Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 1, С. 77–87

УДК 517
DOI 10.46698/m8501-0316-5751-a

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С РАСТЯЖЕНИЕМ И ПОВОРОТОМ#

А. А. Товсултанов[1]

[1] Чеченский государственный университет,
Россия, 364024, Грозный, ул. А. Шерипова, 32

E-mail: `a.tovsultanov@mail.ru`

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача в ограниченной плоской области для функционально-дифференциального уравнения второго порядка, содержащего комбинацию растяжений и поворотов старших производных искомой функции. Найдены необходимые и достаточные условия в алгебраической форме выполнения неравенства типа Гординга, обеспечивающего однозначную (фредгольмову) разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра задачи Дирихле. В литературе в данной ситуации принят термин *сильно эллиптическое уравнение*. Вывод упомянутых условий, выражаемых непосредственно через коэффициенты уравнения, основан на комбинации преобразований Фурье и Гельфанда элементов коммутативной B^*-алгебры, порожденной операторами растяжения и поворота. Основной момент здесь — выяснение структуры пространства максимальных идеалов этой алгебры. Доказано, что пространство максимальных идеалов гомеоморфно прямому произведению спектров оператора растяжения (окружность) и оператора поворота (вся окружность в случае, когда угол поворота α несоизмерим с π, и конечный набор точек на окружности, когда α соизмерим с π). Такое различие между двумя случаями для α приводит к тому, что в зависимости от α условия однозначной разрешимости краевой задачи могут иметь существенно разный вид и, например, для α соизмеримого с π, могут зависеть не только от абсолютной величины, но и от знака коэффициента при слагаемом с поворотом.

Ключевые слова: эллиптическое функционально-дифференциальное уравнение, краевая задача.

Mathematical Subject Classification (2010): 35J15, 35J25, 39A13, 39A14.

Образец цитирования: *Товсултанов А. А.* Функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и поворотом // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 1.—С. 77–87. DOI: 10.46698/m8501-0316-5751-a.

1. Введение

Основы теории краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений были заложены в работах А. Л. Скубачевского [1–4]. Были найдены как необходимые, так и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга в алгебраической форме, исследованы спектральные свойства операторов и гладкость обобщенных решений краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений. В [2, 3] содержится также обширный обзор литературы и приложений к задачам физики, механики и теории управления.

[#] Работа выполнена в рамках государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611, по проекту «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи», и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-41-200001.

Систематическое изучение функциональных и функционально-дифференциальных уравнений, содержащих растяжение или сжатие аргумента искомой функции, началось в 1970-х годах после выхода статей [5, 6], посвященных уравнению пантографа. Уравнения подобного рода возникают также в астрофизике [7], биологии [8], теории чисел [9] и теории вероятностей [10]. Теория Фредгольма для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений со сжатием — отображением многообразия с краем строго внутрь себя, получила развитие в работе [11].

Данная работа является продолжением исследований по эллиптическим уравнениям со сжатиями и растяжениями [12–14] и по применяемому подходу близка к статье [14], в которой рассматривались уравнения с несоизмеримыми растяжениями. Отметим также статью [15], посвященную эллиптическому уравнению с растяжением и сдвигами.

Через $H^1(\Omega)$ обозначается пространство Соболева всех комплекснозначных функций $u(x)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, принадлежащих $L_2(\Omega)$ вместе с обобщенными производными первого порядка u_{x_1}, u_{x_2}, а через $\mathring{H}^1(\Omega)$ — замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $H^1(\Omega)$. Пространства $H^1(\Omega)$ и $\mathring{H}^1(\Omega)$ — гильбертовы со скалярными произведениями

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \left(u\bar{v} + \sum_{j=1}^2 u_{x_j}\bar{v}_{x_j} \right) dx, \quad (u,v)_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^2 u_{x_j}\bar{v}_{x_j}\, dx.$$

2. Алгебра функциональных операторов с растяжением и поворотом

Пусть заданы числа $p > 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Сопоставим этим числам унитарные операторы растяжения P и поворота R_α в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, действующие по формулам

$$Pu(x) = p^{-1}u\big(p^{-1}x\big) = p^{-1}u\big(p^{-1}x_1, p^{-1}x_2\big),$$

$$R_\alpha u(x) = u(x_\alpha) = u(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha, x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha).$$

Спектр $\sigma(P)$ оператора P есть вся единичная окружность (см., например, [12]).

Лемма 1. *Пусть число α соизмеримо с π, и n — наименьшее натуральное число такое, что $n\alpha$ кратно 2π. Тогда спектр $\sigma(R_\alpha)$ совпадает с множеством корней n-й степени из 1, $\sigma(R_\alpha) = \{e^{i2\pi k/n} : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$.*

$\lhd$ Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ уравнение $\lambda u - R_\alpha u = v$. Применяя к обеим частям этого уравнения оператор $R_\alpha^k = R_{k\alpha}$ для $k = 1, \ldots, n-1$ и учитывая $R_\alpha^n = I$, получим систему уравнений

$$\lambda u - R_\alpha u = v, \quad \lambda R_\alpha u - R_\alpha^2 u = R_\alpha v, \quad \ldots, \quad \lambda R_\alpha^{n-1} u - u = R_\alpha^{n-1} v.$$

Умножим первое уравнение на λ^{n-1}, второе на λ^{n-2} и т. д. (предпоследнее уравнение умножается на λ, а последнее на 1), после чего сложим получившиеся уравнения. Будем иметь

$$(\lambda^n - 1)u = \lambda^{n-1}v + \lambda^{n-2}R_\alpha v + \ldots + R_\alpha^{n-1}v,$$

что при $\lambda^n \neq 1$ равносильно соотношению

$$u = (\lambda^n - 1)^{-1}\left(\lambda^{n-1}v + \lambda^{n-2}R_\alpha v + \ldots + R_\alpha^{n-1}v\right).$$

Таким образом, любое число λ, отличное от корня n-й степени из 1, является резольвентной точкой оператора R_α, и резольвента имеет вид

$$(\lambda I - R_\alpha)^{-1} = (\lambda^n - 1)^{-1} \left(\lambda^{n-1} I + \lambda^{n-2} R_\alpha + \ldots + R_\alpha^{n-1}\right).$$

С другой стороны, зафиксировав $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, возьмем на плоскости кусочно постоянную функцию η_k, принимающую в угле $-j\alpha < \varphi < 2\pi/n - j\alpha$ значение $e^{i2\pi kj/n}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда для произвольной ненулевой «$2\pi/n$-периодической» функции $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$ ($u(r, \varphi + 2\pi/n) \equiv u(r, \varphi)$, (r, φ) — полярные координаты), функция $\eta_k u$ является собственной функцией оператора поворота R_α, отвечающей собственному значению $\lambda_k = e^{i2\pi k/n}$. $\triangleright$

Лемма 2. *Пусть число α несоизмеримо с π. Тогда $\sigma(R_\alpha)$ совпадает с единичной окружностью, $\sigma(R_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.*

$\triangleleft$ Пусть $|\lambda| = 1$. В условиях леммы все числа $j\alpha$ ($j \in \mathbb{Z}$) различны по модулю числа 2π. Следовательно, зафиксировав произвольное натуральное число n, мы можем взять такое число $\delta > 0$, что отрезки $[-\alpha, -\alpha + \delta]$, $[0, \delta]$, $[\alpha, \alpha + \delta]$, $\ldots$, $[(n-1)\alpha, (n-1)\alpha + \delta]$ по модулю 2π попарно не пересекаются. Зададим функцию $u_n \in L_2(\mathbb{R}^2)$, равной λ^j для $r \in (0, 1)$ и $\varphi \in (j\alpha, j\alpha + \delta)$, где $j = 0, 1, \ldots, n-1$, и нулю в остальных точках плоскости. Очевидно, $\|u_n\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = n\delta/2$. В то же время, функция $\lambda u_n - R_\alpha u_n$ отлична от нуля только в области $r \in (0, 1)$, $\varphi \in (-\alpha, -\alpha + \delta)$, где она равна -1, и в области $r \in (0, 1)$, $\varphi \in ((n-1)\alpha, (n-1)\alpha + \delta)$, где она равна λ^n, так что $\|\lambda u_n - R_\alpha u_n\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \delta$. Существование последовательности $u_n \in L_2(\mathbb{R}^2)$, для которой

$$\frac{\|u_n\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}}{\|\lambda u_n - R_\alpha u_n\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \to \infty, \quad n \to \infty,$$

означает, что при $|\lambda| = 1$ оператор $\lambda I - R_\alpha$ не имеет ограниченного обратного в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. $\triangleright$

Обозначим через $\mathfrak{A}_p$ и $\mathfrak{A}_\alpha$ коммутативные банаховы B^*-алгебры ограниченных операторов в $L_2(\mathbb{R}^2)$, порожденные оператором P и R_α, соответственно. При α несоизмеримом с π эти алгебры устроены одинаково, будучи изоморфными алгебре непрерывных функций на окружности. Так, в алгебре $\mathfrak{A}_\alpha$ плотны по операторной норме конечные суммы $\sum a_m R_\alpha^m$ ($a_m \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$). По теореме Гельфанда — Наймарка [16] $\mathfrak{A}_\alpha$ изометрически изоморфна алгебре $C(\Delta_\alpha)$ всех непрерывных комплекных функций на пространстве Δ_α максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}_\alpha$, причем отображение $\widehat{R_\alpha} : \Delta_\alpha \to \mathbb{C}$ (преобразование Гельфанда оператора R_α, $\widehat{R_\alpha}(h) = h(R_\alpha)$) осуществляет гомеоморфизм Δ_α на $\sigma(R_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Образом оператора $\sum a_m R_\alpha^m$ при упомянутом изоморфизме будет функция $\sum a_m \lambda^m$ на окружности.

Если же угол α соизмерим с π и n — наименьшее натуральное число такое, что $n\alpha$ кратно 2π, то всякий элемент алгебры $\mathfrak{A}_\alpha$ имеет вид $a_0 I + a_1 R_\alpha + \ldots + a_{n-1} R^{n-1}$ ($a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$), при этом для любого комплексного гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}_\alpha$ выполняется, очевидно, соотношение $(h(R_\alpha))^n = h(R_\alpha^n) = h(I) = 1$. Поэтому существует ровно n комплексных гомоморфизмов $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ алгебры $\mathfrak{A}_\alpha$, где $h_k(R_\alpha) = e^{i2\pi k/n}$, и пространство максимальных идеалов Δ_α отождествляется со спектром $\sigma(R_\alpha) = \{e^{i2\pi k/n} : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$. В рассматриваемом случае алгебра $\mathfrak{A}_\alpha$ изоморфна $\mathbb{C}^n$, и оператору $a_0 I + a_1 R_\alpha + \ldots + a_{n-1} R^{n-1}$ при изоморфизме отвечает вектор, k-я координата которого равна $a_0 + a_1 e^{i2\pi k/n} + \ldots + a_{n-1} e^{i2\pi k(n-1)/n}$.

Перейдем теперь к алгебре $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$, порожденной парой коммутирующих операторов P и R_α. Это коммутативная B^*-алгебра, полученная замыканием по операторной норме конечных сумм $\sum a_{mk}P^mR_\alpha^k$, если угол поворота α несоизмерим с π, и сумм $\sum a_{m0}P^m + \sum a_{m1}P^mR_\alpha + \ldots + \sum a_{m,n-1}P^mR_\alpha^{n-1}$, если угол поворота α соизмерим с π ($a_{mk} \in \mathbb{C}$, $m, k \in \mathbb{Z}$). Пусть $\Delta_{p,\alpha}$ — пространство максимальных идеалов этой алгебры. Мы покажем, что $\Delta_{p,\alpha} = \Delta_p \times \Delta_\alpha$. Таким образом, получается, что пространство максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ гомеоморфно либо двумерному тору $\mathbb{T}^2$, либо n экземплярам окружности, а сама алгебра $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ изометрически изоморфна либо алгебре непрерывных функций на торе, либо алгебре $\mathbb{C}^n$-значных функций на окружности.

Лемма 3. *Для норм операторов справедливы оценки снизу*

$$\Big\| \sum a_{mk}P^mR_\alpha^k \Big\| \geqslant \Big(\sum |a_{mk}|^2 \Big)^{1/2} \quad (\alpha \text{ несоизмерим с } \pi),$$

$$\Bigg\| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_m a_{mk}P^mR_\alpha^k \Bigg\| \geqslant \Bigg(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_m |a_{mk}|^2 \Bigg)^{1/2} \quad (\alpha \text{ соизмерим с } \pi).$$

$\lhd$ Предположим для определенности, что угол α несоизмерим с π. Зафиксируем на плоскости круг $B = B(x^0; \varepsilon)$ с центром в любой точке $x^0 \neq 0$ настолько малого радиуса ε, что все круги $B_{mk} = B(p^m x^0_{-k\alpha}; p^m\varepsilon)$ попарно непересекаются, когда индексы m и k пробегают присутствующие в рассматриваемом операторе значения. Это возможно, поскольку все точки $p^m x^0_{-\alpha}$ различны. Обозначим через $\chi_B(x)$ характеристическую функцию этого круга. Образом этой функции под действием оператора $\sum a_{mk}P^mR_\alpha^k$ будет простая функция $s(x)$, принимающая значения $a_{mk}p^{-m}$ в кругах B_{mk} и равная нулю вне этих кругов. Очевидно,

$$\|s\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \sum |a_{mk}|^2 p^{-2m} \mu(B_{mk}) = \mu(B) \sum |a_{mk}|^2,$$

в то время, как $\|\chi_B\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \mu(B)$. Из определения нормы оператора вытекает требуемая оценка.

Доказательство для случая, когда α соизмерим с π, полностью аналогично. $\rhd$

Теорема 1. *Пусть угол α несоизмерим с π. Тогда пространство максимальных идеалов $\Delta_{p,\alpha}$ алгебры $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ гомеоморфно тору $\mathbb{T}^2 = \{(\lambda, w) \in \mathbb{C}^2 : |\lambda| = |w| = 1\}$.*

$\lhd$ Убедимся вначале при помощи стандартных рассуждений, что $\Delta_{p,\alpha}$ гомеоморфно некоторому компактному подмножеству тора. Для этого рассмотрим заданное формулой $\phi(h) = (\widehat{P}(h), \widehat{R}_\alpha(h))$ отображение $\phi : \Delta_{p,\alpha} \to \mathbb{C}^2$. По определению преобразования Гельфанда и топологии $\Delta_{p,\alpha}$ это отображение непрерывно. Более того, множество значений каждой из координат в отдельности — единичная окружность. Действительно, когда комплексный гомоморфизм h пробегает все пространство $\Delta_{p,\alpha}$, числа $h(P)$ и $h(R_\alpha)$ пробегают спектры операторов P и R_α в алгебре $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$, а спектр элемента один и тот же во всех B^*-алгебрах, его содержащих [16].

Если предположить, что $\phi(h_1) = \phi(h_2)$, т. е. $h_1(P) = h_2(P)$ и $h_1(\mathbb{R}_\alpha) = h_2(\mathbb{R}_\alpha)$, то значения гомоморфизмов h_1 и h_2 будут совпадать на конечных суммах $\sum a_{mk}P^mR_\alpha^k$. В силу плотности последних в $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ получаем $h_1 = h_2$. Таким образом, отображение ϕ взаимно однозначно и, следовательно, является гомеоморфизмом $\Delta_{p,\alpha}$ на некоторый компакт $K \subset \mathbb{T}^2$ (любое непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства в хаусдорфово есть гомеоморфизм).

Перенося функции с $\Delta_{p,\alpha}$ на K при помощи отображения ϕ^{-1}, получаем на основании теоремы Гельфанда — Наймарка изометрический изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ на алгебру $C(K)$. При этом изоморфизме оператору $T(P, R_\alpha) = \sum a_{mk}P^mR_\alpha^k$ отвечает рассматриваемая на K функция $t(\lambda, w) = \sum a_{mk}\lambda^m w^k = \sum a_{mk}e^{i(m\theta + k\eta)}$ (воспользовались представлением $\lambda = e^{i\theta}$, $w = e^{i\eta}$, θ и η — вещественные параметры), а изометрия означает, что $\|T(P, R_\alpha)\| = \sup\{|t(\lambda, w)| : (\lambda, w) \in K\}$. Соединяя этот вывод с результатом леммы 3, приходим к оценке

$$\Big(\sum |a_{mk}|^2\Big)^{1/2} \leqslant \sup\Big\{\Big|\sum a_{mk}e^{i(m\theta+k\eta)}\Big| : \big(e^{i\theta}, e^{i\eta}\big) \in K\Big\}. \tag{4.1}$$

Эта оценка выражает следующее ключевое свойство компакта K: равномерная сходимость к нулю на множестве K любой последовательности тригонометрических полиномов от двух переменных обеспечивает ее сходимость к нулю в среднем квадратичном на всем торе $\mathbb{T}^2$. Такое возможно только при $K = \mathbb{T}^2$. Действительно, предположим, что множество $\mathbb{T}^2 \setminus K$ непусто. В силу того, что оно открыто, существует ненулевая функция $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, обращающаяся в ноль на K. Частичные суммы ряда Фурье этой функции есть тригонометрические полиномы, сходящиеся к f в $L_2(\mathbb{T}^2)$ и равномерно аппроксимирующие f, т. е. стремящиеся к нулю, на K. Получили противоречие с оценкой (4.1). $\rhd$

Теорема 2. *Пусть угол α соизмерим с π и n — наименьшее натуральное число такое, что $n\alpha$ кратно 2π. Тогда пространство максимальных идеалов $\Delta_{p,\alpha}$ алгебры $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ гомеоморфно дизъюнктному объединению n экземпляров окружности $\mathbb{S}$.*

$\lhd$ Аналогично доказательству теоремы 1 мы показываем при помощи отображения $\phi(h)$, что алгебра $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$ изометрически изоморфна алгебре $C(K)$ непрерывных функций на некотором компактном подмножестве K прямого произведения $\mathbb{S} \times \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, $w_k = e^{i2\pi k/n}$. Обозначим $K_k = \{\lambda \in \mathbb{S} : (\lambda, w_k) \in K\}$. Оператору

$$T(P, R_\alpha) = \sum a_{m0}P^m + \sum a_{m1}P^m R_\alpha + \ldots + \sum a_{m,n-1}P^m R_\alpha^{n-1}$$

теперь отвечает набор функций

$$\begin{gathered} t_k(\lambda) \equiv t(\lambda, w_k) = \sum a_{m0}\lambda^m + \sum a_{m1}\lambda^m w_k + \ldots + \sum a_{m,n-1}\lambda^m w_k^{n-1}, \\ \lambda \in K_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{gathered}$$

При этом справедливо равенство

$$\big\|T(P, R_\alpha)\big\| = \sup_k \sup\big\{|t_k(\lambda)| : \lambda \in K_k\big\}. \tag{4.2}$$

Зафиксируем индекс $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и положим $a_{m0} = a_m$, $a_{m1} = a_m w_j^{-1}$, $\ldots$, $a_{m,n-1} = a_m w_j^{1-n}$. Для оператора с такими коэффициентами имеем

$$t_k(\lambda) = \Big(1 + w_j^{-1}w_k + \ldots + \big(w_j^{-1}w_k\big)^{n-1}\Big)\sum a_m\lambda^m.$$

Если $k \neq j$, то

$$\begin{aligned} 1 + w_j^{-1}w_k + \ldots + \big(w_j^{-1}w_k\big)^{n-1} &= 1 + e^{i2\pi(k-j)/n} + \ldots + e^{i2\pi(k-j)(n-1)/n} \\ &= \big(e^{i2\pi(k-j)/n} - 1\big)^{-1}\big(e^{i2\pi(k-j)} - 1\big) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому супремум в правой части равенства (4.2) достигается при $k = j$ и равен $\sup\{|t_j(\lambda)| : \lambda \in K_j\}$. Комбинируя (4.2) с леммой 3, получаем

$$\Big(\sum |a_m|^2\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{n}\sup\Big\{\Big|\sum a_m e^{im\theta}\Big| : e^{i\theta} \in K_j \subset \mathbb{S}\Big\}.$$

Применяя те же рассуждения, что и в последнем абзаце доказательства теоремы 1, с заменой $\mathbb{T}^2$ на $\mathbb{S}$, выводим $K_j = \mathbb{S}$. Это справедливо для всех $j = 0, 1, \ldots, n-1$, откуда следует утверждение теоремы. $\rhd$

Из описанного выше изоморфизма вытекает следующий критерий положительной определенности операторов алгебры $\mathfrak{A}_{p,\alpha}$.

Следствие 1. *Оператор $T(P, R_\alpha) : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ положительно определен тогда и только тогда, когда $t(\lambda, w) > 0$ при всех $\lambda, w \in \mathbb{C}$ таких, что $|\lambda| = |w| = 1$, в случае угла α несоизмеримого с π, и $t_k(\lambda) = t(\lambda, w_k) > 0$ при $|\lambda| = 1$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$ в случае, если угол α соизмерим с π.*

Пример 1. Запишем условия положительной определенности в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ эрмитовой части оператора

$$u(x) \mapsto u(x) + au\big(p^{-1}x\big) + bu(x_\alpha), \quad a, b \in \mathbb{C}. \tag{4.3}$$

Если α несоизмерим с π, то символом оператора $I + apP + bR_\alpha$ будет выражение $1 + ap\lambda + bw$, в котором λ и w независимо пробегают единичные окружности. В этом случае мы требуем положительности выражения $\operatorname{Re}\big(1 + p|a|e^{i(\theta + \arg a)} + |b|e^{i(\eta + \arg b)}\big)$ для всех $\theta, \eta \in \mathbb{R}$, что, очевидно, равносильно условию $p|a| + |b| < 1$.

Если же угол α соизмерим с π, то положительная определенность оператора (4.3) равносильна неравенствам

$$1 + p|a|\cos(\theta + \arg a) + \operatorname{Re}(bw_k) = 1 + p|a|\cos(\theta + \arg a) + |b|\cos(\arg b + 2\pi k/n) > 0,$$
$$\theta \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

или

$$p|a| - |b|\cos(\arg b + 2\pi k/n) < 1 \quad \text{для всех} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Пусть, например, $\alpha = \pi$, тогда записанное через коэффициенты условие положительной определенности выглядит так: $p|a| + |\operatorname{Re} b| < 1$.

Пусть $\alpha = 2\pi/3$. Если $b > 0$, то условие принимает вид $p|a| + b/2 < 1$, а если $b < 0$, то $p|a| + |b| < 1$.

Пример 2. Для проверки положительной определенности эрмитовой части оператора $u(x) \mapsto u(x) + au(p^{-1}x_\alpha)$ (оператора $I + paPR_\alpha$) следует рассмотреть неравенство

$$1 + p|a|\cos(\theta + \eta + \arg a) > 0, \quad \theta, \eta \in \mathbb{R},$$

либо неравенства

$$1 + p|a|\cos(\theta + 2\pi k/n + \arg a) > 0, \quad \theta \in \mathbb{R}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Условия на коэффициент в обоих случаях получаются одинаковыми: $p|a| < 1$.

Отметим, что спектральные свойства оператора $T(P, R_\alpha)$ одни и те же для всех значений α несоизмеримых с π. В противном случае, как мы видим, это не так. В этом состоит принципиальное отличие между двумя рассматриваемыми случаями.

3. Разрешимость краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область. Определим оператор $T(P, R_\alpha)$ на функциях из $L_2(\Omega)$ следующим образом: вначале функция $u \in L_2(\Omega)$ продолжается нулем в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, затем к этому продолжению применяется действующий в $L_2(\mathbb{R}^2)$ оператор $T(P, R_\alpha)$, а после результат действия оператора сужается на Ω. Понятно, что в этом случае мы также имеем ограниченный линейный оператор $T(P,R_\alpha) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, причем из положительной определенности оператора $T(P,R_\alpha)$ в $L_2(\mathbb{R}^2)$ следует, очевидно, его положительная определенность в $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} \mu u + \sum_{j=1}^{2} \big(T(P,R_\alpha)u_{x_j}\big)_{x_j} = f(x), \quad x \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Здесь $\mu \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $f \in L_2(\Omega)$.

Обобщенным решением задачи (4.4) назовем функцию $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющую при всех $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\mu(u,v)_{L_2(\Omega)} - \sum_{j=1}^{2} \big(T(P,R_\alpha)u_{x_j}, v_{x_j}\big)_{L_2(\Omega)} = (f,v)_{L_2(\Omega)}.$$

Наряду с оператором $T(P,R_\alpha)$ с коэффициентами a_{mk} будем рассматривать аналогичный оператор $\widetilde{T}(P,R_\alpha)$, коэффициенты которого равны $a_{mk}\cos k\alpha$.

Теорема 3. *Для всякой ограниченной области Ω, содержащей начало координат, условие*

$$\operatorname{Re}\tilde{t}(\lambda,w) > 0, \quad |\lambda| = |w| = 1 \quad (\alpha \text{ несоизмерим с } \pi),$$

либо

$$\operatorname{Re}\tilde{t}(\lambda,w_k) > 0, \quad |\lambda| = 1,\ k = 0,1,\dots,n-1 \quad (\alpha \text{ соизмерим с } \pi),$$

является необходимым и достаточным для существования постоянных $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ таких, что при всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено неравенство (типа Гординга)

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} \big(T(P,R_\alpha)u_{x_j}, u_{x_j}\big)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{4.5}$$

$\lhd$ Прежде всего отметим, что в рассматриваемом случае неравенство (4.5) на классе $C_0^\infty(\Omega)$ равносильно оценке

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} \big(T(P,R_\alpha)u_{x_j}, u_{x_j}\big)_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geqslant c_1\big\||\nabla u|\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} \tag{4.6}$$

на всем классе $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. В этом легко убедиться, сделав в интегралах замену переменных $y = \tau x$, $\tau > 1$:

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} \big(T(P,R_\alpha)v_{y_j}, v_{y_j}\big)_{L_2(\tau\Omega)} \geqslant c_1\big\||\nabla v|\big\|^2_{L_2(\tau\Omega)} - (c_2 - c_1)\tau^{-2}\|v\|^2_{L_2(\tau\Omega)}, \quad v \in C_0^\infty(\tau\Omega).$$

Поскольку Ω содержит начало координат, получаем оценку (4.6) для любой функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Воспользовавшись теоремой Планшереля, перейдем в (4.6) к преобразованию Фурье $\tilde{u}(\xi)$. Заметим, что в образах Фурье оператору P отвечает сопряженный оператор $P^* = P^{-1}$, а оператор R_α переходит в R_α. Таким образом будем иметь

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \xi_j\,\overline{\tilde{u}(\xi)}\,T(P^*,R_\alpha)\big[\xi_j\tilde{u}(\xi)\big]\,d\xi \geqslant c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\xi|^2\,\big|\tilde{u}(\xi)\big|^2\,d\xi$$

или

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-1}\,\xi_j\,\overline{v(\xi)}\,T(P^*,R_\alpha)\big[|\xi|^{-1}\xi_j v(\xi)\big]\,d\xi \geqslant c_1\|v\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}, \tag{4.7}$$

где $v(\xi)$ обозначает $|\xi|\tilde{u}(\xi)$. Поскольку

$$\frac{\xi_1}{|\xi|}\,\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k\left[\frac{\xi_1}{|\xi|}\,v(\xi)\right] = \frac{\xi_1^2\cos k\alpha - \xi_1\xi_2\sin k\alpha}{|\xi|^2}\,\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k v(\xi),$$

$$\frac{\xi_2}{|\xi|}\,\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k\left[\frac{\xi_2}{|\xi|}\,v(\xi)\right] = \frac{\xi_1\xi_2\sin k\alpha + \xi_2^2\cos k\alpha}{|\xi|^2}\,\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k v(\xi)$$

и, следовательно,

$$\frac{\xi_1}{|\xi|}\,\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k\left[\frac{\xi_1}{|\xi|}\,v(\xi)\right] + \frac{\xi_2}{|\xi|}\,\overline{v(\xi)}\,P^{*m}R_\alpha^k\left[\frac{\xi_2}{|\xi|}\,v(\xi)\right] = \overline{v(\xi)}\cos k\alpha\,P^{*m}R_\alpha^k v(\xi),$$

стоящее под интегралом в левой части (4.7) выражение есть $\overline{v(\xi)}\,\widetilde{T}(P^*,R_\alpha)v(\xi)$, а само неравенство (4.7) принимает вид

$$\operatorname{Re}\big(\widetilde{T}(P^*,R_\alpha)v,v\big)_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geqslant c_1\|v\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}. \tag{4.8}$$

Заметим, что множество участвующих в полученном неравенстве функций v является всюду плотным в $L_2(\mathbb{R}^2)$, когда u пробегает все пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Действительно, в $L_2(\mathbb{R}^2)$ плотны функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ с компактным носителем, не пересекающимся с началом координат. С другой стороны, функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ плотны в $H^1(\mathbb{R}^2)$. Поэтому последовательностью $\tilde{u}_m$ образов Фурье гладких финитных функций по теореме Планшереля можно аппроксимировать любую функцию вида $\psi = \varphi/|\xi|$ в следующем смысле:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\big(1+|\xi|^2\big)\big|\tilde{u}_m-\psi\big|^2\,d\xi \to 0, \quad m\to\infty.$$

Получаем, таким образом, что

$$\int_{\mathbb{R}^2}\big||\xi|\,\tilde{u}_m-\varphi\big|^2\,d\xi \to 0, \quad m\to\infty.$$

Теперь можно сказать, что неравенство (4.8), а значит, и исходное неравенство (4.5), есть условие положительной определенности в $L_2(\mathbb{R}^2)$ эрмитовой части оператора $\widetilde{T}(P^*,R_\alpha)$. С учетом следствия 1 последнее эквивалентно либо алгебраическому неравенству $\operatorname{Re}\tilde{t}(\bar\lambda,w)>0$ при $|\lambda|=|w|=1$, либо $\operatorname{Re}\tilde{t}(\bar\lambda,w_k)>0$ при $|\lambda|=1$, $k=0,1,\dots,n-1$. Понятно, что $\bar\lambda$ здесь можно заменить на λ. Неравенство (4.5) выполняется с постоянными $c_2=0$ и $c_1=\min\operatorname{Re}\tilde{t}(\lambda,w)$ $(c_1=\min\operatorname{Re}\tilde{t}(\lambda,w_k))$. $\triangleright$

Следствие 2. *Пусть ограниченная область Ω содержит начало координат и выполнено условие*

$$\operatorname{Re}\tilde{t}(\lambda,w)>0, \quad |\lambda|=|w|=1 \quad (\alpha \text{ несоизмерим с } \pi),$$

либо

$$\operatorname{Re}\tilde{t}(\lambda,w_k)>0, \quad |\lambda|=1,\ k=0,1,\dots,n-1 \quad (\alpha \text{ соизмерим с } \pi).$$

Тогда спектр краевой задачи (4.4) состоит из изолированных собственных значений конечной кратности и располагается в правой полуплоскости: $\operatorname{Re}\mu>0$. В частности, при

$\mu = 0$ *краевая задача* (4.4) *имеет единственное обобщенное решение для всех функций* $f \in L_2(\Omega)$. *При любом* $\mu \in \mathbb{C}$ *задача* (4.4) *фредгольмова.*

Доказательство основано на неравенстве (4.5) и проводится стандартными методами функционального анализа (см., например, [2, 3, 12]). В примерах ниже считаем, что $0 \in \Omega$.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{j=1}^{2}\left(u_{x_j}(x) + au_{x_j}\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\right) + bu_{x_j}\left(-\frac{x_1+\sqrt{3}x_2}{2}, \frac{\sqrt{3}x_1 - x_2}{2}\right)\right)_{x_j} = f(x), \quad x \in \Omega,$$

в котором $\alpha = 2\pi/3$. Пусть $b \in \mathbb{R}$. Комбинируя пример 1 с теоремой 3, получаем существование и единственность обобщенного решения задачи Дирихле для данного уравнения при условии $p|a| - b/4 < 1$, если $b < 0$, и при условии $p|a| + b/2 < 1$, если $b > 0$.

Пример 4. Для уравнения

$$-\sum_{j=1}^{2}\left(u_{x_j}(x) + au_{x_j}\left(p^{-1}(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha),\, p^{-1}(x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha)\right)\right)_{x_j} = f(x), \quad x \in \Omega,$$

имеем

$$T(P, R_\alpha) = I + paPR_\alpha, \quad \widetilde{T}(P, R_\alpha) = I + pa\cos\alpha PR_\alpha.$$

Каков бы ни был угол α, если $p|a\cos\alpha| < 1$, то задача Дирихле имеет единственное обобщенное решение при всех $f \in L_2(\Omega)$.

Литература

1. *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations // J. Differ. Equt.—1986.—Vol. 63, № 3.—P. 332–361. DOI: 10.1016/0022-0396(86)90060-4.
2. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional-Differential Equations and Applications.—Basel: Birkhäuser Verlag, 1997.—(Oper. Theory Adv. Appl. Vol. 91). DOI: 10.1007/978-3-0348-9033-5.
3. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи мат. наук.—2016.—Т. 71, № 5.—С. 3–112. DOI: 10.4213/rm9739.
4. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells // Math. Model. Nat. Phenom.—2017.—Vol. 12, № 6.— P. 192–207. DOI: 10.1051/mmnp/2017072.
5. *Kate T., McLeod J. B.* Functional differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$ // Bull. Amer. Math. Soc.—1971.—Vol. 77, № 6.—P. 891–937. DOI: 10.1090/S0002-9904-1971-12805-7.
6. *Ockendon J. R., Tayler A. B.* The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proc. Royal Soc. London A. Math. Phys. Sci.—1971.—Vol. 322, № 1551.—P. 447–468. DOI: 10.1098/rspa.1971.0078.
7. *Амбарцумян В. А.* К теории флуктуаций яркости в млечном пути // Докл. АН СССР.—1944.—Т. 44, № 6.—С. 244–247.
8. *Hall A. J., Wake G. C.* A functional differential equation arising in the modeling of cell growth // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. Appl. Math.—1989.—Vol. 30, № 4.—P. 424–435. DOI: 10.1017/S0334270000006366.
9. *Mahler K.* On a special functional equation // J. London Math. Soc.—1940.—Vol. 15, № 2.—P. 115–123. DOI: 10.1112/jlms/s1-15.2.115.
10. *Gaver D. P.* An absorption probability problem // J. Math. Anal. Appl.—1964.—Vol. 9, № 3.—P. 384–393. DOI: 10.1016/0022-247X(64)90024-1.
11. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Эллиптические задачи с растяжениями-сжатиями на многообразиях с краем // Диф. уравнения.—2016.—Т. 52, № 10.—С. 1383–1392. DOI: 10.1134/S0374064116100113.
12. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // Соврем. Математика. Фундам. науки.—2014.—Т. 54.—С. 3–138.

13. *Россовский Л. Е., Тасевич А. Л.* Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями // Мат. заметки.—2015.—Т. 97, № 5.—С. 733–748. DOI: 10.4213/mzm10654.
14. *Rossovskii L. E.* Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions // Math. Model. Nat. Phenom.—2017.—Vol. 12, № 6.—P. 226–239. DOI: 10.1051/mmnp/2017075.
15. *Rossovskii L. E., Tovsultanov A. A.* Elliptic functional differential equations with affine transformations // J. Math. Anal. Appl.—2019.—Vol. 480, № 2.—123403. DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.123403.
16. *Рудин У.* Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.

Статья поступила 22 ноября 2020 г.

Товсултанов Абубакар Алхазурович
Чеченский государственный университет,
старший преподаватель кафедры математического анализа, алгебры и геометрии
РОССИЯ, 364024, Грозный, ул. А. Шерипова, 32
E-mail: a.tovsultanov@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 1, P. 77–87

FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH DILATED AND ROTATED ARGUMENT

Tovsultanov, A. A.[1]
[1]Chechen State University,
32 Sheripova St., Grozny 364024, Russia
E-mail: a.tovsultanov@mail.ru

Abstract. A boundary value problem in a plane bounded domain for a second-order functional differential equation containing a combination of dilations and rotations of the argument in the leading part is considered. Necessary and sufficient conditions are found in the algebraic form for the fulfillment of the Gårding-type inequality, which ensures the unique (Fredholm) solvability and discreteness and sectorial structure of the spectrum of the Dirichlet problem. The term *strongly elliptic equation* is customary in this situation in literature. The derivation of the above conditions expressed directly through the coefficients of the equation, is based on a combination of the Fourier and Gel'fand transforms of elements of the commutative B^*-algebra generated by the dilatation and rotation operators. The main point here is to clarify the structure of the space of maximal ideals of this algebra. It is proved that the space of maximal ideals is homeomorphic to the direct product of the spectra of the dilatation operator (the circle) and the rotation operator (the whole circle if the rotation angle α is incommensurable with π, and a finite set of points on the circle if α is commensurable with π). Such a difference between the two cases for α leads to the fact that, depending on α, the conditions for the unique solvability of the boundary value problem may have significantly different forms and, for example, for α commensurable with π, may depend not only on the absolute value, but also on the sign of the coefficient at the term with rotation.

Key words: elliptic functional differential equation, boundary value problem.

Mathematical Subject Classification (2010): 35J15, 35J25, 39A13, 39A14.

For citation: *Tovsultanov, A. A.* Functional Differential Equation with Dilated and Rotated Argument, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 1, pp. 77–87 (in Russian). DOI: 10.46698/m8501-0316-5751-a.

References

1. *Skubachevskii, A. L.* The First Boundary Value Problem for Strongly Elliptic Differential-Difference Equations, *Journal of Differential Equations*, 1986, vol. 63, pp. 332–361. DOI: 10.1016/0022-0396(86)90060-4.
2. *Skubachevskii, A. L. Elliptic Functional-Differential Equations and Applications*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 91, Basel, Birkhäuser Verlag, 1997. DOI: 10.1007/978-3-0348-9033-5.

3. *Skubachevskii, A. L.* Boundary-Value Problems for Elliptic Functional-Differential Equations and their Applications, *Russian Mathematical Surveys*, 2016, vol. 71, no. 5, pp. 801–906. DOI: 10.1070/RM9739.
4. *Onanov, G. G. and Skubachevskii, A. L.* Nonlocal Problems in the Mechanics of Three-Layer Shells, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2017, vol. 12, no. 6, pp. 192–207. DOI: 10.1051/mmnp/2017072.
5. *Kate, T. and McLeod, J. B.* Functional Differential Equation $\dot{y} = ay(\lambda t)+by(t)$, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1971, vol. 77, no. 6, pp. 891–937. DOI: 10.1090/S0002-9904-1971-12805-7.
6. *Ockendon, J. R. and Tayler A. B.* The Dynamics of a Current Collection System for an Electric Locomotive, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 1971, vol. 322, no. 1551, pp. 447–468. DOI: 10.1098/rspa.1971.0078.
7. *Ambartsumyan, V. A.* On the Theory of Brightness Fluctuations in the Milky Way, *Dokly Akademii Nauk SSSR*, 1944, vol. 44, no. 6, pp. 223–226 (in Russian).
8. *Hall, A. J. and Wake, G. C.* A Functional Differential Equation Arising in the Modeling of Cell Growth, *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, 1989, vol. 30, no. 4, pp. 424–435. DOI: 10.1017/S0334270000006366.
9. *Mahler, K.* On a Special Functional Equation, *Journal of the London Mathematical Society*, 1940, vol. 15, no. 2, pp. 115–123. DOI: 10.1112/jlms/s1-15.2.115.
10. *Gaver, D. P.* An Absorption Probability Problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1964, vol. 9, no. 3, pp. 384–393. DOI: 10.1016/0022-247X(64)90024-1.
11. *Savin, A. Yu. and Sternin, B. Yu.* Elliptic Dilation-Contraction Problems on Manifolds with Boundary. C^*-Theory, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 10, pp. 1331–1340. DOI: 10.1134/S0012266116100098.
12. *Rossovskii, L. E.* Elliptic Functional Differential Equations with Contractions and Extensions of Independent Variables of the Unknown Function *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 223, no. 4, pp. 351–493. DOI: 10.1007/s10958-017-3360-1.
13. *Rossovskii, L. E. and Tasevich, A. L.* The First Boundary-Value Problem for Strongly Elliptic Functional-Differential Equations with Orthotropic Contractions, *Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, no. 5–6, pp. 745–758. DOI: 10.1134/S0001434615050090.
14. *Rossovskii, L. E.* Elliptic Functional Differential Equations with Incommensurable Contractions, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2017, vol. 12, no. 6, pp. 226–239. DOI: 10.1051/mmnp/2017075.
15. *Rossovskii, L. E. and Tovsultanov, A. A.* Elliptic Functional Differential Equations with Affine Transformations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, vol. 480, no. 2, pp. 123403. DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.123403.
16. *Rudin, W. Functional Analysis*, New York–Düsseldorf–Johannesburg, McGraw-Hill Book Co., 1973.

Received November 22, 2020

Abubakar A. Tovsultanov
Chechen State University,
32 Sheripova St., Grozny 364024, Russia,
Senior Lecturer
E-mail: `a.tovsultanov@mail.ru`