatullin, P. P.* Features of Relaxation of a System with "Residual" Memory, *Fizika Tverdogo Tela* [Physics of the Solid State], 1985, vol. 27, no 5, pp. 1583–1585 (in Russian).
6. *Tarasov, V. E. Modeli teoreticheskoy fiziki s integro-differentsirovaniem drobnogo poryadka* [Models of Theoretical Physics with Fractional Order Integro-Differentiation], Moscow, Izhevsk, Izhevsk Institute for Computer Research, 2011, 568 p. (in Russian).

7. *Nakhushev, A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and its Application], Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 p. (in Russian).
8. *Uchaykin, V. V. Metod drobnykh proizvodnykh* [The Method of Fractional Derivatives], Ulyanovsk, Artichoke Publ., 2008, 512 p. (in Russian).
9. *Mandelbrot, B. B. The Fractal Geometry of Nature*, New York, W. H. Freeman and Company, 1982, 460 p.
10. *Begli, R. L. and Torvik, P. J.* Differential Calculus Based On Fractional Order Derivatives: A New Approach for Calculating Construction with Viscoelastic Damping, *Aerokosmicheskaya Tekhnika*, 1984, vol. 2, no 2, pp. 84–93 (in Russian).
11. *Alikhanov, A. A.* A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no 5, pp. 660–666. DOI: 10.1134/S0012266110050058.
12. *Alikhanov A. A.* A New Difference Scheme for the Time Fractional Diffusion Equation, *Journal of Computational Physics*, 2015, vol. 280, pp. 424–438. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.09.031.
13. *Beshtokov, M. Kh.* To Boundary Value Problems for Degenerating Pseudoparabolic Equations with Gerasimov–Caputo Fractional Derivative, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, pp. 1–14. DOI: 10.3103/S1066369X18100018.
14. *Beshtokov, M. Kh.* Boundary Value Problems for a Pseudoparabolic Equation with a Fractional Caputo Derivative, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no 7, pp. 884–893, DOI: 10.1134/S0012266119070024.
15. *Beshtokov, M. Kh. and Vodakhova, V. A.* Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Convection-Diffusion Equations, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, no 4, pp. 459–482 (in Russian). DOI: 10.20537/vm190401.
16. *Beshtokov, M. Kh. and Erzhibova, F. A.* On Boundary Value Problems For Integro-Differential Equations of Fractional Order, *Matematicheskie Trudy*, 2020, vol. 23, no 1, pp. 16–36 (in Russian). DOI: 10.33048/mattrudy.2020.23.102.
17. *Beshtokov, M. Kh. and Khudalov, M. Z.* Difference Methods of the Solution of Local and Non-Local Boundary Value Problems for Loaded Equation of Thermal Conductivity of Fractional Order, *Stability, Control and Differential Games*, Lecture Notes in Control and Information Sciences — Proceedings, 2020, pp. 187–201. DOI: 10.1007/978-3-030-42831-0_17.
18. *Khudalov, M. Z.* Nonlocal Boundary Value Problem for a Loaded Parabolic Equation, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2002, vol. 4, no. 4, pp. 59–64 (in Russian).
19. *Alikhanov, A. A., Berezgov, A. M. and Shkhanukov-Lafishev, M. X.* Boundary Value Problems for Certain Classes of Loaded Differential Equations and Solving them by Finite Difference Methods, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 9. pp. 1581–1590. DOI: 10.1134/S096554250809008X.

Received July 10, 2020

Murat Kh. Beshtokov
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova St., Nalchik 360000, Russia,
Leading Researcher Computational Methods Department
E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

Zaryana V. Beshtokova
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova St., Nalchik 360000, Russia,
Junior Researcher Computational Methods Department
E-mail: `zarabaeva@yandex.ru`

Marat Z. Khudalov
North Ossetian State University,
44–46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Associate Professor of the Department
of Applied Mathematics and Informatics
E-mail: `hmz@mail.ru`