Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vmj.ru**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 19, выпуск 3 июль–сентябрь, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Владикавказ
2017

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 3–10

УДК **517.98**

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА БЛУМА — ХАНСОНА В БАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А. Н. Азизов, В. И. Чилин

Хорошо известно, что линейное сжатие T в гильбертовом пространстве обладает так называемым свойством Блума — Хансона: слабая сходимость степеней T^n эквивалентна сильной сходимости средних Чезаро $\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} T^{k_n}$ для любой строго возрастающей последовательности натуральных чисел $\{k_n\}$. Аналогичное свойство верно и для линейных сжатий в l_p-пространствах $(1 \leqslant p < \infty)$, для линейных сжатий в L^1 или для положительных линейных сжатий в L^p-пространствах $(1 < p < \infty)$. Мы доказываем, что это свойство Блума — Хансона справедливо и для любых линейных сжатий в сепарабельных p-выпуклых банаховых решетках последовательностей.

Ключевые слова: банахова идеальная решетка, p-выпуклость, линейное сжатие, эргодическая теорема.

1. Введение

Хорошо известно, что для любого линейного сжатия T в рефлексивном банаховом пространстве X средние Чезаро $A_n(T) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k$ сходятся в X в сильной операторной топологии (см., например, [8, гл. 8, § 5]). В частности, для любого сохраняющего меру отображения $\tau : (\Omega, \mathscr{F}, \mu) \to (\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, где $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ — измеримое пространство с полной σ-конечной мерой μ, средние Чезаро $A_n(T)$ сходятся сильно в $L_p := L_p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, $1 < p < \infty$ (здесь $(Tf)(\omega) = f(\tau(\omega))$. В случае, когда μ — вероятностная мера и τ — перемешивающее преобразование, эргодическая теорема Блума — Хансона [6] утверждает, что для любого $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, имеет место сходимость

$$\left\| \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} (T^{k_j} f)(\omega) - \int\limits_{\Omega} f \, d\mu \right\|_p \to 0$$

для всех строго возрастающих последовательностей $k_0 < k_1 < \ldots$ натуральных чисел. В частности, отсюда следует, что последовательность $\{T^n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится слабо в L_p для всех $f \in L_p$ [10, гл. 8, утверждение 1.2].

В связи с этим, естественно, возникает задача о выделении класса банаховых пространств X, в которых слабая сходимость последовательности $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ при действии линейного сжатия T в X влечет сильную сходимость средних Чезаро $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}$ для каждой подпоследовательности $\{T^{k_j}\}_{j=0}^{\infty}$ последовательности $\{T^n\}_{n=0}^{\infty}$.

Обозначим через $\mathscr{C}(X)$ множество всех линейных сжатий в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$, а через $\mathfrak{N}$ — множество всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел. Говорят, что банахово пространство X имеет свойство Блума — Хансона относительно подмножества $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}(X)$, если для любых $T \in \mathscr{A}$, $x \in X$, либо последовательность $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ не сходится слабо, либо слабая сходимость этой последовательности к элементу $x_0 \in X$ влечет сходимость $\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\right\|_X \to 0$.

Следует отметить, что согласно [10, гл. 8, утверждение 1.2] условие

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\right\|_X \to 0 \qquad \left(\forall\, \{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N},\ x_0 \in X\right)$$

всегда влечет слабую сходимость последовательности $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. При этом с помощью аргументов из доказательства импликации (ii) $\to$ (i) в теореме 1.1 работы [1], устанавливается, что слабым пределом последовательности $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ обязательно является элемент x_0.

Говорят, что банахово пространство X имеет условное свойство Блума — Хансона относительно подмножества $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}(X)$, если для любого $T \in \mathscr{A}$ слабая сходимость последовательности $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ при всех $x \in X$ имеет место тогда и только тогда, когда последовательность $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)$ сходится по норме в X для каждого $x \in X$. Ясно, что свойство Блума — Хансона относительно $\mathscr{A}$, вообще говоря, сильнее условного свойства Блума — Хансона относительно $\mathscr{A}$.

Для гильбертова пространства H свойство Блума — Хансона относительно $\mathscr{C}(H)$ независимо получено в работах [1, 12, 14]. Кроме того, в [1] установлено условное свойство Блума — Хансона для пространства L_1 относительно $\mathscr{C}(L_1)$, а в работе [3] — для пространств L_p, $1 < p < \infty$, относительно множества $\mathscr{A}$ всех положительных линейных сжатий в L_p. В то же время, в работе [2] приведены примеры банаховых пространств X, которые не обладают свойством Блума — Хансона относительно $\mathscr{C}(X)$.

В работе [4] доказано, что для любого положительного линейного сжатия T пространства L_p, $1 < p < \infty$, $0 \leqslant f \in L_p$, слабая сходимость последовательности $\{T^n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ влечет сходимость

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(f) - f_0\right\|_{L_p} \to 0 \qquad \left(\forall\, \{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N},\ f_0 \in L_p\right).$$

Аналогичное свойство положительных линейных сжатий в функциональных пространствах Орлича с равномерно гладкой нормой Орлича получено в [16].

Наличие свойства Блума — Хансона в пространствах L_p, $1 \leqslant p < \infty$, относительно $\mathscr{C}(L_p)$ в случае произвольных пространств с мерой до сих пор не установлено. Известен только следующий результат В. Мюллера и Ю. Тамилова [17, теорема 2.5].

Теорема 1.1. *Пусть T — линейное сжатие на банаховом пространстве последовательностей l_p, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда для любого элемента $x \in l_p$ последовательность $\{T^n(x)\}$ слабо сходится к $x_0 \in l_p$ в том и только в том случае, когда $\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\right\|_p \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.*

Отметим также недавнюю работу [11], где с помощью свойства асимптотической гладкости выделяется класс действительных симметричных пространств последовательностей, для которых сохраняется вариант теоремы 1.1.

Основная цель настоящей работы состоит в получении эргодической теоремы Блума — Хансона (варианта теоремы 1.1) для действительных (комплексных) p-выпуклых сепарабельных идеальных банаховых решеток последовательностей). Доказательство этой теоремы существенно использует свойство p-выпуклости, что отличает наш подход от методов работы [11].

2. Предварительные сведения

Пусть $s(\mathbb{K})$ — линейное пространство всех последовательностей комплексных ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) или действительных ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) чисел, E — бесконечномерное идеальное линейное подпространство в $s(\mathbb{K})$ (свойство идеальности для E означает, что из условий $x \in E$, $y \in s(\mathbb{K})$ и $|y| \leqslant |x|$ следует включение $y \in E$).

Носителем элемента $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$ называют подмножество $\operatorname{supp} x = \{n \in \mathbb{N} : \xi_n \neq 0\}$ во множестве $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел. Поскольку $\dim E = \infty$, то $\operatorname{supp} E = \bigcup_{x \in E} \operatorname{supp} x$ есть бесконечное подмножество в $\mathbb{N}$, и поэтому, заменяя $\mathbb{N}$ на $\operatorname{supp} E$, можно считать, что $\operatorname{supp} E = \mathbb{N}$.

Обозначим через c_{00} линейное подпространство в $s(\mathbb{K})$, состоящее из финитных последовательностей вида $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n(x)}, 0, 0, \ldots\}$. Из равенства $\operatorname{supp} E = \mathbb{N}$ следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, что $\lambda = |\xi_k| \neq 0$. Поэтому для орта $e_k = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$, где единица стоит на k-ом месте, верно неравенство $e_k \leqslant \frac{1}{\lambda}|x| \in E$, что влечет включение $e_k \in E$. Это означает, что $c_{00} \subset E$.

Пусть $\|\cdot\|_E$ — банахова монотонная норма на E. Последнее означает, что из условий $x, y \in E$ и $|x| \leqslant |y|$ следует, что $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$. В этом случае пару $(E, \|\cdot\|_E)$ называют *банаховым идеальным пространством* (БИП) в $s(\mathbb{K})$ [9, гл. 4, § 3]. При этом в силу равенства $\operatorname{supp} E = \mathbb{N}$, БИП $(E, \|\cdot\|_E)$ является фундаментальным идеальным пространством [9, гл. 4, § 3].

Говорят, что БИП $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет порядково непрерывную норму, если из условий

$$0 \leqslant x^{(n)} \downarrow 0, \quad x^{(n)} \in E, \ n \in \mathbb{N},$$

следует, что $\|x^{(n)}\|_E \to 0$. Известно [9, гл. 4, § 3, теорема 3], что идеальное банахово фундаментальное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ в $s(\mathbb{K})$ сепарабельно тогда и только тогда, когда норма $\|\cdot\|_E$ порядково непрерывна.

Банахова решетка $(E, \|\cdot\|_E)$ называется *p-выпуклой* ($1 \leqslant p < \infty$), если существует такая константа $M > 0$, что для любого конечного набора элементов $\{x_i\}_{i=1}^n \subset E$ верно следующее неравенство:

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_E \leqslant M \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Наименьшая среди таких констант M называется константой p-выпуклости пространства E и обозначается через $M^{(p)}(E)$.

Каждая банахова решетка E является 1-выпуклой, при этом $M^{(1)}(E) = 1$. Кроме того, p-выпуклая банахова решетка всегда удовлетворяет верхней p-оценке, т. е. существует такая константа $M > 0$, что для любого конечного набора попарно дизъюнктных элементов $\{x_i\}_{n=1}^n \subset E$ верно неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|_E \leqslant M \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Теорема Блума — Хансона в сепарабельных банаховых идеальных пространствах последовательностей

Как уже отмечалось во введении, для любого линейного ограниченного оператора T, действующего в БИП $(E, \|\cdot\|_E) \subset s(\mathbb{K})$, сходимость $\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}x - x_0\right\|_E \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$ и некоторого $x_0 \in E$ всегда влечет слабую сходимость последовательности $\{T^n(x)\}$ в E к элементу x_0. Следующая теорема устанавливает свойство Блума — Хансона для каждого сепарабельного p-выпуклого ($p > 1$) БИП $E \subset s(\mathbb{K})$.

Теорема 3.1. *Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ — бесконечномерное p-выпуклое сепарабельное банахово идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$ с константой p-выпуклости $M^{(p)}(E) = 1$, $p > 1$. Тогда для любого линейного сжатия $T : E \to E$ из слабой сходимости в $(E, \|\cdot\|_E)$ последовательности $\{T^n(x)\}$ к элементу $x_0 \in E$ следует сходимость*

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\right\|_E \to 0$$

для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

$\lhd$ Если $T^n(x) \to x_0$ слабо в E, то $T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) \to T(x_0)$ слабо и поэтому $T(x_0) = x_0$. В случае $x_0 \neq 0$ заменяем элемент x_0 на $(x - x_0)$, и будем считать, не ограничивая общности, что $T^n(x) \to 0$ слабо. Таким образом, для доказательства утверждения теоремы следует установить, что слабая сходимость $T^n(x) \to 0$ в E влечет сходимость

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)\right\|_E \to 0$$

при $n \to \infty$ для любой последовательности $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Поскольку T сжатие, то $\|T^{n+1}(x)\|_E \leqslant \|T^n(x)\|_E$, и поэтому предел $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_E$ существует. Если этот предел равен нулю, то утверждение теоремы 3.1 очевидно. Предположим, что этот предел равен $\alpha \neq 0$. Заменяя, если необходимо, элемент x на элемент $\frac{x}{\alpha}$, можно считать, что $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_E = 1$.

Зафиксируем $\delta > 0$ и выберем натуральное число t так, чтобы выполнялось неравенство $t^{\frac{1}{p}-1} < \frac{\delta}{2}$. Поскольку $1 + 2^p s < 2^p(s+1)$ для всех $s \in \mathbb{N}$, то существует такое $\varepsilon \in (0, 1)$, что

$$\big((1+\varepsilon)^p + 2^p s\big)^{\frac{1}{p}} < 2(s+1)^{\frac{1}{p}} - (s+1)\varepsilon \tag{1}$$

для всех $s = 1, \ldots, t-1$.

Согласно равенству $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_E = 1$, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что верно неравенство

$$\left\|T^k(x)\right\|_E < 1 + \varepsilon. \tag{2}$$

Рассмотрим оператор проектирования P_r в E на линейную оболочку $\mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_r\}$ ортов $e_1, e_2, \ldots, e_r \in E$, т. е.

$$P_r(\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{\xi_1, \ldots, \xi_r, 0, 0, \ldots\} = \sum_{n=1}^{r} \xi_n e_n.$$

Обозначая через I тождественный оператор в E, в силу порядковой непрерывности нормы $\|\cdot\|_E$ имеем, что $\|(I - P_r)T^k(x)\|_E \to 0$ при $r \to \infty$. Следовательно, существует такое $r \in \mathbb{N}$, что верно неравенство

$$\left\|(I - P_r)T^k(x)\right\|_E < \varepsilon. \tag{3}$$

Так как $P_r(E) = \mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_r\}$ — конечномерное линейное подпространство в E и $T^{k+j}(x) \to 0$ слабо при $j \to \infty$, то найдется такое $d \in \mathbb{N}$, для которого

$$\left\|P_r T^{k+j}(x)\right\|_E < \varepsilon \tag{4}$$

при всех $j \geqslant d$.

Отметим, что из неравенств $\|P_r(x)\|_E \leqslant \|x\|_E$ и $\|(I - P_r)(x)\|_E \leqslant \|x\|_E$ следует, что

$$\|P_r\|_{E\to E} \leqslant 1, \quad \|I - P_r\|_{E\to E} \leqslant 1. \tag{5}$$

Покажем теперь, что

$$\left\|T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_s}(x)\right\|_E \leqslant 2s^{\frac{1}{p}}, \tag{6}$$

где $k \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_s$, $s \leqslant t$ и $m_{i+1} - m_i \geqslant d$ для всех $i = 1, \ldots, s-1$.

Докажем неравенство (6), используя индукцию по s. Для $s = 1$ неравенство (6) верно в силу выбора числа ε. Предположим, что неравенство (6) верно для $s < t$ и последовательность $m_1, m_2, \ldots, m_{s+1}$ удовлетворяет указанным выше требованиям. Тогда

$$\begin{gathered}\left\|T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}}(x)\right\|_E = \left\|T^{m_1-k}\big(T^k(x) + T^{m_2-m_1+k}(x)\right. \\ \left. + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\big)\right\|_E \leqslant \left\|T^k x + T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\right\|_E \\ \leqslant \left\|P_r T^k x + (I - P_r)\big(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\big)\right\|_E \\ + \left\|(I - P_r)T^k(x)\right\|_E + \left\|P_r\big(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\big)\right\|_E.\end{gathered}$$

В силу неравенств (3) и (4) имеем, что

$$\left\|(I - P_r)T^k(x)\right\|_E + \left\|P_r\big(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\big)\right\|_E < (s+1)\varepsilon.$$

Поскольку, банахова решетка E является p-выпуклой с константой p-выпуклости $M^{(p)}(E) = 1$, то E удовлетворяет верхней p-оценке с той же константой, т. е.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|_E \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

в случае, когда элементы $\{x_i\}_{i=1}^n \subset E$ попарно дизъюнктны.

Так как элементы $(I - P_r)(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))$ и $P_r T^k(x)$ попарно дизъюнктны, то, используя предположение индукции (6) и неравенства (2), (5), получим следующую оценку:

$$\begin{gathered}\left\|P_r T^k(x) + (I - P_r)\big(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\big)\right\|_E \\ \leqslant \Big(\left\|P_r T^k(x)\right\|_E^p + \left\|(I - P_r)\big(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\big)\right\|_E^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \big((1+\varepsilon)^p + 2^p s\big)^{\frac{1}{p}}.\end{gathered}$$

Следовательно, в силу неравенства (1) имеем, что

$$\left\|T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}}(x)\right\|_E \leqslant \big((1+\varepsilon)^p + 2^p s\big)^{\frac{1}{p}} + (s+1)\varepsilon < 2(s+1)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, неравенство (6) верно для каждого $s \leqslant t$.

Пусть $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$ — произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел, и пусть $N > k$ — достаточно большое натуральное число. Тогда $N = k + mt + r$, где $0 \leqslant r < t$, и m есть натуральное число, для которого $m \geqslant d$. Используя доказанное неравенство (6), получим, что

$$\left\|\sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\right\|_E \leqslant \left\|\sum_{j=0}^{k+r} T^{n_j}(x)\right\|_E + \sum_{s=1}^{m}\left\|\sum_{j=0}^{t-1} T^{n_{k+r+s+jm}}(x)\right\|_E \leqslant (k+r+1)\|x\|_E + m\cdot 2\cdot t^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{N+1}\left\|\sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\right\|_E \leqslant \frac{(k+r+1)\|x\|_E}{N+1} + \frac{2mt^{\frac{1}{p}}}{tm} = \frac{(k+r+1)\|x\|_E}{N+1} + 2t^{\frac{1}{p}-1},$$

и согласно выбору t,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\left\|\sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\right\|_E \leqslant 2t^{\frac{1}{p}-1} < \delta.$$

Так как $\delta > 0$ произвольное, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left\|\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)\right\|_E = 0.$$

4. Примеры

Приведем примеры бесконечномерных сепарабельных банаховых идеальных подпространств $(E, \|\cdot\|_E) \subset s(\mathbb{K})$, для которых верна теорема 3.1.

4.1. Пусть Φ — функция Орлича, т. е. $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — выпуклая непрерывная в нуле функция, для которой $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(u) > 0$ при $u \neq 0$. Пусть

$$l_\Phi = l_\Phi(\mathbb{N}) = \left\{x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in s(\mathbb{K}) : \ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\Phi\left(\frac{|\xi_n|}{\lambda}\right)\right) < \infty \ \text{ для некоторого } \ \lambda > 0\right\}$$

— пространство Орлича последовательностей, снабженное нормой Люксембурга

$$\|x\|_\Phi = \inf\left\{\lambda > 0 : \sum_{n=1}^{\infty}\left(\Phi\left(\frac{|\xi_n|}{\lambda}\right)\right) \leqslant 1\right\}$$

(см., например, [13, т. 1, гл. 4]). Ясно, что $(l_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ есть бесконечномерное банахово идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$.

Говорят, что функция Орлича Φ удовлетворяет Δ_2-условию в нуле, если $\limsup_{u\to 0}\frac{\Phi(2u)}{\Phi(u)} < \infty$. В этом случае пространство Орлича $(l_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ является сепарабельным [13, т. 1, гл. 4, теорема 4.a.4]. Согласно теореме 5.5 из [15] банахова решетка l_Φ является p-выпуклой (с константой 1) в том и только в том случае, когда функция $\Phi(u^{1/p})$ выпукла на $(0,1)$ и $\limsup_{u\to 0}\frac{2\Phi(u^{1/p})}{\Phi((2u)^{1/p})} \geqslant 1$. Таким образом, согласно теореме 3.1, при выполнении последних условий для $p > 1$ в случае, когда Φ удовлетворяет Δ_2-условию в нуле, пространство Орлича $(l_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ имеет свойство Блума — Хансона.

4.2. Пусть c_0 — банахова решетка всех сходящихся к нулю последовательностей $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ комплексных (действительных) чисел. Обозначим через $x^* = \{\xi_n^*\}_{n=1}^\infty$ невозрастающую перестановку последовательности чисел $|x| = \{|\xi_n|\}_{n=1}^\infty \in c_0$. Зафиксируем

$1 \leqslant p, q < \infty$ и рассмотрим пространство Лоренца $l_{p,q}$ всех таких последовательностей $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0$, для которых

$$\|\{\xi_n\}\|_{p,q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n^*)^q \left(n^{\frac{q}{p}} - (n-1)^{\frac{q}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Известно, что при $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$ пространство $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ есть сепарабельное банахово симметричное пространство последовательностей (см., например, [5, гл. 4, § 4]), при этом $l_{p,q}$ q-выпукло с константой q-выпуклости $M^{(q)}(l_{p,q}) = 1$ [7, утверждение 3.3]. Следовательно, в случае $1 < q \leqslant p < \infty$ банахово пространство $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ имеет свойство Блума — Хансона.

4.3. Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ — произвольное бесконечномерное сепарабельное p-выпуклое банахово идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$, где $p > 1$. Согласно [13, т. 2, гл. 1, утверждение 1.d.2] в E существует норма $\|\cdot\|'_E$, эквивалентная норме $\|\cdot\|_E$, относительно которой пара $(E, \|\cdot\|'_E)$ есть p-выпуклое банахово идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$ с константой p-выпуклости $M^{(p)}((E, \|\cdot\|'_E)) = 1$. Следовательно, для $(E, \|\cdot\|'_E)$ верно утверждение теоремы 3.1.

4.4. В силу [13, т. 2, гл. 1, теорема 1.f.7] любая банахова решетка, имеющая верхнюю r-оценку для $r > 1$, является p-выпуклой банаховой решеткой для любого $1 < p < r$. Следовательно, согласно п. 4.3 любое бесконечномерное сепарабельное банахово идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$, удовлетворяющее верхней r-оценке при $r > 1$, имеет эквивалентную норму $\|\cdot\|'_E$, относительно которой $(E, \|\cdot\|'_E)$ обладает свойством Блума — Хансона.

Известно, что в случае $1 < p < q < \infty$ функция $\|\cdot\|_{p,q}$ есть полная сепарабельная квазинорма на векторной решетке $l_{p,q}$, удовлетворяющая верхней p-оценке [7], при этом на $l_{p,q}$ существует норма $\|\cdot\|_{(p,q)}$, эквивалентная квазинорме $\|\cdot\|_{p,q}$, относительно которой $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ есть банахово симметричное пространство последовательностей (см., например, [5, гл. 4, § 4]). Поэтому из сказанного выше следует, что существует норма $\|\cdot\|'_{p,q}$, эквивалентная норме $\|\cdot\|_{(p,q)}$, относительно которой пара $(l_{p,q}, \|\cdot\|'_{p,q})$ имеет свойство Блума — Хансона.

В заключение заметим, что примеры из пунктов 4.3 и 4.4 выделяют классы банаховых пространств с положительным ответом на проблему 15 из [11].

Литература

1. *Akcoglu M., Sucheston L.* On operator convergence in Hilbert space and in Lebesgue space // Period. Math. Hungar.—1972.—Vol. 2.—P. 235–244.
2. *Akcoglu M. A., Huneke J. P. and Rost H.* A couterexample to Blum–Hanson theorem in general spaces // Pacific J. of Math.—1974.—Vol. 50.—P. 305–308.
3. *Akcoglu M. A., Sucheston L.* Weak convergence of positive contractions implies strong convergence of averages // Zeitschrift feur Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete.—1975.—Vol. 32.—P. 139–145.
4. *Bellow A.* An L_p-inequality with application to ergodic theory // Hous. J. Math.—1975.—Vol. 1, № 1.—P. 153–159.
5. *Bennet C., Sharpley R.* Interpolation of Operators.—N. Y.: Acad. Press, Inc., 1988.
6. *Blum J. R., Hanson D. L.* On the mean ergodic theorem for subsequences // Bull. Amer. Math. Soc.—1960.—Vol. 66.—P. 308–311.
7. *Creekmore J.* Type and cotype in Lorentz of $L_{p,q}$ spaces // Indag. Math.—1981.—Vol. 43.—P. 145–152.
8. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear Operators. Part I: General Theory.—Wiley, 1988.
9. *Kantorovich L. V., Akilov G. P.* Functional Analysis.—Oxford–N. Y. etc: Pergamon Press, 1982.

10. *Krengel U.* Ergodic Theorems. De Gruyter Stud. Math. Vol. 6. Walter de Gruyter.—Berlin–N. Y., 1985.
11. *Lefevre P., Matheron E. and Primot A.* Smoothness, asymptotic smoothness and the Blum–Hanson property // Israel J. Math.—2016.—Vol. 211.—P. 271–309.
12. *Lin M.* Mixing for Markov operators // Z. Wahrsch. Verw. Geb.—1971.—Vol. 19.—P. 231–242.
13. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces.—Berlin–N. Y.: Springer-Verlag, 1996.
14. *Jones L. K., Kuftinec V.* A note on the Blum–Hanson theorem // Proc. Amer. Math. Soc.—1970.—Vol. 30.—P. 202–203.
15. *Hao M. C., Kami'nska A. and Tomczak-Jaegermann N.* Orlicz spaces with convexity or concavity constant one // J. Math. Anal. Appl.—2006.—Vol. 320.—P. 303–321.
16. *Millet A.* Sur le théorème en moyenne d'Akcoglu–Sucheston // Mathematische Zeitschrift.—1980.—Vol. 172.—P. 213–237.
17. *Muller V., Tomilov Y.* Quasisimilarity of power bounded operators and Blum–Hanson property // J. Funct. Anal.—2007.—Vol. 246.—P. 385–399.

Статья поступила 28 октября 2016 г.

Чилин Владимир Иванович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
профессор кафедры алгебры и функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 100174, Ташкент, Вузгородок
E-mail: vladimirchil@gmail.com, chilin@ucd.uz

Азизов Азизхон Нодирхон угли
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
магистр кафедры алгебры и функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 100174, Ташкент, Вузгородок
E-mail: azizov.07@mail.ru, saidaziz.azizov@gmail.com

BLUM–HANSON ERGODIC THEOREM IN A BANACH LATTICES OF SEQUENCES

Azizov A. N., Chilin V. I.

It is well known that a linear contraction T on a Hilbert space has the so called Blum–Hanson property, i. e., that the weak convergence of the powers T^n is equivalent to the strong convergence of Ĉesaro averages $\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} T^{k_n}$ for any strictly increasing sequence $\{k_n\}$. A similar property is true for linear contractions on l_p-spaces ($1 \leqslant p < \infty$), for linear contractions on L^1, or for positive linear contractions on L^p-spaces ($1 < p < \infty$). We prove that this property holds for any linear contractions on a separable p-convex Banach lattices of sequences.

Key words: Banach solid lattice, p-convexity, linear contraction, ergodic theorem.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 11–20

УДК **517.968**

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА И МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С. Н. Асхабов

Посвящается А. Б. Шабату в связи с его 80-летием

Методом максимальных монотонных операторов в вещественных пространствах Лебега доказываются теоремы о существовании и единственности решения для различных классов нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Гильберта. Приведены следствия, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: нелинейное сингулярное интегро-дифференциальное уравнение, ядро Гильберта, метод максимальных монотонных операторов.

1. Введение и основные результаты

Интерес к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям вызван их многочисленными и разнообразными приложениями в гидро и аэродинамике (уравнение Прандтля «крыла самолета»), в теории упругости и автоматического управления, в области устойчивых процессов с независимыми приращениями и др. [10]. В работах Х. М. Когана [7, 8] в связи с решением одной вариационной задачи был изучен сингулярный интегро-дифференциальный оператор с ядром Коши

$$(Tu)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u'(s)}{s-x}\,ds$$

как оператор, действующий из $L_2(-1,1)$ в $L_2(-1,1)$, с областью определения

$$D(T) = \left\{ u(x) : u(x) \in AC[-1,1],\ u(-1) = u(1) = 0,\ \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, u'^2(x)\,dx < \infty \right\},$$

где $AC[-1,1]$ — множество всех абсолютно непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций. В [8] доказано, что оператор T симметричен и положителен. В работе М. Шлайфа [11] для скалярного произведения (Tu,u) получено неравенство

$$(Tu,u) = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u'(s)}{s-x}\,ds \right) u(x)\,dx \geqslant \int_{-1}^{1} \frac{u^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (\forall\, u(x) \in D(T)).$$

Эти результаты допускают обобщение на случай сингулярного интегро-дифференциального оператора вида

$$(\mathbb{B}u)(x) = -\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\big[b(s)u(s)\big]'}{s-x}\,ds, \qquad b(x) \in AC[-1,1],$$

рассматриваемого в пространстве Лебега $L_p(\varrho)$, $p \geqslant 2$, с весом $\varrho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ и областью определения $D(\mathbb{B}) = \big\{u(x) : \, u(x) \in AC[-1,1], \ u(\pm 1) = 0, \ u'(x) \in L_{p'}(\sigma)\big\}$, где $p' = p/(p-1)$, $\sigma(x) = (1-x^2)^{(p'-1)/2}$. При этих условиях оператор $\mathbb{B}$ является симметричным и положительным, причем (см. [2])

$$\langle \mathbb{B}u, u\rangle = \int_{-1}^{1}\left(-\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\big[b(s)u(s)\big]'}{s-x}\,ds\right)u(x)\,dx \geqslant \int_{-1}^{1}\frac{\big[b(x)u(x)\big]^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (\forall\, u(x) \in D(\mathbb{B})).$$

В работах Л. Вольферсдорфа [10] и автора [2] установлена максимальная монотонность операторов T и $\mathbb{B}$, соответственно, и доказаны теоремы о существовании и единственности решения для различных классов нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши, содержащих эти операторы. Некоторые другие классы таких уравнений были ранее рассмотрены в [9].

В данной работе изучается сингулярный интегро-дифференциальный оператор с ядром Гильберта

$$(Gu)(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds$$

как оператор, действующий из пространства вещественных 2π-периодических функций $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < \infty$, в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(-\pi,\pi)$, с областью определения

$$D(G) = \left\{u(x) : \, u(x) \in AC[-\pi,\pi], \ u(-\pi) = u(\pi) = 0, \ \int_{-\pi}^{\pi}|u'(x)|^{p'}\,dx < \infty\right\},$$

где $AC[-\pi,\pi]$ — множество всех абсолютно непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций.

Применяя методы теории тригонометрических рядов [3], установлено, что G является симметричным, потенциальным, строго положительным и максимальным монотонным оператором. Используя эти свойства, методом максимальных монотонных операторов [5] доказаны глобальные теоремы о существовании и единственности решения для различных классов нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Гильберта, содержащих оператор G. Приведены следствия, иллюстрирующие полученные результаты.

Всюду в работе будем придерживаться принятых в монографии [5] обозначений и определений, касающихся теории монотонных операторов. Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство, X^* — сопряженное с ним пространство и оператор Λ действует из X в X^*, т. е. $\Lambda \in (X \to X^*)$. Обозначим через $\langle y, x\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. В частности, если X — гильбертово пространство $\mathbb{H}$, то $\langle y, x\rangle$ совпадает с обычным скалярным произведением (y,x), где $x, y \in \mathbb{H}$. Оператор Λ с линейной областью определения $D(\Lambda) \subset X$ называется *монотонным*, если для любых $u, v \in D(\Lambda)$ выполняется неравенство $\langle \Lambda u - \Lambda v, u - v\rangle \geqslant 0$

и строго монотонным, если $\langle \Lambda u - \Lambda v, u - v\rangle > 0$ при $u \neq v$. Монотонный оператор $\Lambda \in (D(\Lambda) \to X^*)$ называется *максимально монотонным*, если из выполнения неравенства $\langle f - \Lambda v, u - v\rangle \geqslant 0$ для любого $v \in D(\Lambda)$ следует, что $u \in D(\Lambda)$ и $\Lambda u = f$. Если Λ — линейный оператор, то определение монотонного и строго монотонного оператора совпадает с определением положительного и строго положительного оператора соответственно.

Как обычно, через $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ обозначаются множества всех действительных и натуральных чисел соответственно, а через $p' = p/(p-1)$ — сопряженное с p число.

2. Строгая положительность сингулярного интегро-дифференциального оператора с ядром Гильберта

Пусть $1 < p < \infty$ и $p' = p/(p-1)$. Обозначим через $L_p(-\pi,\pi)$ множество всех измеримых по Лебегу на отрезке $[-\pi,\pi]$ вещественных 2π-периодических функций с конечной нормой $\|u\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$. Норму в сопряженном пространстве $L_{p'}(-\pi,\pi)$ обозначим через $\|\cdot\|_{p'}$. Поставим в соответствие функции $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ ее тригонометрический ряд Фурье

$$u(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \tag{1}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\sin nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

есть коэффициенты ряда Фурье функции $u(x)$.

Следуя монографии Н. К. Бари [3], определим сопряженную с $u(x)$ функцию $\overline{u}(x)$:

$$\overline{u}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{u(x+s) - u(x-s)}{2\operatorname{tg}\frac{s}{2}}\,ds.$$

Известно [3, с. 573], что сопряженная функция $\overline{u}(x)$ представима в виде

$$\overline{u}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(s)}{2\ \operatorname{tg}\frac{s-x}{2}}\,ds = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds, \tag{3}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши — Лебегу, и соответствующий ей тригонометрический ряд Фурье имеет вид [3, с. 568]

$$\overline{u}(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)\,, \tag{4}$$

где коэффициенты a_n и b_n определяются по формулам (2).

Рассмотрим теперь сингулярный интегральный оператор H с ядром Гильберта:

$$(Hu)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds, \tag{5}$$

где, как и выше, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши — Лебегу. Сравнивая (3) и (5), замечаем, что $(Hu)(x) = -\overline{u}(x)$. Значит, в силу (4)

$$(Hu)(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)\,. \tag{6}$$

Пусть $u(x) \in L_p(-\pi, \pi)$, $v(x) \in L_{p'}(-\pi, \pi)$. Обозначим коэффициенты их рядов Фурье через a_n, b_n и c_n, d_n, соответственно. Тогда [3, с. 218] справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)\,dx = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n)\,. \tag{7}$$

Используя равенство Парсеваля (7), с учетом соотношений (1) и (6) для любого $u(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (Hu)(x)\cdot u(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n a_n - a_n b_n) = 0 \text{ или } (Hu, u) = 0 \quad (\forall\, u(x) \in L_2(-\pi, \pi)), \tag{8}$$

т. е. сингулярный интегральный оператор H с ядром Гильберта является положительным в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$, но не является строго положительным оператором, так как не удовлетворяет условию: $(Hu, u) > 0$, если $u \neq 0$.

Рассмотрим теперь в пространстве $L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, сингулярный интегро-дифференциальный оператор G с ядром Гильберта

$$(Gu)\,(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\,\mathrm{ctg}\,\frac{s-x}{2}\,ds,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши — Лебегу, с областью определения

$$D(G) = \left\{ u(x) :\, u(x) \in AC[-\pi, \pi],\ u(-\pi) = u(\pi) = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} |u'(x)|^{p'}\,dx < \infty \right\},$$

где $AC[-\pi, \pi]$ — множество всех абсолютно непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций.

Теорема 2.1. *Пусть $1 < p < \infty$. Сингулярный интегро-дифференциальный оператор G с ядром Гильберта действует из $D(G)$ в $L_{p'}(-\pi, \pi)$ и является строго положительным, симметричным и потенциальным, причем*

$$\langle Gu, u\rangle = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad (\forall\, u(x) \in D(G)), \tag{9}$$

где коэффициенты a_n и b_n определяются по формулам (2).

$\lhd$ Так как сингулярный интегральный оператор H с ядром Гильберта действует [3, с. 566] непрерывно из $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$ при любом $p' \in (1,\infty)$, то очевидно, что сингулярный интегро-дифференциальный оператор G с ядром Гильберта действует из $D(G)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$, поскольку $u'(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$.

Докажем, что оператор G является строго положительным. Пусть $u(x) \in D(G)$. Так как функция $u(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$, то справедливо соотношение [3, с. 87]

$$u'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n\left(b_n \cos nx - a_n \sin nx\right).$$

В силу (4) имеем

$$\overline{u'}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right). \tag{10}$$

Используя равенство (10), с учетом того, что в силу (3) $\overline{u'}(x) = (Gu)(x)$, на основании равенства Парсеваля (7) получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds\right)u(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\left(a_n^2+b_n^2\right),$$

т. е. справедлива доказываемая формула (9). Из формулы (9) непосредственно вытекает, что оператор G является положительным, т. е. $\langle Gu,u\rangle \geqslant 0$ $(\forall\, u(x) \in D(G))$. Кроме того, из формулы (9) следует, что $\langle Gu,u\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $a_n = b_n = 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$. Но в этом случае, в силу соотношения (1), $u(x) \sim a_0/2$, т. е. $u(x) = C = \mathrm{const}$ $(\forall\, x \in [-\pi,\pi])$. Поскольку $u(-\pi) = u(\pi) = 0$, то $C = 0$ и, значит, $\langle Gu,u\rangle = 0$ лишь в случае $u(x) = 0$, т. е. G — строго положительный оператор.

Докажем теперь, что оператор G является симметричным. Пусть $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$, $v(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$. Обозначим коэффициенты их рядов Фурье через a_n, b_n и c_n, d_n, соответственно. Тогда, с учетом (10) и равенства $\overline{u'}(x) = (Gu)(x)$, имеем

$$(Gu)(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad (Gv)(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n\left(c_n \cos nx + d_n \sin nx\right).$$

Поэтому в силу равенства Парсеваля (7) получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(Gu)(x)v(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n c_n + b_n d_n\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)(Gv)(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n c_n + b_n d_n\right).$$

Значит,

$$\begin{gathered}\int_{-\pi}^{\pi}(Gu)(x)\cdot v(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}u(x)\cdot(Gv)(x)\,dx,\\ \text{т. е. } \langle Gu,v\rangle = \langle u,Gv\rangle \quad (\forall\, u(x),v(x) \in D(G)).\end{gathered} \tag{11}$$

Из равенства (11) вытекает, что оператор G является симметричным, т. е. $G = G^*$, где G^* — сопряженный с G оператор.

Докажем, что оператор G является потенциальным. Для этого рассмотрим, следуя примеру 5.3 из [4, с. 63], квадратичный функционал $f(u) = \langle Gu, u\rangle$. Так как множество $D(G)$ плотно в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$ при любом $p \in (1,\infty)$, $G = G^*$ и $D(G) = D(G^*)$, то [4, с. 63]

$$\mathrm{grad} f(u) = Gu + G^* u = 2\,Gu \quad \text{или} \quad Gu = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad} f(u),$$

т. е. линейный оператор G, действующий из $D(G)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$, $p' = p/(p-1)$, является потенциальным. $\rhd$

3. Теоремы существования и единственности в $L_p(-\pi,\pi)$

В этом пункте доказываются теоремы о существовании и единственности решения для различных классов нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Гильберта, содержащих оператор G.

Введем в рассмотрение нелинейный оператор суперпозиции (так называемый *оператор Немыцкого*). Пусть вещественнозначная функция $F(x,u)$ определена при $x \in [-\pi,\pi]$, $u \in \mathbb{R}$, имеет период 2π по x и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}$ и непрерывна по u почти для всех $x \in [-\pi,\pi]$. Обозначим через F оператор суперпозиции, порожденный функцией $F(x,u)$: $(Fu)(x) = F(x,u(x))$, а через $L_p^+(-\pi,\pi)$ — множество всех неотрицательных функций из $L_p(-\pi,\pi)$.

Нам понадобится следующая теорема Ф. Браудера, приведенная с доказательством в монографии [5, с. 98].

Теорема 3.1. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $\Lambda \in (D(\Lambda) \to X^*)$ — радиально непрерывный максимальный монотонный оператор с линейной областью определения $D(\Lambda) \subset X$ и $A \in (X \to X^*)$ — радиально непрерывный монотонный коэрцитивный оператор. Тогда при любом $f \in X^*$ уравнение*

$$\Lambda u + Au = f \tag{12}$$

имеет решение $u \in D(\Lambda)$. Если, кроме того, оператор A является строго монотонным, то уравнение (12) *имеет точно одно решение.*

Замечание 3.1. Заметим [5, с. 143], что теорема 3.1 была сформулирована Ф. Браудером без предположений радиальной непрерывности оператора Λ и линейности области его определения $D(\Lambda)$. Достаточно, чтобы оператор Λ был линейным максимальным монотонным оператором с плотной в пространстве X областью определения $D(\Lambda)$ [6]. Легко видеть, что для единственности решения в теореме 3.1 достаточно, чтобы хотя бы один из операторов Λ или A был строго монотонным.

Теорема 3.2. *Пусть $p \geqslant 2$ и $f(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$. Если для почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются условия*

1) $|F(x,u)| \leqslant a(x) + d_1 \cdot |u|^{p-1}$, *где* $a(x) \in L_{p'}^+(-\pi,\pi)$, $d_1 > 0$;

2) $F(x,u)$ *не убывает по* u;

3) $F(x,u) \cdot u \geqslant d_2 \cdot |u|^p - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_2 > 0$,

то при любых значениях параметра $\lambda > 0$ уравнение

$$\lambda \cdot F(x,u(x)) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\,\mathrm{ctg}\,\frac{s-x}{2}\,ds = f(x) \tag{13}$$

имеет единственное решение $u(x) \in D(G)$.

$\lhd$ Запишем уравнение (13) в операторном виде:

$$\lambda Fu + Gu = f. \tag{14}$$

Из условий 1)–3) вытекает, что оператор суперпозиции F действует непрерывно из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$, монотонен и коэрцитивен, причем для любого $u(x)\in L_p(-\pi,\pi)$ выполняются неравенства $\|Fu\|_{p'}\leqslant \|a\|_{p'}+d_1\|u\|_p^{p-1}$ и $\langle Fu,u\rangle \geqslant d_2\|u\|_p^p-\|D\|_1$.

Рассмотрим теперь сингулярный интегро-дифференциальный оператор G. По теореме 2.1 оператор G действует из $D(G)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$ и является строго положительным, а значит, в силу линейности, и строго монотонным оператором. Кроме того, оператор G является максимальным монотонным оператором, так как не допускает строго монотонного расширения (ср. [10, с. 258]).

Таким образом, для операторов $G=\Lambda$ и $\lambda F = A$ выполняются все требования теоремы 3.1. Следовательно, уравнение (14), а значит и уравнение (13), имеет единственное (см. замечание 3.1) решение $u\in D(G)$. $\rhd$

Следствие 3.1. *Пусть $p\geqslant 2$ — любое четное число, $f(x)\in L_{p'}(-\pi,\pi)$. Тогда уравнение*

$$u^{p-1}(x)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u'(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds=f(x)$$

имеет единственное решение $u(x)\in D(G)$.

Следующие две теоремы отличаются от теоремы 3.2 как по характеру ограничений на нелинейность, так и по структуре доказательства.

Теорема 3.3. *Пусть $p\geqslant 2$ и $f(x)\in L_p(-\pi,\pi)$. Если для почти всех $x\in[-\pi,\pi]$ и всех $u\in\mathbb{R}$ выполняются условия:*
1) $|F(x,u)|\leqslant g(x)+d_3|u|^{1/(p-1)}$, где $g(x)\in L_p^+(-\pi,\pi)$, $d_3>0$;
2) $F(x,u)$ не убывает по u;
3) $F(x,u)\cdot u\geqslant d_4|u|^{p/(p-1)}-D(x)$, где $D(x)\in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_4>0$,
то при любых значениях параметра $\lambda>0$ уравнение

$$\lambda F(x,u'(x))+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds=f(x) \tag{15}$$

имеет единственное решение $u(x)\in L_p(-\pi,\pi)$ с $u'(x)\in L_{p'}(-\pi,\pi)$ и $u(\pm\pi)=0$.

$\lhd$ Полагая в уравнении (15) $u'(x)=v(x)$ и учитывая, что тогда $u(x)=\int_{-\pi}^{x}v(t)\,dt+u(-\pi)=\int_{-\pi}^{x}v(t)\,dt$, приходим к операторному уравнению

$$\lambda Fv+Vv=f, \tag{16}$$

где $v\in L_{p'}(-\pi,\pi)$ и

$$(Vv)(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{s}v(t)\,dt\right)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds=(Hu)(x).$$

Поскольку сингулярный оператор H, в силу теоремы М. Рисса [3, с. 566], действует непрерывно из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_p(-\pi,\pi)$, то из равенства $Vv=Hu$ вытекает, что оператор V действует из $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в $L_p(-\pi,\pi)$, причем, в силу формулы М. Рисса перестановки регулярного и сингулярного интегралов [3, с. 568], равенства $Vv = Hu$ и равенства (9), с учетом, что $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$, $u'(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$ и $u(\pm\pi) = 0$, имеем

$$\langle Vv, v\rangle = \langle Hu, u'\rangle = -\langle u, Hu'\rangle = \langle u, Gu\rangle = \langle Gu, u\rangle \geqslant 0 \quad (\forall\, v \in L_{p'}(-\pi,\pi)). \tag{17}$$

Итак, оператор V действует из $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в $L_p(-\pi,\pi)$ и является строго положительным оператором, что вытекает из (17), поскольку $\langle Gu, u\rangle > 0$ при $u \neq 0$ по теореме 2.1. Кроме того, согласно следствию 1.1 из [5, с. 84] линейный монотонный оператор V является непрерывным.

Рассмотрим теперь оператор суперпозиции F. Из условий 1)–3) вытекает (см., например, [1, § 2]), что оператор F действует непрерывно из $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в $L_p(-\pi,\pi)$, монотонен и коэрцитивен.

Таким образом, используя установленные свойства операторов V и F, получаем, что оператор $A = \lambda F + V$ действует из пространства $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в сопряженное с ним пространство $L_p(-\pi,\pi)$ и является непрерывным, строго монотонным (как сумма монотонного и строго положительного операторов) и коэрцитивным. Следовательно, по теореме Браудера — Минти [5, с. 95] уравнение (16) имеет единственное решение $v(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$. Но тогда данное уравнение (15), в силу связи $u'(x) = v(x)$, имеет единственное решение $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. $\rhd$

Следствие 3.2. *Пусть $p \geqslant 2$ — любое четное число, $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. Тогда уравнение*

$$\big(u'(x)\big)^{\frac{1}{(p-1)}} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u(x) \in D(G)$.

Доказательство следующей теоремы, в отличие от теорем 3.2 и 3.3, основано на обращении оператора суперпозиции и установлении коэрцитивности обратного оператора.

Теорема 3.4. *Пусть $p \geqslant 2$ и $f(x) \in D(G)$. Если для почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются условия 1)–3) теоремы 3.3, причем в условии 2) $F(x,u)$ строго возрастает по u, то при любых значениях $\lambda \geqslant 0$ уравнение*

$$u(x) + \lambda F\left(x, -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u'(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds\right) = f(x) \tag{18}$$

имеет единственное решение $u(x) \in D(G)$.

$\lhd$ При $\lambda = 0$ утверждение данной теоремы очевидно, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. Запишем уравнение (18) в операторном виде:

$$u + \lambda FGu = f. \tag{19}$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x)$, обозначив $f(x) - u(x) = \lambda v(x)$. Ясно, что $v(x) \in L_p(-\pi,\pi)$, $v(\pm\pi) = 0$ и $v'(x) = \lambda^{-1}\left(f'(x) - u'(x)\right) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$, т. е. $v(x) \in D(G)$. Подставив $u = f - \lambda v$ в уравнение (19), получим

$$FG(f - \lambda v) = v. \tag{20}$$

Из условий данной теоремы вытекает, что оператор суперпозиции F действует непрерывно из $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в $L_p(-\pi,\pi)$, строго монотонен и коэрцитивен, причем для любого $u(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$ выполняются неравенства

$$\|Fu\|_p \leqslant \|g\|_p + d_3\|u\|_{p'}\,, \quad \langle Fu, u\rangle \geqslant d_4\|u\|_{p'}^{\frac{p}{p-1}} - \|D\|_1.$$

Значит, по теореме 2.2 из [5] существует обратный оператор F^{-1}, действующий из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$ и являющийся строго монотонным, ограниченным и радиально непрерывным, поскольку для монотонных операторов понятия радиально непрерывный и деминепрерывный совпадают в силу [5, лемма 1.3]. Кроме того, оператор F^{-1} является коэрцитивным (см. [1, лемма 2.1]).

Применив оператор F^{-1} к обеим частям уравнения (20), приходим к уравнению $Gf-\lambda Gv = F^{-1}v$ или

$$F^{-1}v + \lambda Gv = Gf, \tag{21}$$

т. е. получили уравнение вида (12).

Заметим, что по теореме 2.1 $Gf \in L_{p'}(-\pi,\pi)$ и, как было установлено при доказательстве теоремы 3.2, G является максимальным монотонным оператором.

Таким образом, операторы $\lambda G = \Lambda$ и $F^{-1} = A$ удовлетворяют всем требованиям теоремы 3.1. Следовательно, уравнение (21) имеет решение $v \in D(G)$ и это решение единственно в силу строгой монотонности оператора $A = F^{-1}$. Но тогда, в силу связи $u = f - \lambda v$, уравнение (19), а значит и данное уравнение (18), имеет единственное решение $u \in D(G)$. $\rhd$

Следствие 3.3. *Пусть $p \geqslant 2$ — любое четное число и $f(x) \in D(G)$. Тогда уравнение*

$$u(x) + \left(-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u'(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds\right)^{\frac{p}{p-1}} = f(x)$$

имеет единственное решение $u(x) \in D(G)$.

В заключение отметим, что при $p = 2$ теоремы 3.2–3.4 охватывают, в частности, и случай линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения с ядром Гильберта.

Литература

1. *Асхабов С. Н.* Нелинейные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Лебега.—Грозный: Чеченский гос. ун-т, 2013.—136 с.
2. *Асхабов С. Н.* Применение метода максимальных монотонных операторов к нелинейным сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям // Вестн. Чеченского гос. ун-та.—2015.—№ 1.—С. 7–12.
3. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды.—М.: Физматгиз, 1961.—936 с.
4. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.—М.: Наука, 1972.—416 с.
5. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.—М.: Мир, 1978.—336 с.
6. *Жиков В. В.* Монотонный оператор // Мат. энциклопедия. Т. 3.—М.: Советская энциклопедия, 1982.—592 с.
7. *Коган Х. М.* Об одном сингулярном интегро-дифференциальном уравнении // Успехи мат. наук.—1965.—Т. 20, вып. 3 (123).—С. 243–244.
8. *Коган Х. М.* Об одном сингулярном интегро-дифференциальном уравнении // Диф. уравнения.—1967.—Т. 3, № 2.—С. 278–293.
9. *Магомедов Г. М.* Метод монотонности в теории нелинейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений // Диф. уравнения.—1977.—Т. 13, № 6.—С. 1106–1112.
10. *Wolfersdorf L. V.* Monotonicity methods for nonlinear singular integral and integro-differential equations // J. Appl. Math. Mech.—1983.—Vol. 63, № 6.—P. 249–259.
11. *Schleiff M.* Untersuchungen einer linearen singularen integrodifferentialgleichung der tragflugeltheorie // Wiss. Z. Univ. Halle. Math.-Nat. Reihe.—1968.—Vol. 17.—P. 981–1000.

Статья поступила 4 июля 2017 г.

Асхабов Султан Нажмудинович
Чеченский государственный педагогический университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 364037, Грозный, ул. Киевская, 33;
Чеченский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 364907, Грозный, ул. Шерипова, 32
E-mail: `askhabov@yandex.ru`

SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HILBERT KERNEL AND MONOTONE NONLINEARITY

Askhabov S. N.

In this paper applying methods of trigonometric series we establish that the singular integro-differential operator with the Hilbert kernel $(Gu)(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds$ with the domain $D(G) = \{u(x) : u(x)$ absolutely continuous with $u'(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$ and $u(-\pi) = u(\pi) = 0\}$, where $p' = p/(p-1)$, $1 < p < \infty$, is a strictly positive, symmetric and potential. Using this result and the method of maximal monotone operators, we investigate three different classes of nonlinear singular integro-differential equations with the Hilbert kernel, containing an arbitrary parameter, in the class of 2π-periodic real functions. The solvability and uniqueness theorems, covering also the linear case, are established under transparent restrictions. In contrast to previous papers devoted to other classes of nonlinear singular integro-differential equations with the Cauchy kernel, this one is based on inverting of the superposition operator generating the nonlinearity in the equations considered, and on the proof of the coercivity of this inverse operator. The corollaries are given that illustrate the obtained results.

Keywords: nonlinear singular integro-differential equations, Hilbert kernel, method of maximal monotone operators.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 21–30

ORDER BORNOLOGICAL LOCALLY CONVEX LATTICE CONES

D. Ayaseh, A. Ranjbari

In this paper, we introduce the concepts of *us*-lattice cones and order bornological locally convex lattice cones. In the special case of locally convex solid Riesz spaces, these concepts reduce to the known concepts of seminormed Riesz spaces and order bornological Riesz spaces, respectively. We define solid sets in locally convex cones and present some characterizations for order bornological locally convex lattice cones.

Mathematics Subject Classification (2010): 46A03, 46A40.

Key words: locally convex lattice cones, order bornological cones.

1. Introduction

The theory of locally convex cones as developed in [5] and [11], uses an order theoretical concept or a convex quasiuniform structure to introduce a topological structure on a cone. Examples of locally convex cones contain classes of functions that take infinite values and families of convex subsets of vector spaces. These type of structures are not vector space and also may not even be embedded into a larger vector spaces in order to apply technics from topological vector spaces. These structures are studied in the general theory of locally convex cones. The class of bornological locally convex spaces is an important class of locally convex spaces which are introduced by Mackey in 1946. Every bounded linear operator on a bornological space is continuous. These structures have an advantage which they can be written as an inductive limit of seminormed spaces. Therefore every complete Hausdorff bornological locally convex space is the inductive limit of Banach spaces. We establish these results for locally convex cones in [3]. Also, We investigated the bornological convergence for cones in [2]. In the case of locally convex lattice cones, we want to study the order bornological locally convex lattice cones. The investigating of these structure is interesting, since these structures are the order inductive limit of *us*-lattice cones which are the extensions of seminormed Riesz spaces. We note that in the case of vector lattices the concept of separated *us*-lattice cones reduces to the concept of normed Riesz spaces and the concept of symmetric complete separated *us*-lattice cones reduces to the concept of Banach lattices, which have many applications in Economics. This research can be useful for researchers in mathematical economic theory. For recent researches see [2–4, 6, 9].

A *cone* is a set $\mathscr{P}$ endowed with an addition and a scalar multiplication for nonnegative real numbers. The addition is assumed to be associative and commutative, and there is a neutral element $0 \in \mathscr{P}$. For the scalar multiplication the usual associative and distributive properties hold, that is $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$, $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$, $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$, $1a = a$ and $0a = 0$ for all $a, b \in \mathscr{P}$ and $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Let $\mathscr{P}$ be a cone. A collection $\mathfrak{U}$ of convex subsets $U \subseteq \mathscr{P}^2 = \mathscr{P} \times \mathscr{P}$ is called *a convex quasiuniform structure* on $\mathscr{P}$, if the following properties hold:

(U_1) $\Delta \subseteq U$ for every $U \in \mathfrak{U}$ $(\Delta = \{(a,a) : a \in \mathscr{P}\})$;
(U_2) for all $U, V \in \mathfrak{U}$ there is a $W \in \mathfrak{U}$ such that $W \subseteq U \cap V$;
(U_3) $\lambda U \circ \mu U \subseteq (\lambda + \mu)U$ for all $U \in \mathfrak{U}$ and $\lambda, \mu > 0$;
(U_4) $\alpha U \in \mathfrak{U}$ for all $U \in \mathfrak{U}$ and $\alpha > 0$.

Here, for $U, V \subseteq \mathscr{P}^2$, by $U \circ V$ we mean the set of all $(a,b) \in \mathscr{P}^2$ such that there is some $c \in \mathscr{P}$ with $(a,c) \in U$ and $(c,b) \in V$.

Let $\mathscr{P}$ be a cone and $\mathfrak{U}$ be a convex quasiuniform structure on $\mathscr{P}$. We shall say $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is a locally convex cone if

(U_5) for each $a \in \mathscr{P}$ and $U \in \mathfrak{U}$ there is some $\rho > 0$ such that $(0, a) \in \rho U$.

With every convex quasiuniform structure $\mathfrak{U}$ on $\mathscr{P}$ we associate two topologies: The neighborhood bases for an element a in the upper and lower topologies are given by the sets

$$U(a) = \{b \in \mathscr{P} : (b,a) \in U\}, \quad \text{resp.} \quad (a)U = \{b \in \mathscr{P} : (a,b) \in U\}, \quad U \in \mathfrak{U}.$$

The common refinement of the upper and lower topologies is called symmetric topology. A neighborhood base for $a \in \mathscr{P}$ in this topology is given by the sets

$$U(a)U = U(a) \cap (a)U, \quad U \in \mathfrak{U}.$$

Let $\mathfrak{U}$ and $\mathscr{W}$ be convex quasiuniform structures on $\mathscr{P}$. We say that $\mathfrak{U}$ is finer than $\mathscr{W}$ if $\mathscr{W} \subseteq \mathfrak{U}$.

The extended real number system $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is a cone endowed with the usual algebraic operations, in particular $a + \infty = +\infty$ for all $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \cdot (+\infty) = +\infty$ for all $\alpha > 0$ and $0 \cdot (+\infty) = 0$. We set $\mathscr{V} = \{\tilde{\varepsilon} : \varepsilon > 0\}$, where

$$\tilde{\varepsilon} = \left\{(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2 : \ a \leqslant b + \varepsilon\right\}.$$

Then $\tilde{\mathscr{V}}$ is a convex quasiuniform structure on $\overline{\mathbb{R}}$ and $(\overline{\mathbb{R}}, \tilde{\mathscr{V}})$ is a locally convex cone. For $a \in \mathbb{R}$ the intervals $(-\infty, a + \varepsilon]$ are the upper and the intervals $[a - \varepsilon, +\infty]$ are the lower neighborhoods, while for $a = +\infty$ the entire cone $\overline{\mathbb{R}}$ is the only upper neighborhood, and $\{+\infty\}$ is open in the lower topology. The symmetric topology is the usual topology on $\mathbb{R}$ with as an isolated point $+\infty$.

For cones $\mathscr{P}$ and $\mathscr{Q}$, a mapping $T : \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$ is called a *linear operator* if $T(a + b) = T(a) + T(b)$ and $T(\alpha a) = \alpha T(a)$ hold for all $a, b \in \mathscr{P}$ and $\alpha \geqslant 0$. If both $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ and $(\mathscr{Q}, \mathscr{W})$ are locally convex cones, the operator T is called (*uniformly*) continuous if for every $W \in \mathscr{W}$ one can find $U \in \mathfrak{U}$ such that $(T \times T)(U) \subseteq W$.

A *linear functional* on $\mathscr{P}$ is a linear operator $\mu : \mathscr{P} \to \overline{\mathbb{R}}$. The *dual cone* $\mathscr{P}^*$ of a locally convex cone $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ consists of all continuous linear functionals on $\mathscr{P}$. The polar of the neighborhood $U \in \mathfrak{U}$ is defined as folows:

$$U^\circ = \{\mu \in \mathscr{P}^* : \ \mu(a) \leqslant \mu(b) + 1, \ \forall\,(a,b) \in U\}.$$

Let $\mathfrak{U}$ be a convex quasiuniform structure on $\mathscr{P}$. The subset $\mathscr{B}$ of $\mathfrak{U}$ is called a *base* for $\mathfrak{U}$, whenever for every $U \in \mathfrak{U}$ there are $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}$ and $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ such that $\lambda_1 U_1 \cap \cdots \cap \lambda_n U_n \subseteq U$.

Suppose that $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is a locally convex cone. We shall say that $F \subseteq \mathscr{P}^2$ is *u-bounded* (*uniformly-bounded*) if it is absorbed by each $U \in \mathfrak{U}$. A subset A of $\mathscr{P}$ is called *bounded above* (*below*) whenever $A \times \{0\}$ (res. $\{0\} \times A$) is u-bounded (see [3]).

2. Solid sets and us-lattice cones

Locally convex lattice cones as a generalization of locally solid Riesz spaces has been introduced by Walter Roth in [10]. Here, we use the definition of this structure which have been presented in the terms of convex quasiuniform structures. We define solid sets in locally convex lattice cones and use them for our aim.

Definition 1. Let $\mathscr{P}$ be a cone and $\leqslant$ be a reflexive, transitive and antisymmetric order on $\mathscr{P}$ ($\mathscr{P}$ is an ordered cone). We shall say that $\mathscr{P}$ is a $\vee$ (or $\wedge$)-*lattice cone* whenever

(1) $a, b \in \mathscr{P}$ implies that $a \vee b \in \mathscr{P}$ (or $a \wedge b \in \mathscr{P}$);

(2) for $a, b, c \in \mathscr{P}$, $(a+c) \vee (b+c) = a \vee b + c$(or $(a+c) \wedge (b+c) = a \wedge b + c$).

The cone $\mathscr{P}$ is called a *lattice cone* if it is a $\vee$ and $\wedge$-lattice cone.

Let $\mathscr{P}$ and $\mathscr{Q}$ be $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cones. The linear operator $T : \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$ is called $\vee$ (or $\wedge$)-*lattice homomorphism* whenever $T(a \vee b) = T(a) \vee T(b)$ (or $T(a \wedge b) = T(a) \wedge T(b)$) for $a, b \in \mathscr{P}$.

Let E be a Riesz space. A subset A of E is called solid whenever $|b| \leqslant |a|$ and $a \in A$ imply that $b \in A$ (see [1]). We note that for $a \in E$, $|a| = a \vee (-a)$. Now, we present a definition of solid sets in lattice cones.

Definition 2. Let $\mathscr{P}$ be a $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone. We shall say that a subset B of $\mathscr{P}^2$, is $\vee$ (or $\wedge$)-*solid*, whenever

(1) $a \leqslant b$ implies that $(a, b) \in B$;

(2) $(a, b) \in \alpha B$ and $(c, b) \in \beta B$ imply that $(a \vee c, b) \in (\alpha + \beta)B$ (or $(a, b) \in \alpha B$ and $(a, c) \in \beta B$ imply that $(a, b \wedge c) \in (\alpha + \beta)B$).

If $\mathscr{P}$ is a lattice cone, the subset B is called *solid* whenever it is $\vee$-solid and $\wedge$-solid.

The $\vee$ (or $\wedge$)-solid hull of a subset B of $\mathscr{P}^2$ is the smallest (with respect to the set inclusion) $\vee$ (or $\wedge$)-solid subset of $\mathscr{P}^2$, which contains B, we denote it by $sh_{\vee}(B)$ (or $sh_{\wedge}(B)$). Also we denote the solid hull of B by $sh(B)$.

If E is a Riesz space and $A \subseteq E$ is solid (in the sense of the Riesz spaces) and convex, then $\tilde{A} = \{(c, b) \in E^2 : \exists\, a \in A,\, c \leqslant b + a\}$ is solid in the sense of lattice cones. Indeed, if $a \leqslant b$ for $a, b \in E$, then $(a, b) \in \tilde{A}$, since $0 \in A$ and $a \leqslant b + 0$. Now, let $(a, b) \in \gamma\tilde{A}$ and $(c, b) \in \lambda\tilde{A}$ for $\gamma, \lambda > 0$. Then we have $a \leqslant b + \gamma t$ and $c \leqslant b + \lambda t'$ for some $t, t' \in A$. Now, we have $t \vee 0, t' \vee 0 \in A$, since A is solid. Then $a \leqslant b + \gamma(t \vee 0) + \lambda(t' \vee 0)$ and $c \leqslant b + \gamma(t \vee 0) + \lambda(t' \vee 0)$. This shows that $a \vee c \leqslant b + \gamma(t \vee 0) + \lambda(t' \vee 0)$. Since A is convex, we conclude that $\gamma(t \vee 0) + \lambda(t' \vee 0) \in (\gamma + \lambda)A$. Therefore $(a \vee c, b) \in (\gamma + \lambda)\tilde{A}$. Similarly, we can prove that $\tilde{A}$ is $\wedge$-solid.

Definition 3. Let $\mathscr{P}$ be an ordered cone and $\mathfrak{U}$ be a convex quasiuniform structure on $\mathscr{P}$. We shall say that $\mathfrak{U}$ is compatible with the order structure of $\mathscr{P}$ whenever $a \leqslant b$ implies that $(a, b) \in U$ for all $U \in \mathfrak{U}$ for $a, b \in \mathscr{P}$.

Definition 4. Let $\mathscr{P}$ be a $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone and $\mathfrak{U}$ be a compatible convex quasiuniform structure on $\mathscr{P}$ such that $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is a locally convex cone. Then we shall say that $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is a *locally convex* $\vee$ (or $\wedge$)-*lattice cone*, whenever $\mathfrak{U}$ has a base of $\vee$ (or $\wedge$)-solid sets. If $\mathfrak{U}$ has a base of $\vee$ (or $\wedge$)-solid sets, then it is called $\vee$ (or $\wedge$)-*solid convex quasiuniform structure*. If $\mathscr{P}$ is a lattice cone, then the convex quasiuniform structure $\mathfrak{U}$ is called *solid* whenever it has a base of solid sets. The locally convex cone $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is called *locally convex lattice cone* if $\mathfrak{U}$ has a base of solid sets.

Example 1. Let (E, τ) be a locally convex solid Riesz space. Then τ has a base $\mathscr{V}$ of solid, convex and balanced subsets. For $V \in \mathscr{V}$, we set $\tilde{V} = \big\{(a, b) \in E^2 : \exists\, v \in V,\, a \leqslant b + v\big\}$.

Then $\tilde{\mathscr{V}} = \{\tilde{V} : V \in \mathscr{V}\}$ is a solid convex quasiuniform structure on E. Therefore $(E, \tilde{\mathscr{V}})$ is a locally convex lattice cone.

Let $\mathscr{P}$ be a cone. A subset B of $\mathscr{P}^2$ is called *uniformly convex* whenever it has the properties (U_1) and (U_3). The locally convex cone $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is called a *uc-cone* whenever $\mathfrak{U} = \{\alpha U : \alpha > 0\}$ for some $U \in \mathfrak{U}$ (see [3]). If $\mathscr{P}$ is a $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone and U is $\vee$ (or $\wedge$)-solid, then $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is called $\vee_{us}$ (or $\wedge_{us}$)-lattice cone. In the case that $\mathscr{P}$ is a lattice cone and U is solid, $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is called *us-lattice cone.* For example normed Riesz spaces and Banach lattices are us-lattice cones as locally convex cones. Also the locally convex cone $(\overline{\mathbb{R}}, \tilde{\mathscr{V}})$ is a us-lattice cone. We note that every us-lattice cone is a locally convex lattice cone.

Let $\mathscr{P}$ be a $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone and $B \subseteq \mathscr{P}^2$. We denote the smallest uniformly convex and $\vee$ (or $\wedge$)-solid subset of $\mathscr{P}^2$, which contains B by $us_\vee(B)$ (or $us_\wedge(B)$), and we call it the *uniformly convex* $\vee$ *(or* $\wedge$*)-solid* hull of B. If $\mathscr{P}$ be a lattice cone, then we denote the uniformly convex solid hull of B, by $us(B)$.

Proposition 1. *In a locally convex* $\vee$ *(or* $\wedge$*)-lattice cone, the* $\vee$ *(or* $\wedge$*)-solid hull of a u-bounded set is u-bounded.*

$\lhd$ Let $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ be a locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone and B be a u-bounded subset of $\mathscr{P}^2$. Let $\mathfrak{B}$ be a base of $\vee$ (or $\wedge$)-solid sets for $\mathfrak{U}$. For every $U \in \mathfrak{B}$ there is $\lambda > 0$ such that $B \subseteq \lambda U$. This shows that $us_\vee(B) \subseteq us_\vee(\lambda U) = \lambda U$ (or $us_\wedge(B) \subseteq us_\wedge(\lambda U) = \lambda U$), since U is $\vee$ (or $\wedge$)-solid. Therefore $us_\vee(B)$ (or $us_\wedge(B)$) is u-bounded. $\rhd$

Corollary 1. *In a locally convex lattice cone, the solid hull of a u-bounded set is u-bounded.*

Proposition 2. *Let* $\mathscr{P}$ *be a* $\vee$ *(or* $\wedge$*)-lattice cone and* $(\mathscr{P}_\gamma, \mathfrak{U}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ *be a family of locally convex* $\vee$ *(or* $\wedge$*)-lattice cones. Also, let for every* $\gamma \in \Gamma$, $g_\gamma : \mathscr{P} \to \mathscr{P}_\gamma$ *is a* $\vee$ *(or* $\wedge$*)-lattice homomorphism. Then the coarsest convex quasiuniform structure* $\mathfrak{U}$ *on* $\mathscr{P}$*, which makes all* g_γ *continuous, is* $\vee$ *(or* $\wedge$*)-solid and* $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ *is a locally convex* $\vee$ *(or* $\wedge$*)-lattice cone.*

$\lhd$ It is enough to show that for every $\gamma \in \Gamma$ and $\vee$ (or $\wedge$)-solid $U_\gamma \in \mathfrak{U}_\gamma$, $(g_\gamma \times g_\gamma)^{-1}(U_\gamma)$ is $\vee$ (or $\wedge$)-solid in the $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone $\mathscr{P}$. We prove the assertion for the case that $\mathscr{P}$ is a $\vee$-lattice cone. Indeed, let $a \leqslant b$ for $a, b \in \mathscr{P}$. Then $g_\gamma(a) \leqslant g_\gamma(b)$ for each $\gamma \in \Gamma$, since g_γ is a $\vee$-lattice homomorphism for each $\gamma \in \Gamma$. This implies that $(g_\gamma(a), g_\gamma(b)) \in U_\gamma$, since U_γ is $\vee$-solid for each $\gamma \in \Gamma$. Then $(a, b) \in (g_\gamma \times g_\gamma)^{-1}(U_\gamma)$. Now, let $(a, b) \in \alpha(g_\gamma \times g_\gamma)^{-1}(U_\gamma)$ and $(c, b) \in \beta(g_\gamma \times g_\gamma)^{-1}(U_\gamma)$ for $a, b, c \in \mathscr{P}$ and $\gamma \in \Gamma$. Then $(g_\gamma(a), g_\gamma(b)) \in \alpha U_\gamma$ and $(g_\gamma(c), g_\gamma(b)) \in \beta U_\gamma$. Now, since U_γ is $\vee$-solid an g_γ is $\vee$-lattice homomorphism, we conclude that $(g_\gamma(a \vee c), g_\gamma(b)) = (g_\gamma(a) \vee g_\gamma(c), g_\gamma(b)) \in (\alpha + \beta)U_\gamma$. Therefore $(a \vee c, b) \in (\alpha + \beta)(g_\gamma \times g_\gamma)^{-1}(U_\gamma)$. $\rhd$

Under the assumptions of Proposition 2, $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is called $\vee$ (or $\wedge$)-*order projective limit* of locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cones $(\mathscr{P}_\gamma, \mathfrak{U}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ by the $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphisms g_γ, $\gamma \in \Gamma$. Similarly, the concept of *order projective limit* can be defined.

Proposition 3. *Every locally convex* $\vee$ *(or* $\wedge$*)-lattice cone is the* $\vee$ *(or* $\wedge$*)-order projective limit of some* $\vee_{us}$ *(or* $\wedge_{us}$*)-lattice cones.*

$\lhd$ Let $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ be a locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone. Then $\mathfrak{U}$ has a base $\mathfrak{B}$ of $\vee$ (or $\wedge$)-solid sets. For $B \in \mathfrak{B}$, we set $\mathfrak{U}_B = \{\alpha B : \alpha > 0\}$. Then $\mathfrak{U}_B$ is a $\vee$ (or $\wedge$)-solid convex quasiuniform structure on $\mathscr{P}$ and $(\mathscr{P}, \mathfrak{U}_B)$ is a locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone for each $B \in \mathfrak{B}$. Now, it is easy to see that $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is the $\vee$ (or $\wedge$)-order projective limit of $(\mathscr{P}, \mathfrak{U}_B)_{B \in \mathfrak{B}}$ by the identity mappings. $\rhd$

Corollary 2. *Every locally convex lattice cone is the order projective limit of some us-lattice cones.*

In the special case of locally convex solid Riesz spaces, Proposition 3 yields that every (Hausdorff) locally convex solid Riesz space is the projective limit of (normed) seminormed Riesz spaces.

3. Order bornological locally convex lattice cones

Suppose that $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ and $(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ are locally convex cones and $T:\mathscr{P}\to\mathscr{Q}$ is a linear operator. We shall say T is *u-bounded* if $(T\times T)(F)$ is u-bounded in $\mathscr{Q}^2$ for every u-bounded subset F of $\mathscr{P}^2$. We shall say $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ is a *bornological cone* if every u-bounded linear operator from $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ into any locally convex cone is continuous (see [3]).

Let $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ and $(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ be locally convex cones. The linear operator $T:\mathscr{P}\to\mathscr{Q}$ is called *bounded below* whenever T maps bounded below subsets of $\mathscr{P}$ into bounded below subsets of $\mathscr{Q}$. The locally convex cone $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ is called b-*bornological* whenever every bounded below linear operator from $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ into other locally convex cone is continuous (see [3]).

Bornological and b-bornological locally convex cones have been studied in [3]. Firstly, we review the construction of this structure briefly: Let $\mathscr{P}$ be a cone and U be a uniformly convex subset of $\mathscr{P}$. We set $\mathscr{P}_U=\{a\in\mathscr{P}:\exists\,\lambda>0,\ (0,a)\in\lambda U\}$ and $\mathfrak{U}_U=\{\alpha U:\alpha>0\}$. Then $(\mathscr{P}_U,\mathfrak{U}_U)$ is a locally convex cone (a uc-cone). In [3], we proved that there is the finest convex quasiuniform structure $\mathfrak{U}_\tau$ (or $\mathfrak{U}_{b\tau}$) on locally convex cone $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ such that $\mathscr{P}^2$ (or $\mathscr{P}$) has the same u-bounded (or bounded below) subsets under $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{U}_\tau$(or $\mathfrak{U}_{b\tau}$). The locally convex cone $(\mathscr{P},\mathfrak{U}_\tau)$ is the inductive limit of the uc-cones $(\mathscr{P}_U,\mathfrak{U}_U)_{U\in\mathfrak{B}}$, where $\mathfrak{B}$ is the collection of all uniformly convex u-bounded subsets of $\mathscr{P}^2$. Also $(\mathscr{P},\mathfrak{U}_{b\tau})$ is the inductive limit of the uc-cones $(\mathscr{P}_U,\mathfrak{U}_U)_{U\in\mathfrak{B}}$, where $\mathfrak{B}=\{uch(\{0\}\times B):\ B\ \textit{is bounded below}\}$. If $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ is bornological or b-bornological, then $\mathfrak{U}$ is equivalent to $\mathfrak{U}_\tau$ or $\mathfrak{U}_{b\tau}$, respectively.

Definition 5. We shall say that the locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ is $\vee$ (or $\wedge$)-order bornological whenever every u-bounded $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism from $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ in to any locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone is continuous.

Obviously, every bornological locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone is $\vee$ (or $\wedge$)-order bornological. For example, every $\vee_{us}$ (or $\wedge_{us}$)-lattice cone is $\vee$ (or $\wedge$)-order bornological. Also every us-lattice cone is order bornological. It has been proved in [3], that every locally convex cone which its convex quasiuniform structure has countable base is bornological. This shows that if $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ is a locally convex lattice cone and $\mathfrak{U}$ has a countable base, then $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ is order bornological.

Example 2. Let X be a topological space, and let $\mathscr{P}$ be the cone of all $\overline{\mathbb{R}}_+$-valued continuous functions on X, where $\overline{\mathbb{R}}_+$ is endowed with the usual, that is the one-point compactification topology. We consider on $\mathscr{P}$ the pointwise order. For each $\varepsilon>0$, we set $\tilde{\varepsilon}=\{(f,g)\in\mathscr{P}^2:\forall\,x\in X,\ f(x)\leqslant g(x)+\varepsilon\}$. Then for each $\varepsilon>0$, $\tilde{\varepsilon}$ is a solid set and $\mathfrak{U}=\{\tilde{\varepsilon}:\varepsilon>0\}$ is a solid convex qusiuniform structure. Then $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ is a locally convex lattice cone. We note that $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ is order bornological locally convex lattice cone, since it is a us-lattice cone. The cone $\mathscr{P}$ is not a vector space and it may not be embedded in any vector space.

Theorem 1. *Let $(\mathscr{P}_\gamma,\mathfrak{U}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ be a family of locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cones. Also let $\mathscr{P}$ be a $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone and for each $\gamma\in\Gamma$, $f_\gamma:\mathscr{P}_\gamma\to\mathscr{P}$ be a $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism such that $\mathscr{P}=span\,(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}f_\gamma(\mathscr{P}_\gamma))$. Then $\mathscr{P}$ endowed with the convex quasiuniform structure $\mathfrak{U}$ created by the sets of the form $us_\vee(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(f_\gamma\times f_\gamma)(U_\gamma))$ (or $us_\wedge(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(f_\gamma\times f_\gamma)(U_\gamma))$), where $U_\gamma\in\mathfrak{U}_\gamma$, is a locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone.*

$\lhd$ We consider the case that $(\mathscr{P}_\gamma,\mathfrak{U}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ are locally convex $\vee$-lattice cones. Firstly, we prove that the elements of $\mathscr{P}$ are bounded below with respect to the sets $us_\vee(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}f_\gamma(U_\gamma))$.

Let $a \in \mathscr{P}$. Then there are $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$, and $a_{\gamma_i} \in \mathscr{P}_{\gamma_i}$, $i = 1, \dots, n$, such that $a = \sum_{i=1}^{n} f_{\gamma_i}(a_{\gamma_i})$. There are $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots n$, such that $(0, a_{\gamma_i}) \in \lambda_i U_{\gamma_i}$. This shows that $(0, a) \in \lambda us(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(U_\gamma))$, where $\lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i$. Then $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is a locally convex cone. Since the sets $us_\vee(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(U_\gamma))$ are $\vee$-solid, we conclude that $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is a locally convex $\vee$-lattice cone. A similar argument yields our claim for the case that $(\mathscr{P}_\gamma, \mathfrak{U}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ are locally convex $\wedge$-lattice cones. $\rhd$

The projective and inductive limits had been investigated for topological vector spaces and locally convex cones in [8] and [7], respectively. Under the assumptions of Theorem 1, $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is called the $\vee$ (or $\wedge$)-order inductive limit of the locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cones $(\mathscr{P}_\gamma, \mathfrak{U}_\gamma)$, under the $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphisms $f_\gamma : \mathscr{P}_\gamma \to \mathscr{P}$. Similarly, the concept of order inductive limit can de defined.

Corollary 3. *An order inductive limit of locally convex lattice cones is a locally convex lattice cone.*

Corollary 4. *An order inductive limit of locally convex solid Riesz spaces is a locally convex solid Riesz space.*

Proposition 4. *Let $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ be the $\vee$ (or $\wedge$)-order inductive limit of locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cones $(\mathscr{P}_\gamma, \mathfrak{U}_\gamma)\gamma \in \Gamma$, under lattice homomorphisms $f_\gamma : \mathscr{P}_\gamma \to \mathscr{P}$, $\gamma \in \Gamma$, and $(\mathscr{Q}, \mathscr{W})$ be a locally convex cone. Then the linear mapping $T : \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$ is continuous if and only if for every $\gamma \in \Gamma$, Tof_γ is continuous.*

$\lhd$ The mapping T is continuous if and only if for each $W \in \mathscr{W}$, $(T \times T)^{-1}(W) \in \mathfrak{U}$. By Theorem 1, this holds if and only if for every $\gamma \in \Gamma$

$$(f_\gamma \times f_\gamma)^{-1}((T \times T)^{-1}(W)) = (\mathrm{Tof}_\gamma \times \mathrm{Tof}_\gamma)^{-1}(W) \in \mathfrak{U}_\gamma.$$

In the other words, we require the continuity of each Tof_γ for each $\gamma \in \Gamma$. $\rhd$

Proposition 5. *An $\vee$ (or $\wedge$)-order inductive limit of $\vee$ (or $\wedge$)-order bornological locally convex lattice cones is $\vee$ (or $\wedge$)-order bornological.*

$\lhd$ Let $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ be the $\vee$ (or $\wedge$)-order inductive limit of $\vee$ (or $\wedge$)-order bornological locally convex lattice cones $(\mathscr{P}_\gamma, \mathfrak{U}_\gamma)$ by the $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphisms f_γ, $\gamma \in \Gamma$. Also suppose that T be a u-bounded $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism from $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ into another locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone $(\mathscr{Q}, \mathscr{W})$. Then for every $\gamma \in \Gamma$, Tof_γ is a u-bounded $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism on $(\mathscr{P}_\gamma, \mathfrak{U}_\gamma)$. Since $(\mathscr{P}_\gamma, \mathfrak{U}_\gamma)$ is $\vee$ (or $\wedge$)-order bornological, we conclude that Tof_γ is continuous for each $\gamma \in \Gamma$, by Proposition 4. Therefore T is continuous by Proposition 4. $\rhd$

Similarly, one can prove that an order inductive limit of order bornological locally convex lattice cones is order bornological.

Theorem 2. *Let $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ be a locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone. Then there is the finest $\vee$ (or $\wedge$)-solid convex quasiuniform structure $\mathfrak{U}^{\vee}_{|\tau|}$ (or $\mathfrak{U}^{\wedge}_{|\tau|}$) on $\mathscr{P}$ under which $\mathscr{P}^2$ has the same u-bounded subsets as under $\mathfrak{U}$. Under the convex quasiuniform structure $\mathfrak{U}^{\vee}_{|\tau|}$ (or $\mathfrak{U}^{\wedge}_{|\tau|}$), $\mathscr{P}$ is a $\vee$ (or $\wedge$)-order bornological cone, the $\vee$ (or $\wedge$)-order inductive limit of a family of $\vee_{us}$ (or $\wedge_{us}$)-sublattice cones of $\mathscr{P}$. The locally convex cone $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is $\vee$ (or $\wedge$)-order bornological if and only if $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{U}^{\vee}_{|\tau|}$ (or $\mathfrak{U}^{\wedge}_{|\tau|}$) are equivalent.*

$\lhd$ We prove the theorem for the case that $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is a locally convex $\vee$-lattice cone. Let $\mathfrak{B}$ be the collection of all u-bounded $\vee$-solid subsets of $\mathscr{P}^2$. For $B \in \mathfrak{B}$, we set

$$\mathscr{P}_B = \{a \in \mathscr{P} :\ \exists\, \lambda > 0 \ s.t.\ (0, a) \in \lambda B\} \quad \text{and} \quad \mathfrak{U}_B = \{\alpha B :\ \alpha > 0\}.$$

We consider on $\mathscr{P}_B$ the order induced by the original order of $\mathscr{P}$. Since B is $\vee$-solid, it is easy to see that $(\mathscr{P}_B, \mathfrak{U}_B)$ is a locally convex $\vee_{us}$-lattice cone. We have $\mathscr{P} = \bigcup_{B\in\mathfrak{B}} \mathscr{P}_B$. Indeed, for $a \in \mathscr{P}$, Let B' be the smallest uniformly convex $\vee$-solid subset of $\mathscr{P}^2$, which contains $\{(0,a)\}$. Then $B' \in \mathfrak{B}$ and $a \in \mathscr{P}_{B'}$. Now let $(\mathscr{P}, \mathfrak{U}^{\vee}_{|\tau|})$ be the $\vee$-order inductive limit of $(\mathscr{P}_B, \mathfrak{U}_B)_{B\in\mathfrak{B}}$, under the inclusion mappings $I_B : \mathscr{P}_B \to \mathscr{P}$. Then $(\mathscr{P}, \mathfrak{U}^{\vee}_{|\tau|})$ is a locally convex $\vee$-lattice cone by Theorem 1. The u-boundedness of $B \in \mathfrak{B}$ shows that $I_B : (\mathscr{P}_B, \mathfrak{U}_B) \to (\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is continuous. Now, we conclude that $\mathfrak{U}^{\vee}_{|\tau|}$ is finer than $\mathfrak{U}$ by the definition of $\vee$-order inductive limit. Then u-boundedness in $\mathfrak{U}^{\vee}_{|\tau|}$ implies u-boundedness in $\mathfrak{U}$. On the other hand, if $F \subseteq \mathscr{P}^2$ is u-bounded with respect to $\mathfrak{U}$, then it is u-bounded in $(\mathscr{P}_{\tilde{F}}, \mathfrak{U}_{\tilde{F}})$, where $\tilde{F} = us_{\vee}(F)$. Now, the continuity of $I_{\tilde{F}}$ yields that F is u-bounded with respect to $\mathfrak{U}^{\vee}_{|\tau|}$. Also $(\mathscr{P}, \mathfrak{U}^{\vee}_{|\tau|})$ is $\vee$-order bornological by Proposition 5. For the final part of theorem, we note that the identity mapping $I : (\mathscr{P}, \mathfrak{U}) \to (\mathscr{P}, \mathfrak{U}^{\vee}_{|\tau|})$ is a u-bounded $\vee$-lattice homomorphism. Now, if $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is order bornological, then I is continuous. Therefore $\mathfrak{U}$ is finer than $\mathfrak{U}^{\vee}_{|\tau|}$. On the other hand $\mathfrak{U}_{|\tau|}$ is finer than $\mathfrak{U}$. Then they are equivalent. Similarly we can prove the theorem for the case that $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is a locally convex $\wedge$-lattice cone. $\rhd$

Corollary 5. *If $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is a $\vee$ (or $\wedge$)-order bornological locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone, then $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{\vee}_{|\tau|}$ (or $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{\wedge}_{|\tau|}$).*

Corollary 6. *If $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is a locally convex lattice cone, then there is the finest solid convex quasiuniform structure $\mathfrak{U}_{|\tau|}$ on $\mathscr{P}$, under which $\mathscr{P}^2$ has the same u-bounded subsets as under $\mathfrak{U}$. Under the convex quasiuniform structure $\mathfrak{U}_{|\tau|}$, $\mathscr{P}$ is an order bornological cone, the order inductive limit of a family of us-sublattice cones of $\mathscr{P}$. The locally convex cone $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is order bornological if and if $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{U}_{|\tau|}$ are equivalent.*

Proposition 6. *Let $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ be a locally convex lattice cone. Then $\mathfrak{U}_{\tau}$ is finer than $\mathfrak{U}_{|\tau|}$.*

$\lhd$ Since $\mathscr{P}^2$ has the same u-bounded subsets under $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{U}_{|\tau|}$, and $\mathfrak{U}_{\tau}$ is the finest convex quasiuniform structure that has this property, we conclude that $\mathfrak{U}_{\tau}$ is finer than $\mathfrak{U}_{|\tau|}$. $\rhd$

Proposition 7. *Every bornological locally convex lattice cone is order bornological.*

$\lhd$ Let $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ be a bornological locally convex lattice cone. Then we have $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{\tau}$. Now, since $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}_{|\tau|} \subseteq \mathfrak{U}_{\tau}$, we conclude that $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{|\tau|}$. $\rhd$

In the following theorem we characterize $\vee$ (or $\wedge$)-order bornological locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cones

Theorem 3. *For locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ the followings are equivalent:*

(*a*) *$(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is $\vee$(or $\wedge$)-order bornological;*

(*b*) *for every uniformly convex $\vee$ (or $\wedge$)-solid subset V of $\mathscr{P}^2$ that absorbs all u-bounded subsets, there is $U \in \mathfrak{U}$ such that $U \subseteq V$;*

(*c*) *every u-bounded $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism from $\mathscr{P}$ into any $\vee_{us}$ (or $\wedge_{us}$)-lattice cone is continuous.*

(*d*) *$(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is the $\vee$ (or $\wedge$)-order inductive limit of some us-lattice subcones of $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$.*

$\lhd$ The statements (a) and (d) are equivalent by Proposition 5 and Theorem 2.

($a \to b$): Let (a) holds and V be a uniformly convex $\vee$ (or $\wedge$)-solid subset of $\mathscr{P}^2$, that absorbs all u-bounded subsets. We set $\mathscr{V} = \{\alpha V : \alpha > 0\}$. Then $(\mathscr{P}, \mathscr{V})$ is a locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone. The identity mappings $I : (\mathscr{P}, \mathfrak{U}) \to (\mathscr{P}, \mathscr{V})$ is u-bounded, since V absorbs all u-bounded subsets. On the other hand I is a $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism. Now (a) yields that I is continuous. Therefore there exists $U \in \mathfrak{U}$ such that $U \subseteq V$.

($b \to a$): Let (b) holds and T be a u-bounded $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism from $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ into another locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone $(\mathscr{Q}, \mathscr{W})$. Let $W \in \mathscr{W}$ be $\vee$ (or $\wedge$)-solid. Then

$(T\times T)^{-1}(W)$ is a uniformly convex $\vee$ (or $\wedge$)-solid subset of $\mathscr{P}^2$, since T is a $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism. Now there is $U\in\mathfrak{U}$ such that $U\subseteq(T\times T)^{-1}(W)$ by (b). Then T is continuous.

$(a\to c)$: The proof is clear.

$(c\to a)$: Suppose that (c) holds and T is a u-bounded $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism from $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ into another locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone $(\mathscr{Q},\mathscr{W})$. For $W\in\mathscr{W}$, we set $\mathscr{W}_W=\{\alpha W:\alpha>0\}$. Clearly for every $W\in\mathscr{W}$, $T:(\mathscr{P},\mathfrak{U})\to(\mathscr{Q},\mathscr{W}_W)$ is a u-bounded $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism and then it is continuous by (c). Now, let $W\in\mathscr{W}$. Then we have $W\in\mathscr{W}_W$. Therefore there is $U\in\mathfrak{U}$ such that $(T\times T)(U)\subseteq W$. $\rhd$

Corollary 7. *As a special case in locally convex solid Riesz spaces, Theorem* 3, (c) *yields that a locally convex solid Riesz space E is order bornological if and only if every bounded lattice homomorphism from E into a seminormed Riesz space is continuous.*

Definition 6. Let $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ and $(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ be locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cones. We shall say that T is $|\tau|_\vee$ (or $|\tau|_\wedge$)-continuous whenever $T:(\mathscr{P},\mathfrak{U}^\vee_{|\tau|})\to(\mathscr{Q},\mathscr{W}^\vee_{|\tau|})$ (or $T:(\mathscr{P},\mathfrak{U}^\wedge_{|\tau|})\to(\mathscr{Q},\mathscr{W}^\wedge_{|\tau|})$) is continuous. Similarly, we can define the concept of $|\tau|$-continuity.

Proposition 8. *Let $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ and $(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ be locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cones. Then the $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism $T:(\mathscr{P},\mathfrak{U})\to(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ is u-bounded if and only if T is $|\tau|_\vee$ (or $|\tau|_\wedge$)-continuous.*

$\lhd$ Let $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ and $(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ be locally convex $\vee$-lattice cones and $T:(\mathscr{P},\mathfrak{U})\to(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ be a u-bounded $\vee$-lattice homomorphism. Then $T:(\mathscr{P},\mathfrak{U}^\vee_{|\tau|})\to(\mathscr{Q},\mathscr{W}^\vee_{|\tau|})$ is u-bounded, since $\mathscr{P}^2$ has the same u-bounded subsets under $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{U}^\wedge_{|\tau|}$. Now, since $(\mathscr{P},\mathfrak{U}^\vee_{|\tau|})$ is $\vee$-order bprnological, we conclude that T is $|\tau|_\vee$-continuous. One the other hand if T is $|\tau|_\vee$-continuous, then $T:(\mathscr{P},\mathfrak{U}^\vee_{|\tau|})\to(\mathscr{Q},\mathscr{W}^\vee_{|\tau|})$ is u-bounded. This implies that $T:(\mathscr{P},\mathfrak{U})\to(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ is u-bounded. On can prove the assertion for the case that $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ and $(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ are locally convex $\wedge$-lattice cones. $\rhd$

Corollary 8. *Let $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ and $(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ be locally convex lattice cones. Then the lattice homomorphism $T:(\mathscr{P},\mathfrak{U})\to(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ is u-bounded if and only if it is $|\tau|$-continuous.*

Corollary 9. *Every continuous $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism is $|\tau|_\vee$ (or $|\tau|_\wedge$)-continuous. Also, every continuous lattice homomorphism is $|\tau|$-continuous.*

Let $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ be a locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone. We investigate the behavior of the convex quasiuniform structure $\mathfrak{U}^\vee_{|\tau|}$ (or $\mathfrak{U}^\wedge_{|\tau|}$) under $\vee$ (or $\wedge$)-order inductive limit.

Theorem 4. *Let $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ be the $\vee$ (or $\wedge$)-order inductive limit of locally convex lattice cones $(\mathscr{P}_\gamma,\mathfrak{U}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ under the $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphisms $f_\gamma:\mathscr{P}_\gamma\to\mathscr{P}$, $\gamma\in\Gamma$. Then $(\mathscr{P},\mathfrak{U}_{|\tau|})$ is the $\vee$ (or $\wedge$)-$\vee$ (or $\wedge$)-order inductive limit of locally convex lattice cones $(\mathscr{P}_\gamma,\mathfrak{U}^\vee_{|\tau|_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$ (or $(\mathscr{P}_\gamma,\mathfrak{U}^\wedge_{|\tau|_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$) under $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphisms $f_\gamma:\mathscr{P}_\gamma\to\mathscr{P}$, $\gamma\in\Gamma$.*

$\lhd$ We prove the theorem for the case that $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ is the $\vee$-order inductive limit of locally convex lattice cones $(\mathscr{P}_\gamma,\mathfrak{U}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. For every $\gamma\in\Gamma$, $f_\gamma:(\mathscr{P}_\gamma,\mathfrak{U}^\vee_{|\tau|_\gamma})\to(\mathscr{P},\mathfrak{U}_{|\tau|})$ is continuous by Proposition 8. Let $(\mathscr{P},\mathscr{W})$ be the $\vee$-order inductive limit of locally convex lattice cones $(\mathscr{P}_\gamma,\mathfrak{U}^\vee_{|\tau|_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$ under $\vee$-lattice homomorphisms $f_\gamma:\mathscr{P}_\gamma\to\mathscr{P}$, $\gamma\in\Gamma$. Then $\mathfrak{U}^\vee_{|\tau|_\gamma}\subseteq\mathscr{W}$, by the definition of $\vee$-order inductive limit. We claim that $\mathscr{P}^2$ has the same u-bounded subsets under $\mathscr{W}$ and $\mathfrak{U}^\vee_{|\tau|_\gamma}$. If B is u-bounded under $\mathfrak{U}^\vee_{|\tau|_\gamma}$, then it is u-bounded under $\mathfrak{U}$. This shows that for $\gamma\in\Gamma$, $(f_\gamma\times f_\gamma)^{-1}(B)$ is u-bounded under $\mathfrak{U}_\gamma$, and then in $\mathfrak{U}^\vee_{|\tau|_\gamma}$. Therefore B is u-bounded under $\mathscr{W}$. Now, this shows that the identity mapping $I:(\mathscr{P},\mathfrak{U}^\vee_{|\tau|})\to(\mathscr{P},\mathscr{W})$ is

u-bounded. Then it is continuous, since $(\mathscr{P},\mathfrak{U}^{\vee}_{|\tau|})$ is $\vee$-order bornological. Then $W = \mathfrak{U}^{\vee}_{|\tau|}$. A similar argument yields our claim for the other case. $\rhd$

Corollary 10. *The convex quasiuniform structure* $\mathfrak{U}_{|\tau|}$ *is stable under the order inductive limit.*

In [3], we introduced the weak convex quasiuniform structure on a locally convex cone. Here, we define the absolute weak convex quasiuniform structure on a locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone.

Let $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ be a locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone and let $L_\vee$(or $L_\wedge$) is the set of all continuous $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism from $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ into $(\overline{\mathbb{R}},\tilde{\mathscr{V}})$. We denote by $\mathfrak{U}_{|\sigma|}(\mathscr{P},L_\vee)$ (or $\mathfrak{U}_{|\sigma|}(\mathscr{P},L_\wedge)$) the coarsest convex quasiuniform structure on $\mathscr{P}$, that makes all $\mu\in L_\vee$ (or $\mu\in L_\wedge$), continuous. In fact $(\mathscr{P},\mathfrak{U}_{|\sigma|}(\mathscr{P},L_\vee))$ (or $(\mathscr{P},\mathfrak{U}_{|\sigma|}(\mathscr{P},L_\wedge))$) is the $\vee$ (or $\wedge$)-order projective limit of $(\overline{\mathbb{R}},\tilde{\mathscr{V}})$ under all $\mu\in L_\vee$ (or $\mu\in L_\wedge$). This shows that $(\mathscr{P},\mathfrak{U}_{|\sigma|}(\mathscr{P},L_\vee))$ (or $(\mathscr{P},\mathfrak{U}_{|\sigma|}(\mathscr{P},L_\wedge))$) is a locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone. If $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ is a locally convex lattice cone and L is the set of all continuous lattice homomorphism from $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ into $(\overline{\mathbb{R}},\tilde{\mathscr{V}})$, then we can define the solid convex quasiuniform structure on $\mathfrak{U}_{|\sigma|}(\mathscr{P},L)$ in a similar way.

For a locally convex lattice cone $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$, it is easy to see that $\mathfrak{U}_{\sigma}(\mathscr{P},\mathscr{P}^*)$ is finer than $\mathfrak{U}_{|\sigma|}(\mathscr{P},L)$. But for some locally convex lattice cones, these convex quasiuniform structures are equivalent.

Example 3. Let $\overline{\mathbb{R}}_+=\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$. We set $U=\{(a,b)\in(\overline{\mathbb{R}}_+)^2 : a\leqslant b\}$ and $\mathfrak{U}=\{U\}$. If we consider usual order on $\overline{\mathbb{R}}_+$, then $\mathfrak{U}$ is a solid convex quasiuniform structure on $\overline{\mathbb{R}}_+$ and $(\overline{\mathbb{R}}_+,\mathfrak{U})$ is a locally convex lattice cone (a *us*-lattice cone). The dual cone of $(\overline{\mathbb{R}}_+,\mathfrak{U})$ consists of all nonnegative reals an functionals $\overline{0}$ and $\overline{+\infty}$ acting as:

$$\overline{0}(a)=\begin{cases}+\infty, & a=+\infty,\\ 0 & else\end{cases}\quad\text{and}\quad \overline{+\infty}(a)=\begin{cases}0, & a=0,\\ +\infty & else,\end{cases}$$

respectively. Since all elements of $\overline{\mathbb{R}}^*_+$ are lattice homomorphism, we conclude that $\mathfrak{U}_{|\sigma|}(\overline{\mathbb{R}}_+,L)=\mathfrak{U}_{\sigma}(\overline{\mathbb{R}}_+,\overline{\mathbb{R}}^*_+)$. In fact, we have $L=\mathscr{P}^*$. It is easy to see that $\mathfrak{U}$ is strictly finer than $\mathfrak{U}_{|\sigma|}(\overline{\mathbb{R}}_+,L)$.

Definition 7. Let $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ and $(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ be locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cones. The linear operator $T:\mathscr{P}\to\mathscr{Q}$ is called $|\sigma|$-continuous, whenever $T:(\mathscr{P},\mathfrak{U}_{|\sigma|}(\mathscr{P},L_\vee)))\to(\mathscr{Q},\mathscr{W}_{|\sigma|}(\mathscr{Q},L_\vee))$ (or $T:(\mathscr{P},\mathfrak{U}_{|\sigma|}(\mathscr{P},L_\wedge)))\to(\mathscr{Q},\mathscr{W}_{|\sigma|}(\mathscr{Q},L_\wedge)))$ is continuous.

Proposition 9. *Let $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ and $(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ be locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cones. Then every continuous $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism from $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ into $(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ is $|\sigma|$-continuous.*

$\lhd$ We prove the assertion for the case that $(\mathscr{P},\mathfrak{U})$ and $(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ be locally convex $\vee$-lattice cones. We denote the sets of all continuous $\vee$-lattice homomorphisms on $\mathscr{Q}$ and $\mathscr{P}$ by $L'_\vee$ and $L_\vee$, respectively. Let $T:(\mathscr{P},\mathfrak{U})\to(\mathscr{Q},\mathscr{W})$ be a continuous $\vee$-lattice homomorphism and $W_{|\sigma|}\in\mathscr{W}_{|\sigma|}(\mathscr{Q},L'_\vee)$. Then there are $n\in\mathbb{N}$ and $\mu_1,\dots,\mu_n\in L'_\vee$ such that

$$\bigcap_{i=1}^{n}\Lambda_i^{-1}(\tilde{1})\subseteq W_{|\sigma|},$$

where $\Lambda_i=\mu_i\times\mu_i$, for $i=1,\dots,n$. We have $\mu_i oT\in L_\vee$ for $i=1,\dots,n$, since T is a continuous $\vee$-lattice homomorphism. We set $\Gamma_i=\mu_i oT\times\mu_i oT$, for $i=1,\dots,n$. Then $U_{|\sigma|}=\bigcap_{i=1}^{n}\Gamma_i^{-1}(\tilde{1})\in\mathfrak{U}_{|\sigma|}(\mathscr{P},L_\vee)$ and we have $(T\times T)(U_{|\sigma|})\subseteq W_{|\sigma|}$. $\rhd$

Theorem 5. *Let $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ be a $\vee$ (or $\wedge$)-order bornological locally convex lattice cone and $(\mathscr{Q}, \mathscr{W})$ be a locally convex $\vee$ (or $\wedge$)-lattice cone which has the same u-bounded subsets under $\mathscr{W}$ and $\mathscr{W}_{|\sigma|}(\mathscr{Q}, L_\vee)$) (or $\mathscr{W}_{|\sigma|}(\mathscr{Q}, L_\vee)$)). Then every $|\sigma|$-continuous $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism from $\mathscr{P}$ into $\mathscr{Q}$ is continuous.*

$\lhd$ Let T be a $|\sigma|$-continuous $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism from $\mathscr{P}$ into $\mathscr{Q}$. Since every u-bounded subset is weakly u-bounded, we conclude that T is u-bounded by the assumptions. Now, since $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ is order bornological, T is continuous. $\rhd$

Corollary 11. *Let $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$ be a $\vee$ (or $\wedge$)-order bornological locally convex lattice cone. Then every linear functional on $(\mathscr{P}, \mathfrak{U})$, which is $\vee$ (or $\wedge$)-lattice homomorphism, is continuous if and only if it is $|\sigma|$-continuous.*

References

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—N. Y.: Acad. Press, 1985.—xvi+367 p.
2. *Ayaseh D., Ranjbari A.* Bornological convergence in locally convex cones // Mediterr. J. Math.—2016.—Vol. 13 (4).—P. 1921–1931.
3. *Ayaseh D., Ranjbari A.* Bornological locally convex cones // Le Matematiche.—2014.—Vol. 69 (2).—P. 267–284.
4. *Ayaseh D., Ranjbari A.* Locally convex quotient lattice cones // Math. Nachr.—2014.—Vol. 287 (10).—P. 1083–1092.
5. *Keimel K., Roth W.* Ordered Cones and Approximation.—Heidelberg–Berlin–N. Y.: Springer Verlag, 1992.—(Lecture Notes in Math.; Vol. 1517).
6. *Ranjbari A.* Strict inductive limits in locally convex cones // Positivity.—2011.—Vol. 15 (3).—P. 465–471.
7. *Ranjbari A., Saiflu H.* Projective and inductive limits in locally convex cones // J. Math. Anal. Appl.—2007.—Vol. 332.—P. 1097–1108.
8. *Robertson A. P., Robertson W.* Topological Vector Spaces.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1964.—viii+158.—(Cambridge Tracts in Math.; Vol. 53).
9. *Roth W.* Locally convex quotient cones // J. Convex Anal.—2011.—Vol. 18, № 4.—P. 903–913.
10. *Roth W.* locally convex lattice cones // J. Convex Anal.—2009.—Vol. 16, № 1.—P. 1–8.
11. *Roth W.* Operator-Valued Measures and Integrals for Cone-Valued Functions.—Heidelberg–Berlin–N. Y.: Springer Verlag, 2009.—(Lecture Notes in Math.; Vol. 1964).

Received 21 November, 2015

Davood Ayaseh
Department of Pure Mathematics, University of Tabriz
29 Bahman Blvd., Tabriz, Iran
E-mail: d_ayaseh@tabrizu.ac.ir

Asghar Ranjbari
Department of Pure Mathematics, University of Tabriz
29 Bahman Blvd., Tabriz, Iran
E-mail: ranjbari@tabrizu.ac.ir

ПОРЯДКОВО БОРНОЛОГИЧЕСКИЕ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ РЕШЕТОЧНЫЕ КОНУСЫ

Айазех Д., Ранджбари А.

В статье вводятся понятия us-решеточного конуса и порядково борнологического локально выпуклого решеточного конуса. В специальном случае локально солидного (= нормального) пространства Рисса (= векторной решетки) эти понятия сводятся к хорошо известным понятиям полунормированного пространства Рисса и порядково борнологического пространства Рисса, соответственно. Вводится также понятие солидного множества в локально выпуклом конусе и даются некоторые характеризации порядково борнологических локально выпуклых решеточных конусов.

Ключевые слова: локально выпуклый решеточный конус, порядково борнологический конус.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 31–40

УДК **517.955**

К ВОПРОСУ О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ

Р. Ч. Кулаев

Посвящается 80-летию
Алексея Борисовича Шабата

Работа посвящена вопросам неосцилляции дифференциальных уравнений четвертого порядка на геометрическом графе. Для таких уравнений вводится понятие критической неосцилляции, которое является обобщением точного промежутка неосцилляции в классической теории. Понятие неосцилляции дается в терминах свойств специальной фундаментальной системы решений уравнения на графе, что вносит новые черты в теорию, но тем не менее оставляет неизменными основные свойства одномерной теории.

Ключевые слова: граф, дифференциальное уравнение на графе, неосцилляция, функция Грина, осцилляционность.

Данная статья является продолжением работ [1–4], в которых развивалась теория неосцилляции дифференциальных уравнений, заданных на геометрическом графе. Неосцилляция дифференциального уравнения занимает одно из центральных мест в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Основное значение это свойство приобретает в контексте исследования осцилляционных свойств спектра краевых задач, и в первую очередь — положительности функции Грина краевых задач [5–10].

В представленной работе изучается свойство неосцилляции уравнений четвертого порядка на графе, которые возникают при описании деформаций упругих стержневых систем. В [1–4] была установлена связь неосцилляции с положительностью функции Грина некоторых классов краевых задач четвертого порядка на графе. Основой развития теории в указанных работах является критерий положительности функции Грина краевых задач 4-го порядка на графах (см. [11]), согласно которому положительность функции Грина эквивалентна положительной разрешимости специфических краевых задач. Этот результат позволил в качестве отправной точки при изучении неосцилляции уравнения на графе брать свойство положительности системы решений уравнения на графе, удовлетворяющих на границе графа специальным краевым условиям (см. [1–4]). При таком подходе проявляется специфика уравнений 4-го порядка на графах и возникают два типа неосцилляции — слабая и сильная. Для классического случая, когда внутренние вершины графа отсутствуют, эти понятия не различимы, а в случае, когда множество внутренних вершин графа не пусто, они разнятся. Как оказалось, слабая неосцилляция обеспечивает положительность функции Грина для класса задач Дирихле [2, 3], а сильная неосцилляция — положительность функции Грина для более широкого класса краевых задач [4].

В статье [1, § 4] отмечалось, что отличительной особенностью свойства неосцилляции уравнения четвертого порядка на графе является то, что из неосцилляции (слабой или сильной) уравнения на графе, вообще говоря, не следует его неосцилляция на любом подграфе (хотя такой вариант не исключен [12]). В данной работе будет показано, что эта особенность характерна именно для уравнений, заданных на графе, негомеоморфном интервалу. Если же граф состоит из последовательно соединенных в цепь ребер, то, как будет показано ниже, из неосцилляции уравнения на графе-цепочке следует его неосцилляция и на любом подграфе. Это означает, что предложенный в цитированных выше работах подход привносит новые черты в теорию, но тем не менее оставляет неизменными основные свойства одномерной теории (неосцилляция согласована со свойствами функции Грина; неосцилляция на интервале гарантирует неосцилляцию на подынтервале).

Свойство критической неосцилляции впервые было введено Ю. В. Покорным при исследовании положительности функции Грина и осцилляционных свойств спектра некоторых классов краевых задач для уравнения второго порядка на графе (см. [9, § 4.5], [13, § 2.5]). Оно обобщает понятие точного промежутка неосцилляции в классической теории (см. [5, 7]). Как будет показано ниже, критичность неосцилляции уравнения четвертого порядка на графе-цепочке заключается в том, что уравнение, будучи слабо неосциллирующим, теряет это свойство при «расширении» графа, но сохраняет его при «сужении». Учитывая связь неосцилляции со знаковыми свойствами функций Грина некоторых краевых задач (см. [1, 2]), можно сказать, что свойство критической неосцилляции вычленяет грань между возможностью и невозможностью для функции Грина хоть какой-то краевой задачи быть положительной, причем в наилучшем положении оказывается задача Дирихле.

1. Основные понятия и постановка задачи

Имеется несколько различных подходов к изучению краевых задач на графах. Наиболее типичными из них являются векторный и синтетический подходы.

При векторном подходе каждое ребро графа параметризуется отрезком фиксированной длины, а решения нумеруются в соответствии с какой-либо предварительной нумерацией ребер. Векторный подход используется в конструкциях, опирающихся на абстрактные функционально-аналитические результаты: порождающий задачу оператор (с регулярными или сингулярными коэффициентами) оказывается заданным либо в прямом произведении пространств, каждое из которых соответствует своему ребру, либо в пространстве вектор-функций (см., например, [14–16]).

В данной работе мы придерживаемся синтетического взгляда, при котором граф рассматривается как цельный геометрический объект. Более того, как единое целое рассматривается вся система дифференциальных соотношений — обыкновенные дифференциальные уравнения на ребрах плюс условия согласования во внутренних вершинах. Под геометрическим графом Γ в настоящей работе понимается ограниченное связное множество, имеющее структуру сети и вложенное в $\mathbb{R}^2$. Ребро графа — это интервал в $\mathbb{R}^2$, а вершина графа — точка, являющаяся концом одного или нескольких ребер. При этом ребра графа занумерованы и обозначаются через γ_i, а вершины — через a, b, c и т. д.

Обозначим через $J(\Gamma)$ множество вершин графа, которые являются концевыми точками двух и более ребер. Такие вершины мы называем *внутренними*. Вершины графа, не принадлежащие $J(\Gamma)$, будем называть *граничными* и обозначать их множество через $\partial\Gamma$. Мы считаем, что граф Γ — это объединение конечного множества всех его ребер и множества всех внутренних вершин. При этом граничные вершины в граф не входят. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_i, то будем говорить, что ребро γ_i примыкает к вершине a. Ребро, примыкающее к граничной вершине $a \in \partial\Gamma$, нам будет удобнее обозначать γ_a. Множество индексов всех ребер, примыкающих к вершине a, обозначим через $I(a)$. Множество, получаемое удалением из графа всех его вершин, обозначим через $\overset{\circ}{\Gamma}$. Подграфом графа Γ назовем любой граф Γ_0 такой, что $\Gamma_0 \subset \Gamma$.

Под функцией на графе понимается отображение $u : \overset{\circ}{\Gamma} \to \mathbb{R}$. Через $u_i(x)$ будем обозначать сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i. Через $C[\Gamma]$ будем обозначать пространство функций, равномерно непрерывных на каждом ребре графа Γ. Для таких функций в каждой вершине a графа при $i \in I(a)$ существует предел $\lim_{\gamma_i \ni x \to a} u_i(x)$, который мы обозначаем через $u_i(a)$. При этом для вершины $a \in J(\Gamma)$ и $k, i \in I(a)$ величины $u_k(a)$ и $u_i(a)$ не обязаны совпадать. Выделим в пространстве $C[\Gamma]$ подпространство функций, для которых $u_k(a) = u_i(a)$ при любой $a \in J(\Gamma)$ и любых $k, i \in I(a)$. Множество всех таких функций обозначим через $C(\Gamma)$ и назовем их *непрерывными* на графе. Такое определение вполне естественно, так как мы можем доопределить такие функции по непрерывности на весь граф и положить $u(a) = u_i(a)$, $i \in I(a)$.

Определим понятие производной функции, заданной на графе. Для этого введем в рассмотрение функцию $\mu(x) \in C[\Gamma]$, взаимно однозначно отображающую каждое ребро $\gamma_i \subset \Gamma$ на некоторый интервал $(0, l_i)$ при $l_i > 0$. Функция $\mu(x)$ определяет на каждом ребре графа ориентацию. Для произвольной точки $s \in \overline{\gamma}_i$ полагаем

$$\mathscr{O}_\varepsilon^+(s) = \big\{x \in \gamma_i : 0 < \mu_i(x) - \mu_i(s) < \varepsilon\big\},$$
$$\mathscr{O}_\varepsilon^-(s) = \big\{x \in \gamma_i : 0 < \mu_i(s) - \mu_i(x) < \varepsilon\big\}.$$

Если функция $u(x) \in C[\Gamma]$ имеет конечное число нулей на ребре γ_i, то через $\sigma u_i(s \pm 0)$ обозначим знак функции $u_i(x)$ вблизи точки $s \in \overline{\gamma}_i$ (в концевых точках ребра имеет смысл только одна из этих величин).

Функцию $u(x) \in C[\Gamma]$ назовем *дифференцируемой на графе* Γ, если она дифференцируема относительно $\mu(x)$ на каждом ребре графа. При этом полагаем

$$u_i'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta u_i(x_0)}{\Delta \mu_i(x_0)}, \quad x, x_0 \in \gamma_i.$$

Аналогично определяются производные высших порядков. Обозначим через $C^n[\Gamma]$ пространство функций из $C[\Gamma]$, производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат $C[\Gamma]$.

Под дифференциальным уравнением на графе подразумеваем, следуя [9], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа и набор условий согласования во внутренних вершинах. Его можно записать в общем виде

$$Lu = F(x), \quad x \in \Gamma. \tag{1}$$

В данной работе рассматривается уравнение, порождаемое совокупностью дифференциальных уравнений на ребрах графа:

$$\big(p_i(x)u_i''\big)'' - \big(q_i(x)u_i'\big)' = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \subset \overset{\circ}{\Gamma}, \tag{2}$$

с коэффициентами, определяемыми функциями

$$p(x) \in C^2[\Gamma],\ \inf_{x \in \overset{\circ}{\Gamma}} p(x) > 0, \quad q(x) \in C^1[\Gamma],\ q(x) \geqslant 0 \text{ на } \Gamma, \quad f(x) \in C[\Gamma],$$

дополняемой в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ равенствами

$$\begin{gathered} u_i(a) = u_k(a), \quad u_i'(a) = \alpha_{ki}(a)u_k'(a) + \alpha_{ji}(a)u_j'(a), \\ p_k(a)u_k''(a) + \sum_{i \in I(a)\setminus\{k,j\}} \alpha_{ki}(a)p_i(a)u_i''(a) = 0, \\ p_j(a)u_j''(a) + \sum_{i \in I(a)\setminus\{k,j\}} \alpha_{ji}(a)p_i(a)u_i''(a) = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

и условиями с третьими производными

$$\sum_{i \in I(a)} D^3 u_i(a) + \delta(a)u(a) = f(a), \quad a \in J(\Gamma). \tag{4}$$

При этом считается, что в условиях (3), (4) все производные вычисляются в направлении от вершины $a \in J(\Gamma)$; k, j — фиксированные (базисные) индексы из $I(a)$, $i \in I(a)$; $\alpha_{ki}(a)$, $\alpha_{ji}(a)$ и $\delta(a)$, $f(a)$ — заданные числа, причем $\delta(a) \geqslant 0$, а в (4) через $D^3 u$ обозначена третья квазипроизводная $(p(x)u'')' - q(x)u'$. Кроме того, если к внутренней вершине a примыкает всего два ребра γ_i и γ_k, то полагается, что все величины и соотношения, связанные с индексом j в системе условий (3), (4), отсутствуют. Левая часть Lu уравнения (1) — это левые части уравнений (2) на ребрах вместе с равенствами (3) и левыми частями условий (4) на $J(\Gamma)$, а правая часть F слагается из правых частей (2) и (4).

Решением дифференциального уравнения (1) называется всякая функция $u(x) \in C^4(\Gamma) \cap C(\Gamma)$, удовлетворяющая на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (2), а в каждой внутренней вершине — условиям (3), (4).

Уравнение (1) возникает при моделировании малых деформаций плоской механической системы, состоящей из тонких прямолинейных стержней и имеющей структуру сети [17].

При исследовании свойств решений уравнения (1) предполагается, что выполнены следующие условия:

– граф Γ является деревом;

– для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ и каждого индекса $i \in I(a)$ хотя бы одна из констант $\alpha_{ji}(a)$, $\alpha_{ki}(a)$ отлична от нуля;

– для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ можно задать базисные индексы $j, k \in I(a)$ так, что для некоторого индекса $i \in I(a) \setminus \{j, k\}$ одновременно будут выполняться неравенства $\alpha_{ji}(a) \leqslant 0$, $\alpha_{ki}(a) \leqslant 0$, причем хотя бы одно неравенство строгое.

Учитывая результаты работ [17, 18], предположения гарантируют невырожденность краевой задачи для уравнения (1) (на графе Γ или на любом его подграфе $\Gamma_0 \subset \Gamma$) с краевыми условиями вида

$$\begin{gathered} u(a) + \alpha(a)D^3u(a) = A_a, \quad \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = B_a, \quad a \in \partial\Gamma \ (a \in \partial\Gamma_0), \\ \alpha(a), \vartheta(a), \beta(a) \geqslant 0, \quad \vartheta(a) + \beta(a) > 0, \quad A_a, B_a \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь и всюду ниже полагается, что каждое граничное ребро графа Γ (подграфа Γ_0) ориентировано от соответствующей граничной вершины внутрь графа.

Вид условий (5) обоснован физическим смыслом краевой задачи (1), (5) — они охватывают все возможные случаи закрепления концов стержневой системы.

2. Некоторые свойства решений однородного уравнения на графе

В данном пункте изучается зависимость свойства знакопостоянства некоторых решений краевых задач Дирихле (1), (5) (случай $\alpha(\cdot) \equiv 0$) от граничных данных. Точнее, будет изучен вопрос о том, как ведет себя решение задачи Дирихле на графе, когда непрерывно меняется одна из граничных вершин графа.

Рассмотрим произвольную точку $s \in \Gamma \cup \partial\Gamma$. Точка s разбивает граф Γ на конечное множество непересекающихся ветвей графа Γ. Если s является внутренней точкой некоторого ребра, то таких ветвей будет две. Если же s — вершина графа, то количество ветвей равно количеству ребер, примыкающих к этой вершине. При этом каждая граничная вершина $b \in \partial\Gamma \setminus s$ принадлежит границе только одной из этих ветвей, которую мы будем обозначать через $\Gamma_b(s)$.

Пусть a и b — пара различных граничных вершин графа Γ. Для каждого $s \in \gamma_a \cup a$ введем в рассмотрение краевую задачу

$$\begin{gathered} Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \\ u(s) = 0, \quad \vartheta(a)u'(s) - \beta(a)u''(s) = 0, \\ u(b) = A_b, \quad \vartheta(b)u'(b) - \beta(b)u''(b) = B_b, \\ u(c) = 0, \quad \vartheta(c)u'(c) - \beta(c)u''(c) = 0, \quad c \in \partial\Gamma \setminus \{a, b\}, \end{gathered} \tag{6}$$

где коэффициенты краевых условий удовлетворяют условиям $\vartheta, \beta : \partial\Gamma \to \mathbb{R}_+$, $\vartheta(\cdot) + \beta(\cdot) > 0$ и $A_b B_b = 0$, $A_b + B_b = 1$. Заметим, что эти коэффициенты не зависят от s. Напомним также, что граничные ребра ориентированы от соответствующих граничных вершин.

Так как краевая задача (1), (5) невырождена, то задача (6) имеет единственное решение, которое будем обозначать через $v_s(x)$. Понятно, что зависимость $v_s(x)$ от $s \in \gamma_a \cup a$ непрерывна в норме $C^3[\Gamma]$. Это свойство, так же как и следующий результат работы [18], регулярно будут привлекаться в дальнейших выкладках.

Лемма 1 [18]. *Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение однородного уравнения*

$$\big(p(x)u''\big)'' - \big(q(x)u'\big)' = 0, \quad x \in (\zeta, \eta) \subset \mathbb{R},$$

$$p(x) \in C^2[\zeta, \eta], \quad \inf_{x \in [\zeta, \eta]} p(x) > 0, \quad q(x) \in C^1[\zeta, \eta], \quad q(x) \geqslant 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(\zeta) = \vartheta(\zeta)u'(\zeta) - \beta(\zeta)u''(\zeta) = 0, \quad \beta(\zeta), \vartheta(\zeta) \geqslant 0, \quad \beta(\zeta) + \vartheta(\zeta) \neq 0.$$

Тогда на промежутке $(\zeta, \eta]$ функция $u(x)$ имеет не более одного простого нуля. Если при этом в некоторой точке $\xi \in (\zeta, \eta]$ выполнено равенство $u(\xi) = 0$, то $u'(\xi)u''(\xi) > 0$.

Лемма 2. *Пусть $\xi \in \gamma_a$ и $v'_\xi(\xi) = v''_\xi(\xi) = 0$, $D^3 v_\xi(\xi) > 0$. Тогда для всех $s \in (a, \xi) \subset \gamma_a$ будет выполнено неравенство $v_s(\xi) < 0$.*

$\lhd$ Шаг 1. Для произвольного решения $u(x)$ однородного уравнения (1) определим на каждом граничном ребре графа Γ функцию $\mathscr{F}_u(x)$ по правилу: $\mathscr{F}_u(x) = \big(pu''u' - D^3u \cdot u\big)(x)$, где дифференцирование согласовано с заданной ориентацией ребер. Тогда при любом $x \in \gamma_a$ интегрированием по частям с последующим привлечением (4) получим

$$\int\limits_{\Gamma_b(x)} Lu \cdot u \, dt = \mathscr{F}_u(x) + \sum_{c \in \partial\Gamma \setminus a} \mathscr{F}_u(c) + \sum_{c \in J(\Gamma)} \delta(c)u^2(c) + \int\limits_{\Gamma_b(x)} p \cdot (u'')^2 + q \cdot (u')^2 \, dt.$$

Учитывая, что левая часть равенства равна нулю, его можно представить в виде

$$\int\limits_{\Gamma_b(x)} p\cdot(u'')^2 + q\cdot(u')^2\,dt + C(u) = -\mathscr{F}_u(x), \tag{7}$$

где константа $C(u)=\sum_{c\in\partial\Gamma\setminus a}\mathscr{F}_u(c)+\sum_{c\in J(\Gamma)}\delta(c)u^2(c)$ не зависит от x.

Из равенства (7) следует, что функция $\mathscr{F}_u(x)$ монотонно возрастает на ребре γ_a (напомним, что ребро ориентировано от граничной вершины a).

Шаг 2. Покажем справедливость утверждения леммы в случае $\beta(a)=0$. Пусть $s\in(a,\xi)\subset\gamma_a$ и $u(x)=v_\xi(x)-v_s(x)$. Из определения функций $v_\xi(x)$ и $v_s(x)$ следует, что для всех $c\in\partial\Gamma\setminus a$ будет выполнено неравенство $\mathscr{F}_u(c)=p(c)u''(c)u'(c)\geqslant 0$, а стало быть $C(u)\geqslant 0$. Поэтому из (7) следует $\mathscr{F}_u(\xi)<0$. Последнее неравенство эквивалентно

$$p(\xi)\big(v''_\xi(\xi)-v''_s(\xi)\big)\big(v'_\xi(\xi)-v'_s(\xi)\big)-\big(D^3v_\xi(\xi)-D^3v_s(\xi)\big)\big(v_\xi(\xi)-v_s(\xi)\big)<0$$

или, с учетом условий леммы,

$$\mathscr{F}_{v_s}(\xi)+D^3v_\xi(\xi)v_s(\xi)<0. \tag{8}$$

Так как $\mathscr{F}_{v_s}(x)$ монотонно возрастает и $\mathscr{F}_{v_s}(s)=0$ (поскольку $v_s(s)=v'_s(s)=0$), то $\mathscr{F}_{v_s}(\xi)\geqslant 0$ при любом $s\in(a,\xi)\subset\gamma_a$. Отсюда и из (8) получаем нужное неравенство $v_s(\xi)<0$.

Шаг 3. Случай $\beta(a)>0$. Здесь неравенство $v_s(\xi)<0$ следует из уже рассмотренного на шаге 2 и непрерывной зависимости решений задачи (6) от значений коэффициентов краевых условий. Действительно, если предположить, что при некотором $\beta(a)=\beta_0>0$ лемма неверна, то найдется такое значение $\beta(a)\in(0,\beta_0]$, что соответствующее решение $v_s(\xi)=0$, $s\in(a,\xi)\subset\gamma_a$, задачи (6) будет равно нулю в точке ξ. В этом случае из леммы 1 следует строгое неравенство $v'_s(\xi)v''_s(\xi)>0$, несовместимое с равенствами $v'_\xi(\xi)=v''_\xi(\xi)=0$ ввиду [1, лемма 3]. $\rhd$

Следствие 1. *Пусть $\xi\in\gamma_a$ и $v'_\xi(\xi)=v''_\xi(\xi)=0$, $\sigma v_\xi(\xi+0)>0$. Тогда при некотором $\varepsilon>0$ для всех $s\in\mathscr{O}^-_\varepsilon(\xi)$ выполнено неравенство $\sigma v_s(s+0)<0$, а для всех $s\in\mathscr{O}^+_\varepsilon(\xi)$ выполнено неравенство $\sigma v_s(s+0)>0$.*

$\lhd$ В [1, лемма 2] показано, что в условиях следствия для всех $x>\xi$ ($x\in\gamma_a$) выполнено неравенство $v_\xi(x)>0$. Поэтому из непрерывной зависимости решения $v_s(x)$ от s и леммы 2 следует существование $\varepsilon>0$ такого, что при $s\in\mathscr{O}^-_\varepsilon(\xi)$ соответствующее решение $v_s(x)$ задачи (6) будет иметь на ребре γ_a нуль $\eta_s>\xi$. Причем других нулей на интервале $(s,\eta_s)\subset\gamma_a$ функция $v_s(x)$ не имеет и $v'_s(\eta_s)v''_s(\eta_s)>0$ (лемма 1). Отсюда сразу следует справедливость первой части доказываемого утверждения: при $s\in\mathscr{O}^-_\varepsilon(\xi)$ имеет место неравенство $\sigma v_s(s+0)<0$. Кроме того, при $s\in\mathscr{O}^-_\varepsilon(\xi)$ выполнено неравенство $\sigma v_s(\eta_s+0)>0$. Поэтому если в задаче (6) $\vartheta(a)=v''_s(\eta_s)$ и $\beta(a)=v'_s(\eta_s)$, то функции $v_s(x)$ и $v_{\eta_s}(x)$ совпадают, и стало быть в этом случае $\sigma v_{\eta_s}(\eta_s+0)>0$. В [1, лемма 5] показано, что неравенство $\sigma v_{\eta_s}(\eta_s+0)>0$ не зависит от значений коэффициентов $\vartheta(a),\beta(a)\geqslant 0$ краевого условия задачи (6). Поэтому при всех $s\in\mathscr{O}^-_\varepsilon(\xi)$ будет выполнено неравенство $\sigma v_{\eta_s}(\eta_s+0)>0$.

Теперь вторая часть доказываемого утверждения следует из непрерывности отображения $s\mapsto\eta_s$ и предельного соотношения $\eta_s\to\xi+0$ при $s\to\xi-0$. $\rhd$

Для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ введем в рассмотрение краевую задачу Дирихле

$$
\begin{gathered}
Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \\
u(a) = 0, \quad \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = 1, \\
u(c) = 0, \quad \vartheta(c)u'(c) - \beta(c)u''(c) = 0, \quad c \in \partial\Gamma \setminus a,
\end{gathered} \tag{9}
$$

решение которой будем обозначать через $y_a(x)$. Через $w_a(x)$ мы будем обозначать решение краевой задачи, которая получится из (9), если правые части краевых условий в вершине $a \in \partial\Gamma$ поменять местами. Поскольку все эти задачи невырождены, то функции $y_a(x)$ и $w_a(x)$ определены однозначно.

Лемма 3. *Пусть функция $y_b(x)$, $b \in \partial\Gamma$, имеет в вершине $a \in \partial\Gamma$ нуль кратности три. Тогда функция $y_a(x)$ имеет нуль кратности три в вершине b.*

$\lhd$ Умножим функцию y_a на Ly_b и проинтегрируем по частям на Γ. Привлекая свойства функций $y_a(x)$ и $y_b(x)$ в вершинах графа, получим

$$
0 = p(a)y_b''(a) - \sum_{c \in J(\Gamma)} y_a(c)\delta(c)y_b(c) - p(b)y_a''(b) + \sum_{c \in J(\Gamma)} y_a(c)\delta(c)y_b(c),
$$

что вследствие условия $y_b''(a) = 0$ дает равенство $y_a''(b) = 0$. $\rhd$

Прежде чем ввести понятие критически неоциллирующего уравнения, напомним (см. [1]), что уравнение четвертого порядка $Lu = 0$ называется *слабо неосциллирующим* на Γ, если при $\beta(\cdot) \equiv 0$ каждая из функций $y_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительна на Γ, и называется *сильно неосциллирующим*, если для любой $a \in \partial\Gamma$ решение $w_a(x)$ положительно на Γ при $\vartheta(a) = 0$ и $\beta(\cdot) \equiv 0$ на $\partial\Gamma \setminus a$.

Знаковые свойства решений $y_a(x)$ и $w_a(x)$ краевой задачи (9) тесно переплетаются со знаковыми свойствами соответствующей функции Грина и зависят от значений коэффициентов краевых условий (в случае $J(\Gamma) = \varnothing$ такая зависимость отсутствует!). Слабая неосцилляция уравнения на графе обеспечивает положительность решений $y_a(x)$ вне зависимости от значений коэффициентов краевых условий, а значит и положительность функции Грина задачи Дирихле (см. [1] или [2]).

Определение 1. Будем говорить, что уравнение $Lu = 0$ *критически неосциллирует* на графе Γ, если для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ решение краевой задачи (9) с $\beta(\cdot) \equiv 0$ положительно на Γ и хотя бы одно из этих решений имеет на $\partial\Gamma$ нуль кратности три.

Отметим, что критически неосциллирующее уравнение является слабо неосциллирующим, но не может сильно неосциллировать. Это следует из результата работы [1]: если некоторое решение $y_a(x)$ (из фигурирующих в определении 1) положительно на Γ и имеет нуль кратности три в вершине $b \in \partial\Gamma$, то решение $w_b(x)$, фигурирующее в определении сильной неосцилляции, обязательно меняет знак.

В [1] отмечалось, что уравнение четвертого порядка с условиями шарнирного и упруго-шарнирного сочленения во внутренних вершинах, которое изучалось в работах [9, гл. 8; 19–21], всегда сильно неосциллирует. Поэтому для него критичность неосцилляции не возникает. Что же касается уравнения, рассматриваемого в данной работе, то, как показывает следствие 1, для него критичность неосцилляции заключается в том, что даже незначительное изменение области задания уравнения приводит к тому, что оно перестает быть неосциллирующим. Причем потеря свойства неосцилляции происходит не только при «расширении» графа, но и при его «уменьшении» (соответствующий пример приведен в [1, пример 1]). Такой эффект не наблюдается в классической теории неосцилляции (когда $J(\Gamma) = \varnothing$) и, как будет показано в следующем пункте, имеет место только для графа, имеющего внутреннюю вершину, к которой примыкает не менее трех ребер.

3. Случай графа-цепочки

Всюду в этом пункте считаем, что граф Γ состоит из последовательно соединенных ребер, $\partial\Gamma = \{a, b\}$, γ_a и γ_b — граничные ребра. Простая структура графа-цепочки позволяет доказать, что неосцилляция уравнения (1) на таком графе влечет неосцилляцию на любом подграфе.

Рассмотрим краевую задачу (6), но теперь будем считать, что $s \in \Gamma \cup a$. Решение задачи по-прежнему обозначаем через $v_s(x)$. В случае графа-цепочки из невырожденности задачи (1), (5) следует, что функция $v_s(x)$ однозначно определяется для любого $s \in \Gamma \cup a$ и не имеет кратных нулей внутри $\Gamma_b(s)$. Кроме того, в рассматриваемом случае имеет место следующий факт, являющийся очевидным следствием теорем 4 и 5 работы [22].

Лемма 4. *Решение $v_s(x)$ задачи (6), непрерывное в норме $C[\Gamma]$, зависит от точки $s \in \Gamma \cup a$.*

Эти свойства задачи (6) вместе с результатами предыдущего пункта позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Если решение $v_a(x)$ положительно на Γ, то при любом $s \in \Gamma$ соответствующее решение $v_s(x)$ будет положительно на $\Gamma_b(s) \subset \Gamma$.*

$\lhd$ Из определения функции $v_s(x)$ следует, что $\sigma v_s(b + 0) > 0$ при любом $s \in \Gamma \cup a$. А так как $v_a(x) > 0$ на $\Gamma_b(a)$ и $v_s(x)$ не имеет кратных нулей внутри $\Gamma_b(s)$ ($s \in \gamma_a$), то при непрерывном скольжении точки $s \in \gamma_a$ от граничной вершины a внутрь графа Γ функция $v_s(x)$ может «приобрести» нули в $\Gamma_b(s)$ только через переменную точку s. Причем потеря свойства положительности на $\Gamma_b(s)$ у решения $v_s(x)$ может произойти только при переходе переменной s через такую точку $s_0 \in \Gamma$, для которой соответствующее решение $v_{s_0}(x)$ имеет в точке s_0 нуль кратности три (т. е. когда уравнение (1) критически не осциллирует на $\Gamma_b(s_0)$). При этом из неравенства $v_a(x) > 0$ на $\Gamma_b(a)$ следует, что при всех значениях переменной $s \in \Gamma$, принадлежащих маршруту между точками a и s_0, должно выполняться неравенство $\sigma v_s(s + 0) > 0$, что невозможно ввиду следствия 1. Следовательно, такой точки $s_0 \in \Gamma$ существовать не может и функция $v_s(x)$ остается положительной при любом $s \in \Gamma$. $\rhd$

Замечание. В случае графа, имеющего более двух граничных вершин, функция $v_s(x)$ может «приобрести» нули через какую-нибудь третью граничную вершину из $\partial\Gamma \setminus \{a, b\}$.

Из теоремы 1 сразу получаем

Следствие 2. *Если дифференциальное уравнение (1) слабо (сильно) не осциллирует на графе-цепи Γ, то оно слабо (сильно) не осциллирует и на любом его подграфе $\Gamma_0 \subset \Gamma$.*

Далее показывается, что слабая неосцилляция уравнения (1) является необходимым условием положительности функции Грина краевой задачи (1), (5).

Теорема 2. *Пусть Γ — граф-цепочка и дифференциальное уравнение (1) критически не осциллирует на подграфе $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ($\Gamma_0 \neq \Gamma$). Тогда функция Грина краевой задачи (1), (5) на графе Γ знакопеременна.*

$\lhd$ Рассмотрим решение $u_b(x)$ однородного уравнения (1) на Γ, удовлетворяющее в граничных точках краевым условиям

$$\begin{gathered} u(a)+\alpha(a)D^3u(a)=0, \quad \vartheta(a)u'(a)-\beta(a)u''(a)=0, \\ u(b)+\alpha(b)D^3u(b)=A_b, \quad \vartheta(b)u'(b)-\beta(b)u''(b)=B_b, \\ \alpha(\cdot),\vartheta(\cdot),\beta(\cdot)\geqslant 0, \quad \vartheta(\cdot)+\beta(\cdot)>0, \end{gathered} \tag{10}$$

правые части которых определяются в зависимости от значения коэффициента $\alpha(b)$ из (5): если $\alpha(b)=0$, то $A_b=0$, $B_b=1$, а если $\alpha(b)>0$, то $A_b=1$, $B_b=0$. В работе [11, теорема 8] показано, что положительность функции Грина краевой задачи (1), (5) эквивалентна положительности на Γ решения $u_b(x)$. Поэтому для доказательства теоремы нам достаточно показать, что функция $u_b(x)$ меняет знак на Γ.

Если в (10) будет $\alpha(a)=\alpha(b)=0$, то знакопеременность $u_b(x)$ следует из того, что уравнение (1) критически не осциллирует на подграфе Γ_0, и из следствий 1, 2. Кроме того, в [1, лемма 19] показано, что если в $\alpha(a)=\alpha(b)=0$ и функция $u_b(x)$ меняет знак на Γ, то она будет знакопеременной и в случае $\alpha(b)>0$, $\alpha(a)=0$.

Покажем, что $u_b(x)$ знакопеременная и в случае $\alpha(a)>0$. Рассмотрим отображение $\alpha(a)\mapsto u_b(a)$ из $[0,\infty)$ в $\mathbb{R}$. Оно непрерывно и либо постоянно, либо строго монотонно (см. [1, следствие 4]). Если функция $\alpha(a)\mapsto u_b(a)$ постоянна, то решение $u_b(x)$ от значений $\alpha(a)$ не зависит, а при $\alpha(a)=0$, как уже показано, меняет знак на Γ. Если функция $\alpha(a)\mapsto u_b(a)$ убывает, то при $\alpha(a)>0$ будет $u_b(a)<0$. При этом ввиду [1, лемма 9] выполнено $\sigma u_b(b+0)>0$, а стало быть, функция $u_b(x)$ меняет знак на Γ. Ну и, наконец, если отображение $\alpha(a)\mapsto u_b(a)$ возрастает, то знакопеременность решения $u_b(x)$ при $\alpha(a)>0$ следует из

(а) $\sigma u_b(b+0)>0$ и $u_b(a)>0$ при всех $\alpha(a)>0$;

(б) при $\alpha(a)=0$ функция $u_b(x)$ знакопеременна;

(в) отображение $\alpha(a)\mapsto u_b(x)$ непрерывно в норме $C[\Gamma]$;

(г) функция $u_b(x)$ не имеет кратных нулей внутри Γ [18, следствие 2]. $\rhd$

Литература

1. *Кулаев Р. Ч.* Неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе // Мат. сб.—2015.—Т. 206, № 12.—С. 79–118.
2. *Кулаев Р. Ч.* К вопросу о неосцилляции уравнения на графе // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 11.—С. 1563–1565.
3. *Кулаев Р. Ч.* Принцип сравнения для функции Грина краевой задачи четвертого порядка на графе // Уфим. мат. журн.—2015.—Т. 7, № 4.—С. 99–108.
4. *Кулаев Р. Ч.* О свойстве неосцилляции уравнения на графе // Сиб. мат. журн.—2016.—Т. 57, № 1.—С. 85–97.
5. *Левин А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+p_n(t)x=0$ // Успехи мат. наук.—1969.—Т. 24, № 2.—С. 43–96.
6. *Левин А. Ю., Степанов Г. Д.* Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. I, II // Сиб. мат. журн.—1976.—Т. 17, № 3.—С. 606–626; № 4.—С. 813–830.
7. *Дерр В. Я.* Неосцилляция решений дифференциальных уравнений // Вестн. Удмурд. ун-та.—2009.—Вып. 1.—С. 46–89.
8. *Тептин А. Л.* К вопросу об осцилляционности спектра многоточечной краевой задачи // Изв. вузов. Математика.—1999.—№ 4 (443).—С. 44–53.
9. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2007.—272 с.
10. *Покорный Ю. В.* О неосцилляции обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств на пространственных сетях // Диф. уравнения.—2001.—Т. 37, № 5.—С. 661–672.
11. *Кулаев Р. Ч.* Необходимое и достаточное условия положительности функции Грина для уравнения четвертого порядка на графе // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 3.—С. 302–316.

12. *Кулаев Р. Ч.* О знаке функции Грина краевой задачи на графе для уравнения четвертого порядка // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, № 4.—С. 19–29.
13. *Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах.—М.: Физматлит, 2009.—192 с.
14. *Владимиров А. А.* Замечания о минорантах лапласиана на геометрическом графе // Мат. заметки.—2015.—Т. 98, № 3.—С. 467–469.
15. *Xu G. Q., Mastorakis N. E.* Differential Equations on Metric Graph.—Wseas Press, 2010.—232 p.
16. *Leugering G., Leugering E., Zuazua E.* On exact controllability of generic trees // ESAIM: Proceedings.—2000.—Vol. 8.—P. 95–105.
17. *Кулаев Р. Ч.* О разрешимости краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 1.—С. 27–34.
18. *Кулаев Р. Ч.* Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 2.—С. 161–173.
19. *Borovskikh A. V., Lazarev K. P.* Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. Math. Sci.—2004.—Vol. 119, № 6.—P. 719–738.
20. *Боровских А. В., Мустафокулов Р. О., Лазарев К. П., Покорный Ю. В.* Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети // Докл. РАН.—1995.—Т. 345, № 6.—С. 730–732.
21. *Покорный Ю. В., Мустафокулов Р.* О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвертого порядка на графе // Изв. вузов. Математика.—1999.—Т. 441, № 2.—С. 75–82.
22. *Кулаев Р. Ч.* К вопросу об осцилляционности функции Грина разрывной краевой задачи // Мат. заметки.—2016.—Т. 100, № 3.—С. 375–388.

Статья поступила 10 июля 2017 г.

Кулаев Руслан Черменович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела мат. моделирования
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Северо–Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова
профессор кафедры мат. анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: kulaev@smath.ru

ON THE DISCONJUGACY OF A DIFFERENTIAL EQUATION ON A GRAPH

Kulaev R. Ch.

The paper is devoted to the problems of disconjugacy of fourth-order differential equations on a graph. We introduce the concept of critical disconjugacy. Critical disconjugacy allows us to generalize the notion of exact interval of disconjugacy in the classical theory. We give the definition of disconjugacy in terms of the properties of a special fundamental system of solutions of an equation on a graph. This definition introduces new features into the theory, but it preserves the basic properties of the one-dimensional theory.

Key words: differential equation on a graph, disconjugacy, boundary value problem, Green's function.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 41–50

УДК **517.98**

MAXIMAL QUASI-NORMED EXTENSION OF QUASI-NORMED LATTICES

A. G. Kusraev and B. B. Tasoev

To Professor A. B. Shabat
on occasion of his 80^{th} *birthday*

The purpose of this article is to extend the Abramovich's construction of a maximal normed extension of a normed lattice to quasi-Banach setting. It is proved that the maximal quasi-normed extension $X^{\varkappa}$ of a Dedekind complete quasi-normed lattice X with the weak σ-Fatou property is a quasi-Banach lattice if and only if X is intervally complete. Moreover, $X^{\varkappa}$ has the Fatou and the Levi property provided that X is a Dedekind complete quasi-normed space with the Fatou property. The possibility of applying this construction to the definition of a space of weakly integrable functions with respect to a measure taking values from a quasi-Banach lattice is also discussed, since the duality based definition does not work in the quasi-Banach setting.

Mathematics Subject Classification (2010): 46A16, 46B42, 46E30, 46G10, 47B38, 47G10.

Key words: quasi-Banach lattice, maximal quasi-normed extension, Fatou property, Levi property vector measure, space of weakly integrable functions.

1. Introduction

For over recent 25 years the spaces of integrable functions with respect to a measure taking values in a Banach (quasi-Banach) lattice have been a field of increased interest. The spaces of integrable and weakly integrable functions with respect to a vector measure possess interesting order and metric properties and have been studied intensively by many authors. They find applications in important problems such as the representation of abstract quasi-Banach lattices as spaces of integrable functions, the study of the optimal domain of linear operators, domination and factorization of operators, spectral integration etc., see [4, 5, 7, 18, 20] and the references therein.

A key role in the theory is played by the space $L^1_w(\mu)$ of *weakly integrable* functions with respect to a measure μ with values in a Banach space, see the survey paper by Curbera and Ricker [5] and the book by Okada, Ricker and Sánches Pérez [18]. However, in the context of quasi-Banach spaces, when the conjugate space may turn out to be trivial, the duality based definition of $L^1_w(\mu)$ does not work, so we need to find a suitable substitute for $L^1_w(\mu)$.

In the case of a measure taking values from a quasi-Banach lattice two natural candidates for the space of weakly integrable function were indicated in [10]. The first one arises as the domain of the smallest extension of the integration operator (see Aliprantis and Burkinshaw [3, Theorem 1.30]), and the second one is based on the construction of the maximal normed extension introduced by Abramovich in [1]. The approach based on the smallest extension of the integration operator is presented in [11].

In order to realize the second possibility, it is necessary to extend Abramovich's construction to quasi-Banach setting, as done in this article. In Section 2 we sketch the needed information concerning quasi-Banach lattices and prove some Riesz–Fischer type completeness theorems for quasi-normed lattices; next, we gave a characterization of order continuous quasi-Banach lattices. In Section 3 we examine the construction of the maximal quasi-normed extension introduced by Abramovich [1] for Banach lattices. It is proved that the maximal quasi-normed extension $X^{\varkappa}$ of a Dedekind complete quasi-normed lattice X with the weak σ-Fatou property is a quasi-Banach lattice if and only if X is intervally complete. Moreover, $X^{\varkappa}$ has the Fatou and the Levi property provided that X is a Dedekind complete quasi-normed space with the Fatou property.

We use the standard notation and terminology of Aliprantis and Burkinshaw [3] and Meyer-Nieberg [17] for the theory of vector and Banach lattices (see also Abramovich and Aliprantis [2], Luxemburg and Zaanen [13]). Throughout the text we assume that all vector spaces are defined over the field of reals and all vector lattices are Archimedean. We let $:=$ denote the assignment by definition, while $\mathbb{N}$ and $\mathbb{R}$ symbolize the naturals and the reals.

2. Quasi-Banach Lattices

In this section, we briefly sketch the needed information concerning quasi-Banach lattices. In particular, we give some simple results on the completeness and order continuity of quasi-Banach lattices for which we have not found references.

Definition 2.1. A *quasi-normed space* is a pair $(X, \|\cdot\|)$ where X is a real vector space and $\|\cdot\|$ is a *quasi-norm*, a function from X to $\mathbb{R}$ such that the following conditions hold:

(1) $\|x\| \geqslant 0$ for all $x \in X$ and $\|x\| = 0$ if and only if $x = 0$.

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ for all $x \in X$ and $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) There exists a constant $C \geqslant 1$ with $\|x + y\| \leqslant C(\|x\| + \|y\|)$ for all $x, y \in X$.

If, in addition, for some $0 < p \leqslant 1$ the inequality

(4) $\|x + y\|^p \leqslant \|x\|^p + \|y\|^p$ holds for all $x, y \in X$,

then $\|\cdot\|$ is called a *p-norm* and $(X, \|\cdot\|)$ is called a *p-normed space*.

The best constant C in 2.1 (3) is called the *quasi-triangle constant*, or *quasi-norm multiplier*, or *modulus of concavity* of the quasi norm. Note that $\|\sum_{k=1}^n x_k\| \leqslant \sum_{k=1}^n C^k\|x_k\|$ for all $x_1, \dots, x_n \in X$.

Two quasi-norms $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|'$ are equivalent if there is a constant $A \geqslant 1$ such that $A^{-1}\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant A\|x\|$ for all $x \in X$. By the Aoki–Rolewicz theorem (see [8]), each quasi-norm is equivalent to some p-norm for some $0 < p \leqslant 1$.

Theorem 2.2 (Aoki–Rolewicz). *Let $(X, \|\cdot\|)$ be a quasi-normed space with the quasi-triangle constant $C \geqslant 1$ and $p = (1 + \log_2 C)^{-1}$. Define $\|\cdot\|_p : X \to \mathbb{R}$ as*

$$\|x\|_p := \inf\left\{\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} : \ x = \sum_{k=1}^n x_k, \ n \in \mathbb{N}\right\} \quad (x \in X).$$

Then $0 < p \leqslant 1$, $\|\cdot\|_p$ is a p-norm, and $\|x\|_p \leqslant \|x\| \leqslant 2^{1/p}\|x\|_p$ for all $x \in X$.

$\lhd$ See Maligranda [15, Theorem 1.2], Pietsch [19, 6.2.5]. $\rhd$

Thus, we may assume unless otherwise is mentioned that a quasi-Banach space is equipped with a p-norm for some $0 < p \leqslant 1$.

A topological vector space X is said to be *locally bounded* if it has a bounded neighborhood of zero. A quasi-normed space is a locally bounded topological vector space if we take the sets $\{x \in X : \|x\| \leqslant \varepsilon\}$ $(0 < \varepsilon \in \mathbb{R})$ for a base of neighborhoods of zero. Moreover, this topology may be induced by metric $d(x, y) := |||x - y|||^p$ $(x, y \in X)$ where $|||\cdot|||$ is an equivalent p-norm. Conversely, Hyers [6] proved that the topology of a locally bounded topological vector space X can be deduced from a quasi-norm, which may be obtained as the Minkowski functional of a bounded balanced neighborhood B of zero:

$$\|x\| := \|x\|_B := \inf\left\{0 < \lambda \in \mathbb{R} : \ x \in \lambda B\right\} \quad (x \in X).$$

A quasi-norm may be discontinuous in its own topology [19, 6.1.9]. However, every quasi-norm is equivalent to a continuous one, since a p-norm is continuous.

Definition 2.3. A *quasi-Banach space* (*p-normed space*) is a quasi-normed space which is complete in its metric uniformity.

Theorem 2.4. *A quasi-normed space $X := (X, \|\cdot\|)$ with a triangle constant $C \geqslant 1$ is complete (and hence a quasi-Banach space) if and only if for every series (x_k) in X such that $\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\| < \infty$ there exists $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \in X$ and*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} C^{k+1} \|x_k\|.$$

$\lhd$ See Maligranda [15, Theorem 1.1]. $\rhd$

The basic results of the Banach space theory such as open mapping theorem and the closed graph theorem (for linear operators) are valid also in the context of quasi-Banach spaces, see [9].

Definition 2.5. A quasi-Banach (quasi-normed, p-Banach) space $(X, \|\cdot\|)$ is called a *quasi-Banach lattice* (respectively, *quasi-normed lattice*, *p-Banach lattice*) if, in addition, X is a vector lattice and $|x| \leqslant |y|$ implies $\|x\| \leqslant \|y\|$ for all $x, y \in X$.

Lemma 2.6. *In any quasi-normed lattice X lattice operations are continuous and the positive cone is closed. Moreover, if an increasing (decreasing) net $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ is quasi-norm convergent to $x \in X$, then $x = \sup_{\alpha \in A} x_\alpha$ $(x = \inf_{\alpha \in A} x_\alpha)$.*

$\lhd$ This can be ensured just as in the case of Banach lattice using monotonicity of the quasi-norm and quasi-triangle inequality. $\rhd$

It follows from Lemma 2.6 that the completion of a quasi-normed lattice X is a quasi-Banach lattice including X as a vector sublattice. Along similar lines, it can also be proved that Amemiya's result on completeness of normed lattices is true in the context of quasi-normed spaces: *a quasi-normed lattice X is complete if and only if every increasing Cauchy sequence in X is convergent.* This fact in combination with Theorem 2.4 leads to the following result.

Theorem 2.7. *For a quasi-normed space $X := (X, \|\cdot\|)$ with a triangle constant $C \geqslant 1$ the following assertions are equivalent:*

(1) *X is a quasi-Banach lattice.*

(2) *For every series (x_k) in X_+ such that $\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\| < \infty$ there exists $x \in X$ with $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$.*

(3) *For every series (x_k) in X_+ such that $\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\| < \infty$ there exists $x \in X$ with $x = o\text{-}\sum_{k=1}^{\infty} x_k := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} x_k$.*

$\lhd$ See [12, Theorem 2.7]. $\rhd$

Definition 2.8. A quasi-Banach lattice $(X, \|\cdot\|)$ (as well as the quasi-norm $\|\cdot\|$) is said to be *order continuous*, if $x_\alpha \downarrow 0$ implies $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ for any net $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in X. If arbitrary nets are replaced by sequences, one speak of *order σ-continuity*.

Theorem 2.9. *For a quasi-Banach lattice X the following are equivalent:*

(1) *X is order continuous.*

(2) *Every increasing order bounded sequence in X_+ is convergent.*

(3) *X is Dedekind σ-complete and order σ-continuous.*

$\lhd$ See [12, Theorem 2.10]. $\rhd$

Definition 2.10. A quasi-Banach lattice $(X, \|\cdot\|)$ is said to have the *weak Fatou property* (respectively *weak σ-Fatou property*) if there exists $K > 0$ (called the *weak Fatou constant*) such that for every increasing net (x_α) (respectively sequence (x_n)) with the supremum $x \in X$ we have $\|x\| \leqslant K \sup_\alpha \|x_\alpha\|$ (respectively $\|x\| \leqslant K \sup_n \|x_n\|$). If $K = 1$ then $\|x\| = \sup_\alpha \|x_\alpha\|$ and in this situation X is said to have the *Fatou property* (respectively *σ-Fatou property*).

Definition 2.11. Say that a quasi-normed lattice $(X, \|\cdot\|)$ has the *Levi property* (respectively *σ-Levi property*) if $\sup_\alpha x_\alpha$ (respectively $\sup_n x_n$) exists for every increasing net (x_α) (respectively sequence (x_n)) in X_+ provided that $\sup_\alpha \|x_\alpha\| < \infty$ (respectively $\sup_n \|x_n\| < \infty$). A *quasi-KB-space* is an order continuous quasi-normed lattice with the Levi property.

Proposition 2.12. *Suppose that X is a quasi-normed lattice with the Levi property. Then X is a Dedekind complete quasi-Banach lattice with the weak Fatou property.*

$\lhd$ The fact that a quasi-normed lattice with the Levi property has also the weak Fatou property is the only thing that needs verification. The proof is similar to that of Proposition 2.4.19 in Meyer-Nieberg [17].

Assume that X has the Levi property but lacks the weak Fatou property. Then for every $n \in \mathbb{N}$ there exists an increasing net $(y_{n,\alpha})_{\alpha\in \mathrm{A}(n)}$ in X_+ such that $y_n = \sup_{\alpha\in\mathrm{A}(n)} y_{n,\alpha}$ exists and

$$\|y_n\| \geqslant n\tau, \quad \tau = C^n n^2 \sup_{\alpha\in\mathrm{A}(n)} \|y_{n,\alpha}\| \quad (n \in \mathbb{N}),$$

where $C \geqslant 1$ is the triangle constant of X. Putting $\bar{y}_n := y_n/\tau$, $\bar{y}_{n,\alpha} := y_{n,\alpha}/\tau$ we arrive at the following relations:

$$\bar{y}_n = \sup_{\alpha\in\mathrm{A}(n)} \bar{y}_{n,\alpha}, \quad \|\bar{y}_n\| \geqslant n, \quad \|\bar{y}_{n,\alpha}\| \leqslant C^{-n} n^{-2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Let (x_γ) stands for the net of finite suprema of elements in $\{\bar{y}_{n,\alpha} : \ n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathrm{A}(n)\}$. If $x_\gamma = \bar{y}_{n_1,\alpha_1} \vee \dots \vee \bar{y}_{n_k,\alpha_k}$ with $\alpha_j \in \mathrm{A}(n_j)$, then

$$\|x_\gamma\| \leqslant \|\bar{y}_{n_1,\alpha_1} + \dots + \bar{y}_{n_k,\alpha_k}\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} C^j \|\bar{y}_{n_j,\alpha_j}\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} C^j C^{-n_j} n_j^{-2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

By hypothesis, $x = \sup_\gamma x_\gamma$ exists and satisfies $x \geqslant \bar{y}_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. Consequently, $\|x\| \geqslant n$ for all $n \in \mathbb{N}$, a contradiction. $\rhd$

3. Maximal Quasi-Normed Extension

Consider a quasi-normed lattice $(X, \|\cdot\|)$ with the quasi-triangle constant C. Let X^δ stand for the Dedekind completion of X, so that X is identified with a majorizing order dense sublattice of X^δ, while X^δ itself is a Dedekind complete vector lattice. Define a function $\|\cdot\|_\delta : X^\delta \to \mathbb{R}$ as

$$\|\bar{x}\|_\delta := \inf\big\{\|x\| : \ x \in X_+, \ |\bar{x}| \leqslant x\big\} \quad (\bar{x} \in X^\delta).$$

Clearly, $\|x\| = \|x\|_\delta$ for all $x \in X$ and $\|\bar{x}\|_\delta < \infty$ for each $\bar{x} \in X^\delta$, since X is majorizing sublattice. Positive homogeneity and monotonicity of $\|\cdot\|_\delta$ are obvious. Moreover, if $|\bar{x}| \leqslant x$ and $|\bar{y}| \leqslant y$ for some $x, y \in X$ and $\bar{x}, \bar{y} \in X^\delta$, then $|\bar{x}+\bar{y}| \leqslant x+y$ and $\|\bar{x}+\bar{y}\|_\delta \leqslant \|x+y\| \leqslant C(\|x\|+\|y\|)$ and hence $\|\bar{x}+\bar{y}\|_\delta \leqslant C(\|\bar{x}\|_\delta+\|\bar{y}\|_\delta)$. It follows that $(X_\delta, \|\cdot\|_\delta)$ is a quasi-normed lattice with the same quasi-triangle constant.

Lemma 3.1. *If $(X, \|\cdot\|)$ is a quasi-Banach lattice with a triangle constant C or a p-Banach lattice, then so is $(X^\delta, \|\cdot\|_\delta)$.*

$\lhd$ Assume that $\sum_{k=1}^\infty C^k \|\bar{x}_k\|_\delta < \infty$ for a sequence $(\bar{x}_k)$ in X_+^δ. Pick $x_k \in X_+$ such that $\bar{x}_k \leqslant x_k$ and $\|x_k\| \leqslant \|\bar{x}_k\|_\delta + 1/(2C)^k$. Then

$$\sum_{k=1}^n C^k \|x_k\| \leqslant \sum_{k=1}^n C^k \|\bar{x}_k\|_\delta + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$$

and hence $\sum_{k=1}^\infty C^k\|x_k\| < \infty$. By Theorem 2.6 $x := o\text{-}\sum_{k=1}^\infty x_k$ exists in X. Consequently, $o\text{-}\sum_{k=1}^\infty \bar{x}_k$ exists in X^δ, since $\sum_{k=1}^n \bar{x}_k \leqslant x$ for all $n \in \mathbb{N}$. $\rhd$

Assume now that $(X, \|\cdot\|)$ is a Dedekind complete quasi-normed lattice with a quasi-triangle constant C. Identify X with an order dense ideal in its universal completion X^u. Define a function $\|\cdot\|_\varkappa : X^u \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ by putting

$$\|\hat{x}\|_\varkappa := \sup\big\{\|x\| : x \in X, \ 0 \leqslant x \leqslant |\hat{x}|\big\} \quad (\hat{x} \in X^u).$$

Observe that $\|x\| = \|x\|_\varkappa$ for all $x \in X$. Denote $X^\varkappa := \{\hat{x} \in X^u : \ \|\hat{x}\|_\varkappa < \infty\}$. If $0 \leqslant u \leqslant |\hat{x}+\hat{y}| \leqslant |\hat{x}| + |\hat{y}|$ for some $\hat{x}, \hat{y} \in X^\varkappa$ and $u \in X$, then there exist $x, y \in X$ with $0 \leqslant x \leqslant |\hat{x}|$, $0 \leqslant y \leqslant |\hat{y}|$, and $u = x + y$. It follows that $\|u\| \leqslant C(\|x\|+\|y\|) \leqslant C(\|\hat{x}\|_\varkappa + \|\hat{y}\|_\varkappa)$ and thus $\|\hat{x}+\hat{y}\|_\varkappa \leqslant C(\|\hat{x}\|_\varkappa + \|\hat{y}\|_\varkappa)$. Similarly, $\|\cdot\|_\varkappa$ is a p-norm, whenever $\|\cdot\|$ is. Taking into account obvious monotonicity and positive homogeneity of $\|\cdot\|_\varkappa$, we see that $(X^\varkappa, \|\cdot\|_\varkappa)$ is a quasi-normed lattice with the quasi-triangle constant C and, if $\|\cdot\|$ is a p-norm, so is $\|\cdot\|_\varkappa$.

Definition 3.2. A *maximal quasi-normed extension* of a quasi-normed lattice $(X, \|\cdot\|)$ is the pair $(X^{\delta\varkappa}, \|\cdot\|_{\delta\varkappa})$ with $X^{\delta\varkappa} := (X^\delta)^\varkappa$ and

$$\|\hat{x}\|_{\delta\varkappa} := \sup\Big\{\inf\{\|x\| : \ x \in X, \ |\bar{x}| \leqslant x\} : \ \bar{x} \in X^\delta, \ 0 \leqslant \bar{x} \leqslant |\hat{x}|\Big\} \quad (\hat{x} \in X^{\delta\varkappa}).$$

Observe that if X is Dedekind complete then $X^{\delta\varkappa} = X^\varkappa$ and $\|\cdot\|_{\delta\varkappa} = \|\cdot\|_\varkappa$.

Lemma 3.3. *If $(X, \|\cdot\|_X)$ and $(Y, \|\cdot\|_Y)$ are quasi-normed lattices, Y is an order dense ideal in X^u containing X, and $\|x\|_X = \|x\|_Y$ for all $x \in X$, then $Y \subset X^\varkappa$.*

$\lhd$ This is an immediate consequence of the definition. $\rhd$

Definition 3.4. A quasi-normed lattice X is called *intervally complete* if every order interval of X is complete or, in other words, every order bounded Cauhcy sequence of X is convergent to an element of X.

It can be easily seen that each intervally complete quasi-normed lattice is an order dense ideal of its own metric completion and every order ideal of any quasi-Banach lattice is an intervally complete quasi-normed lattice. Thus, the class of intervally complete quasi-normed lattices coincides with the class of order dense ideals of quasi-Banach lattices.

Lemma 3.5. *Intervally complete quasi-normed lattice is uniformly complete.*

$\lhd$ Let (x_n) be a uniformly Cauchy sequence, that is, there exist $e \in X_+$ and a sequence of reals (ε_n) such that $\lim_n \varepsilon_n = 0$ and $|x_{n+k} - x_n| \leqslant \varepsilon_n e$ for all $n, k \in \mathbb{N}$. Then $\|x_{n+k} - x_n\| \leqslant \varepsilon_n \|e\|$ and (x_n) is Cauchy in $(X, \|\cdot\|)$. Moreover, $|x_{k+1}| \leqslant |x_1| + \varepsilon_1 e$ for all $k \in \mathbb{N}$. By hypothesis, there exists $x = \lim_n x_n$ in $(X, \|\cdot\|)$. Passage to the limit in $|x_{n+k} - x_n| \leqslant \varepsilon_n e$ with $k \to \infty$ yields $|x - x_n| \leqslant \varepsilon_n e$ for all $n \in \mathbb{N}$, whence X is uniformly complete. $\rhd$

Lemma 3.6. *Let $\tilde{X}$ be the metric completion of an intervally complete quasi-normed lattice X. Then $\tilde{X}$ is Dedekind complete if and only if so is X.*

$\lhd$ If $\tilde{X}$ is Dedekind complete then so is X, since X is an order dense ideal of $\tilde{X}$. Assume that a quasi-normed lattice X is intervally complete and Dedekind complete and prove $\tilde{X}$ is Dedekind complete. It was proved by Veksler [21, 22] that an Archimedean vector lattice is Dedekind complete if and only if it is uniformly complete and has the projection property. By Lemma 3.5 it suffices to show that $\tilde{X}$ has the projection property. Consider an element $x \in \tilde{X}$ and a band $\tilde{B}$ in $\tilde{X}$ and pick a sequence (x_n) in X converging to x. Observe, that $B := \tilde{B} \cap X$ is a band of X and $B^\perp = \tilde{B}^\perp \cap X$, since X is an order dense ideal in $\tilde{X}$. If π stands for the band projection in X onto B, then $\pi' := I_X - \pi$ is the band projection onto $B^\perp$. The sequences (πx_n) and $(\pi' x_n)$ are Cauchy, as so is (x_n), hence they converge to some $u \in \tilde{X}$ and $u' \in \tilde{X}$, respectively. Clearly, $u \in \tilde{B}$, $u' \in \tilde{B}^\perp$, and $x = u + u'$. $\rhd$

Lemma 3.7. *A quasi-normed lattice X is intervally complete if and only if every increasing order bounded Cauchy sequence in X_+ is quasi-norm convergent.*

$\lhd$ The proof given in [23, Theorem 1.1] for normed lattices works in the quasi-normed setting. $\rhd$

Lemma 3.8. *Let X be a universally complete vector lattice and $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ an increasing net in X_+. Then there exists a band projection π on X such that $\sup_\alpha \pi x_\alpha$ exists in X, while for the complementary band projection $\pi' := I_X - \pi$ we have $N\pi' e = \sup_\alpha \pi'(x_\alpha \wedge Ne)$ for all $N \in \mathbb{N}$ and $e \in X_+$.*

$\lhd$ There is no loss of generality in assuming that $X = C_\infty(Q)$ with extremally compact space Q. (Recall that the symbol $C_\infty(Q)$ denotes the universally complete vector lattice of all continuous functions $f : Q \to [-\infty, \infty]$ for which the open set $\{q \in Q :\ -\infty < f(q) < \infty\}$ is dense in Q.) Let (x_α) be an increasing net in $C_\infty(Q)$ and define two functions $\bar{x}, x : Q \to [0, \infty]$ by

$$\bar{x}(q) = \sup\{x_\alpha(q) :\ \alpha \in \mathrm{A}\} \quad (q \in Q),$$
$$x(q) := \inf_{U \in \mathscr{N}(q)} \sup_{q' \in U} \bar{x}(q') \quad (q \in Q),$$

where $\mathscr{N}(q)$ is a basis of neighborhoods of q. Then $\bar{x}$ is lower semicontinuous and x is continuous, see [24, Lemma V.1.2 and Theorem V.1.1]. Consider an open set $Q_0 := \{q \in Q :\ x(q) < \infty\}$ and observe that its closure $\bar{Q}_0$ is clopen. Now, let π stands for the band projection of $C_\infty(Q)$ corresponding to $\bar{Q}_0$ and πx stands for the function coinciding with x on $\bar{Q}_0$ and vanishing on $Q_1 := Q \setminus \bar{Q}_0$. Evidently, $\pi x \in C_\infty(Q)$ and $\pi x = \sup_\alpha \pi x_\alpha$, see [24, Theorem V.2.1]. At the same time $x(q) = \infty$ for all $q \in Q_1$, so that $\bar{x}(q) = \infty$ for all $q \in Q_1 \setminus A$ where A is a meager subset of Q_1. The latter implies that $Ne(q) = \sup_\alpha x_\alpha(q) \wedge Ne(q)$ for all $q \in Q_1 \setminus A$, whence the desired equation $N\pi' e = \sup_\alpha \pi'(x_\alpha \wedge Ne)$ follows. $\rhd$

Lemma 3.9. *Let X be a quasi-normed lattice X with the weak σ-Fatou property. If X is intervally complete and Dedekind complete, then its maximal quasi-normed extension $X^\varkappa$ is intervally complete.*

$\lhd$ Take an increasing order bounded Cauchy sequence $(\hat{x}_n)$ in $X^{\varkappa}_{+}$. Since $X^{\varkappa}$ is Dedekind complete, there exists $\hat{x} = \sup_n \hat{x}_n$. Prove that $(\hat{x}_n)$ converges to $\hat{x}$.

We may assume without loss of generality that $A := \sum_{n=1}^{\infty} C^n n \|\hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n\|_{\varkappa} < \infty$. Applying Lemma 3.8 to the increasing sequence $(\hat{z}_n)$ with $\hat{z}_n := \sum_{k=1}^{n} k(\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k)$ yields a band projection π on X^u such that $\hat{z} := \sup_n \pi\hat{z}_n$ exists in X^u and for $\pi' := I_{X^u} - \pi$ we have $N\pi' e = \sup_n \pi'(\hat{z}_n \wedge Ne)$ for all $N \in \mathbb{N}$ and $e \in X$, $0 \leqslant e \leqslant \hat{z}$. Making use of the weak σ-Fatou property and monotonicity of the quasi-norm we deduce

$$N\|\pi' e\| \leqslant K \sup_m \|\pi'(\hat{z}_m \wedge Ne)\| \leqslant K \sup_m \|\hat{z}_m\|_{\varkappa} \leqslant KA < \infty.$$

It follows that $\pi' e = 0$ for all $e \in X$ and hence $\pi'\hat{z} = 0$, since X is order dense ideal in X^u. Thus, $\pi = I_{X^u}$ and $\hat{z} = \sup_n \hat{z}_n \in X^u$. To ensure that $\hat{z} \in X^{\varkappa}$ it suffices to check that $\|x\| \leqslant A$ for an arbitrary element $x \in X$ with $0 \leqslant x \leqslant \hat{z}$. For any such x put $y_n := \hat{z}_n \wedge x$ and observe that (y_n) is an increasing sequence in X_+ with $x = \sup_n y_n$. Moreover, (y_n) is Cauchy, since for arbitrary $n, l \in \mathbb{N}$ we can estimate:

$$\begin{aligned} \|y_{n+l} - y_n\| = \|\hat{z}_{n+l} \wedge x - \hat{z}_n \wedge x\|_{\varkappa} &\leqslant \|\hat{z}_{n+l} - \hat{z}_n\|_{\varkappa} \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+l} C^k k \|\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k\|_{\varkappa} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} C^k k \|\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k\|_{\varkappa} \to 0 \end{aligned}$$

as $n \to \infty$. The interval comleteness of X implies that the sequence (y_n) is convergent in X, so that $\lim_n y_n = \sup_n y_n = x$ by Lemma 2.6. Observe now that $\|x\| \leqslant A$, since $\|y_n\| \leqslant \|\hat{z}_n\|_{\varkappa} \leqslant A$ and $\|x\| = \lim_n \|y_n\| \leqslant A$, whence $\hat{z} \in X^{\varkappa}$.

Now we are able to show that $(\hat{x}_n)$ converges to $\hat{x}$. First note that $\hat{x} - \hat{x}_n = o\text{-}\sum_{k=n}^{\infty} (\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k)$, and consequently

$$n(\hat{x} - \hat{x}_n) \leqslant o\text{-}\sum_{k=n}^{\infty} k(\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k) \leqslant \hat{z}.$$

It follows that $0 \leqslant \hat{x} - \hat{x}_n \leqslant (1/n)\hat{z}$ and $\|\hat{x} - \hat{x}_n\|_{\varkappa} \leqslant (1/n)\|\hat{z}\|_{\varkappa} \to 0$. Appealing to Lemma 3.7 completes the proof. $\rhd$

Theorem 3.10. *Let $(X, \|\cdot\|_X)$ be a Dedekind complete quasi-normed lattice with the weak σ-Fatou property. The maximal quasi-normed extension $(X^{\varkappa}, \|\cdot\|_{\varkappa})$ is a quasi-Banach lattice if and only if X is intervally complete.*

$\lhd$ The necessity is immediate from the fact that X is an order dense ideal of $X^{\varkappa}$. To prove the sufficiency observe that the metric completion $(Y, \|\cdot\|_Y)$ of $(X^{\varkappa}, \|\cdot\|_{\varkappa})$ is Dedekind complete by Lemma 3.6. At the same time $X^{\varkappa}$ is order dense ideal of Y, since $X^{\varkappa}$ is intervally complete by Lemma 3.9 and an intervally complete quasi-normed lattice is an order dense ideal of its metric completion. Thus, $X \subset Y \subset (X^{\varkappa})^u = X^u$ and $\|x\| = \|x\|_Y$ for all $x \in X$ so that $Y \subset X^{\varkappa}$ by Lemma 3.3. It follows that $Y = X^{\varkappa}$ and $X^{\varkappa}$ is complete. $\rhd$

It is evident that if X has the Levi property then $X = X^{\varkappa}$ but the converse is false, see [1, Examples 2 and 5]. The next result asserts that the maximal quasi-normed extension with the weak Fatou property has the Levi property.

Theorem 3.11. *Let X be a Dedekind complete quasi-normed lattice. Then the maximal quasi-normed extension $X^{\varkappa}$ has the Levi property if and only if X has the weak Fatou property.*

$\lhd$ Let X be a Dedekind complete quasi-normed lattice with the weak Fatou constant K. Take an increasing net $(\hat{x}_\alpha)$ in $X^{\varkappa}$ with $B := \sup_\alpha \|\hat{x}_\alpha\|_{\varkappa} < \infty$. By Lemma 3.8 there exists a band projection π on $X^{\varkappa}$ such that $\hat{x} = \sup_\alpha \pi\hat{x}_\alpha$ exists in X^u and for every $N \in \mathbb{N}$ and

$e \in X_+$ we have $N\pi^\perp e = \sup_\alpha \pi^\perp(\hat{x}_\alpha \wedge Ne)$. Making use of the weak Fatou property we deduce $N\|\pi^\perp e\| \leqslant K \sup_\alpha \|\pi^\perp(\hat{x}_\alpha \wedge Ne)\| \leqslant K \sup_\alpha \|\hat{x}_\alpha\|_\varkappa = BK$ and $\pi^\perp = 0$, since N and e are arbitrary. It follows that π is the identity operator and $\hat{x} = \sup_\alpha \hat{x}_\alpha$. Show that $\hat{x} \in X^\varkappa$. If $x \in X$ and $0 \leqslant x \leqslant \hat{x}$ then $x \wedge \hat{x}_\alpha \in X$ and $(x \wedge \hat{x}_\alpha)$ is an increasing net with the supremum x. By the weak Fatou property we have $\|x\| \leqslant K \sup_\alpha \|x \wedge \hat{x}_\alpha\| \leqslant K \sup_\alpha \|\hat{x}_\alpha\|_\varkappa = KB$. It follows that $\sup\{\|x\| : x \in X,\ 0 \leqslant x \leqslant \hat{x}\} \leqslant KB$ and $\hat{x} \in X^\varkappa$.

To prove the converse, it suffices to observe that if $X^\varkappa$ has the Levi property, then X has the weak Fatou property by Proposition 2.12. $\rhd$

Proposition 3.12. *Let X be a Dedekind complete quasi-normed lattice. Then the maximal quasi-normed extension $X^\varkappa$ has the Fatou property if only if X has the Fatou property.*

$\lhd$ The necessity is obvious. To prove the sufficiency take an increasing net $(\hat{x}_\alpha)$ in $X^\varkappa_+$ such that $\hat{x} = \sup_\alpha \hat{x}_\alpha$ for some $\hat{x} \in X^\varkappa_+$. Pick an arbitrary $x \in X_+$ with $0 \leqslant x \leqslant \hat{x}$ and note that $\hat{x}_\alpha \wedge x$ is an increasing set in X_+ and $\sup_\alpha \hat{x}_\alpha \wedge x = x$. In virtue of the Fatou property we have $\|x\| = \sup_\alpha \|\hat{x}_\alpha \wedge x\| \leqslant \sup_\alpha \|\hat{x}_\alpha\|_\varkappa$. Hence, $\|x\| \leqslant \sup_\alpha \|\hat{x}_\alpha\|_\varkappa \leqslant \|\hat{x}\|_\varkappa$ for all $x \in X_+$ with $0 \leqslant x \leqslant \hat{x}$. The latter implies that $\|\hat{x}\|_\varkappa = \sup_\alpha \|\hat{x}_\alpha\|_\varkappa$. $\rhd$

Corollary 3.13. *Let X be a Dedekind complete quasi-normed lattice. If X has the Fatou property then the maximal quasi-normed extension $X^\varkappa$ has the Fatou and the Levi property.*

$\lhd$ The proof follows immediately from Theorem 3.11 and Proposition 3.12. $\rhd$

4. Concluding remarks

Remark 4.1. The maximal normed extension of a Dedekind complete normed lattice was introduced and the Theorem 3.10 was proved in Abramovich [1, Definition on p. 8 and Theorem 3]. Lemmas 3.6 and 3.7 for normed lattices can be seen in Veksler [22, Lemma 2] and [23, Theorem 1.1], respectively.

Remark 4.2. In the case of normed lattices Theorem 3.10 is true without the weak σ-Fatou property, see Abramovich [1]. We do not know whether or not the assumption about the weak σ-Fatou property is superfluous in Theorem 3.10.

Remark 4.3. Let X be a quasi-Banach lattice and $(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ a vector measure space with a localizable measure $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ which is countable additive in the sense of order or quasi-norm convergence depending on the context, see [10, 11]. The Bartle–Dunford–Schwartz type integration and the purely order based Kantorovich–Wright integration with respect to μ provide two quasi-Banach lattices of integrable functions, $L^1_\tau(\mu)$ and $L^1_o(\mu)$, respectively, see [10]. Moreover, the vector lattice $L^0(\mu)$ (of equivalence classes) of μ-a.e. finite $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$-measurable real-valued functions is a universal completion of both quasi-Banach lattices $L^1_o(\mu)$ and $L^1_\tau(\mu)$. According to Definition 3.2 we can construct maximal quasi-normed extensions $(L^1_{o\varkappa}(\mu), \|\cdot\|_{o\varkappa})$ and $(L^1_{\tau\varkappa}(\mu), \|\cdot\|_{\tau\varkappa})$ of $L^1_o(\mu)$ and $L^1_\tau(\mu)$, respectively. By virtue of Theorem 3.10 $L^1_{\tau\varkappa}(\mu)$ is a quasi-Banach lattice and an order dense ideal in $L^0(\mu)$. Moreover, $L^1_{\tau\varkappa}(\mu)$ has the Fatou and Levi properties by Corollary 3.13, since $L^1_\tau(\mu)$ is order continuous.

Remark 4.4. Similarly, $L^1_{o\varkappa}(\mu)$ is a quasi-normed lattice and order dense ideal in $L^0(\mu)$, but $L^1_{o\varkappa}(\mu)$ is metrically complete under the additional assumption that $L^1_o(\mu)$ has the weak σ-Fatou property. We do not know whether $L^1_{o\varkappa}(\mu)$ is metrically complete (and hence a quasi-Banach lattice) without this additional assumption coming from Theorem 3.10.

Definition 4.5. An $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$-measurable function $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ is called *weakly integrable with respect to μ* or *weakly μ-integrable* if

$$\|f\|_\mu := \sup_{x^* \in B^*_+} \int |f|\ d|x^*\mu| < +\infty,$$

where $|x^*\mu| : \mathscr{R}^{\mathrm{loc}} \to [0,\infty]$ variation of $x^*\mu$ and B^*_+ the positive part of the unit ball in X^*. A weakly integrable function f is *integrable with respect to* μ if for each $A \in \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ there exists a vector denoted by $\int_A f\,d\mu \in X$, such that

$$x^*\Bigg(\int\limits_A f\,d\mu\Bigg) = \int\limits_A f\,dx^*\mu \quad \text{for all} \quad x^* \in X^*.$$

Denote by $L^1_w(\mu)$ the space of (equivalence classes) all weakly μ-integrable function equipped with the norm $\|\cdot\|_\mu$ and let $L^1(\mu)$ stand for the subspace of $L^1_w(\mu)$ consisting of (equivalence classes) all μ-integrable functions. Note that if $\|f\|_\mu < \infty$ then $|f| < \infty$ μ-a.e. Thus, $L^1_w(\mu)$ and $L^1(\mu)$ can be considered as subspaces of $L^0(\mu)$.

Theorem 4.6. *Let X be a Banach lattice and $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ a vector measure space with $\mathscr{R}$-decomposable measure $\mu : \mathscr{R} \to X_+$. Then $L^1_w(\mu)$ and $L^1_{\tau\varkappa}(\mu)$ coincide as Banach lattices.*

Remark 4.7. In Theorem 4.6 $\mathscr{R}$-decomposability of measure μ provides $L^1_w(\mu)$ with the Levi and Fatou properties (see [4, Theorem 5.8]), while $L^1_{\tau\varkappa}(\mu)$ always has these properties. Without $\mathscr{R}$-decomposability assumption it may happen that $L^1_w(\mu) \neq L^1_{\tau\varkappa}(\mu)$. Similar questions for the space of order integrable functions $L^1_o(\mu)$ and the corresponding maximal quasi-Banach extension $L^1_{o\varkappa}(\mu)$ remain open.

References

1. *Abramovich Yu. A.* On maximal normed extension of a semi-ordered normed spaces // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.—1970.—Vol. 3.—P. 7–17.
2. *Abramovich Y. A. and Aliprantis C. D.*, An Invitation to Operator Theory.—Providence (R. I.): Amer. Math. Soc, 2002.—iv+530 p.—(Graduate Stud. in Math. Vol. 50).
3. *Aliprantis C. D. and Burkinshaw O.* Positive Operators.—London etc.: Acad. Press Inc., 1985.—xvi+367 p.
4. *Calabuig J. M., Delgado O., Juan M. A., and Sánchez Pérez E. A.* On the Banach lattice structure of L^1_w of a vector measure on a δ-ring // Collect. Math.—2014.—Vol. 65.—P. 67–85.
5. *Curbera G. P. and Ricker W. J.* Vector measures, integration, applications // Positivity.—Basel: Birkhäuser, 2007.—P. 127–160.—(Trends Math.).
6. *Hyers D. H.* A note on linear topological spaces // Bull. Amer. Math. Soc.—1938.—Vol. 44, № 2.—P. 76–80.
7. *Juan A. M. and Sánchez-Pérez E. A.* Maurey–Rosenthal domination for abstract Banach lattices // J. Ineq. and Appl.—2013.—Vol. 213.—P. 1–12.
8. *Kalton N. J.* Convexity conditions for non-locally convex lattices // Glasgow Math. J.—1984.—Vol. 25.—P. 141–142.
9. *Kalton N. J.* Quasi-Banach spaces // Handbook of the Geometry of Banach Spaces (Eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss).—Amsterdam a. o.: Elsevier, 2003.—P. 1118–1130.
10. *Kusraev A. G. and Tasoev B. B.* Kantorovich–Wright integration and representation of quasi-Banach lattices // Dokl. Math.—2017.—Vol. 474.—P. 15–18.
11. *Kusraev A. G. and Tasoev B. B.* Kantorovich–Wright integration and representation of vector lattices // J. Math. Anal. Appl.—2017.—Vol. 455.—P. 554–568.
12. *Kusraev A. G. and Tasoev B. B.* Kantorovich–Wright integration and representation of quasi–Banach lattices // J. Math. Anal. Appl.—(to appear).
13. *Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam–London: North-Holland, 1971.—514 pp.
14. *Lewis D. R.* On integration and summability in vector spaces // Illinois J. Math.—1972.—Vol. 16.—P. 294–307.
15. *Maligranda L.* Type, cotype and convexity properties of quasi-Banach spaces // Proc. of the International Symposium on Banach and Function Spaces Kitakyushu.—Japan, 2003.—P. 83–120.
16. *Masani P. R. and Niemi H.* The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli–Fubini theorems. II. Pettis integration // Adv. Math.—1989.—Vol. 75.—P. 121–167.

17. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.—xvi+395 p.
18. *Okada S., Ricker W. J., and Sánchez-Pérez E. A.* Optimal Domain and Integral Extension of Operators Acting in Function Spaces.—Basel: Birkhäuser, 2008.—(Oper. Theory Adv. Appl. Vol. 180).
19. *Pietsch A.* Operator Ideals.—Berlin: Deutsch. Verlag Wiss., 1978; North–Holland, Amsterdam–London–N. Y.–Tokyo, 1980.
20. *Sanchez Perez E. A. and Tradacete P.* Bartle–Dunford–Schwartz integration for positive vector measures and representation of quasi-Banach lattices // J. Nonlin. and Conv. Anal.—2016.—Vol. 17, № 2.—P. 387–402.
21. *Veksler A. I.* On realization of Archimedean K-lineals // Sib. Math. J.—1962.—Vol. 3, № 1.—P. 7–16.
22. *Veksler A. I.* The concept of a linear lattice which is normal in itself, and certain applications of this concept to the theory of linear and linear normed lattices // Isv. Vuzov. Math.—1966.—Vol. 4.—P. 13–22.
23. *Veksler A. I.* Interval completeness and intervally complete normability of KN-lineals // Isv. Vuzov. Math.—1970.—Vol. 4.—P. 36–46.
24. *Vulikh B. Z.* Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces.—M.: Fizmatgiz, 1961.—[in Russian].

Received 14 July, 2017

Kusraev Anatoly Georgievich
Vladikavkaz Science Center of the RAS, *Chairman*
22 Markus Street, Vladikavkaz, 362027, Russia;
North Ossetian State University,
Head of the Department of Mathematical Analysis
44–46 Vatutin Street, Vladikavkaz, 362025, Russia
E-mail: kusraev@smath.ru

Tasoev Batradz Botazovich
Southern Mathematical Institute — the Affiliate of
Vladikavkaz Science Center of the RAS, *Researcher*
22 Markus street, Vladikavkaz, 362027, Russia
E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru

О МАКСИМАЛЬНОМ КВАЗИНОРМИРОВАННОМ РАСШИРЕНИИ КВАЗИНОРМИРОВАННЫХ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТОК

Кусраев А. Г., Тасоев Б. Б.

Цель работы — распространить конструкцию Абрамовича максимального нормированного расширения нормированной решетки на класс квазинормированных решеток. Установлено, что максимальное квазинормированное расширение $X^{\varkappa}$ порядково полной квазинормированной решетки X со слабым счетным свойством Фату является квазибанаховой решеткой в том и только в том случае, когда X интервально полна. Боле того, $X^{\varkappa}$ обладает свойствами Леви и Фату, если только X — порядково полная квазинормированная решетка со свойством Фату. Обсуждается также возможность применения этой конструкции к определению пространства слабо интегрируемых функций относительно меры со значениями в квазибанаховой решетке, не прибегая к двойственности (которая может оказаться тривиальной).

Ключевые слова: квазинормированная решетка, максимальное квазинормированное расширение, свойство Фату, свойство Леви, векторная мера, слабо интегрируемые функции.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 51–58

УДК **517.9**

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ[1]

А. П. Солдатов

Профессору А. Б. Шабату в связи с его 80-летием

Для эллиптического уравнения $2l$ порядка, старшие коэффициенты которого постоянны, в многосвязной области с гладкой границей на плоскости рассмотрена краевая задача с нормальными производными (k_j-1)– порядка, $j=1,\dots,l$, где $1\leqslant k_1<\ldots<k_l\leqslant 2l$. При $k_j=j$ она переходит в задачу Дирихле, а при $k_j=j+1$ — в задачу Неймана. В работе даны достаточное условие фредгольмовости этой задачи и формула индекса.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, краевая задача, нормальные производные, многосвязная область, гладкий контур, фредгольмовость, формула индекса.

Рассмотрим в области D на плоскости, ограниченной гладким контуром Γ, для эллиптического уравнения $2l$ порядка

$$\sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r}\partial y^r} + \sum_{0\leqslant r\leqslant k\leqslant 2l-1} a_{rk}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r}\partial y^r} = F \tag{1}$$

с постоянными старшими коэффициентами $a_r\in\mathbb{R}$ и младшими коэффициентами $a_{rk}\in C^\mu(\overline{D})$ краевую задачу

$$\left.\frac{\partial^{k_j-1}u}{\partial n^{k_j-1}}\right|_\Gamma = f_j,\quad j=1,\dots,l, \tag{2}$$

где $n=n_1+in_2$ означает единичную внешнюю нормаль и натуральные k_j подчинены условию $1\leqslant k_1<\ldots<k_l\leqslant 2l$. Как обычно, под нормальной производной $(\partial/\partial n)^r$ порядка r понимается здесь граничный оператор

$$\left(n_1\frac{\partial}{\partial x_1} + n_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^r.$$

Аналогичный смысл имеет и граничный оператор $(\partial/\partial e)^r$ по отношению к единичному касательному вектору $e=e_1+ie_2=i(n_1+in_2)$.

При $k_j=j$ имеем задачу Дирихле, а в случае $k_j=j+1$, $1\leqslant j\leqslant l$, эту задачу естественно назвать задачей Неймана, она была изучена А. В. Бицадзе [1] для полигармонического уравнения. Для однородного уравнения (1) без младших коэффициентов задача (2) была рассмотрена в [2]. Общий случай задачи (1), (2) в классе функций

$$u\in C^{2l}(D)\cap C^{2l-1,\mu}(\overline{D}),\quad \sum_{r=0}^{2l} a_r\frac{\partial^{2l}u}{\partial x^{2l-r}\partial y^r}\in C^\mu(\overline{D}), \tag{3}$$

[1] Работа выполнена в рамках Государственного задания РФ, тема № 1.7311.2017/БЧ.

был исследован в [3]. В этой работе задача (2) была редуцирована к эквивалентной системе интегральных уравнений в классе $C^{\mu}(\Gamma)\times C^{\mu}(\overline{D})$, причем уравнения по контуру были сингулярными. Заметим, что пространство (3) зависит от старших коэффициентов уравнения (1).

В настоящей работе эти результаты распространим на случай обычного пространства $C^{2l,\mu}(\overline{D})$. В этом случае система интегральных уравнений, о которых шла речь выше, должна рассматриваться в пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma)\times C^{\mu}(\overline{D})$, и ее исследование требует отдельного подхода. Ниже все обозначения [3] сохраняются без изменений.

В дальнейшем предполагается, что Γ принадлежит классу $C^{2l,\mu}$. В случае $l=1$ это условие несколько усилим, потребовав $\Gamma\in C^{1,\mu+\varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon>0$. Удобно в этой связи под $C^{1,\mu+0}$ понимать обьединение классов $C^{1,\mu+\varepsilon}$ по всем $\varepsilon>0$. В частности, Γ принадлежит этому классу для всех значений l. Таким образом, функции n_1, n_2 и, значит, коэффициенты граничных дифференциальных операторов (2) принадлежат классу $C^{2l-1,\mu}(\Gamma)$. Решение уравнения (1) ищется в классе $C^{2l,\mu}(\overline{D})$, соответственно его правая часть должна принадлежать $C^{\mu}(\overline{D})$, а функции f_j в краевом условии (2) — классу $C^{2l-k_j+1,\mu}(\Gamma)$.

Пусть ν_k, $1\leqslant k\leqslant m$, — все различные корни характеристического уравнения $a_0+a_1z+\ldots+a_{2l}z^{2l}=0$ в верхней полуплоскости и l_k — кратность k-го корня, так что $\sum_k l_k=l$. С этими корнями свяжем матрицу $B\in\mathbb{C}^{2l\times l}$ следующего специального вида.

Если некоторый n-вектор $g(z)=(g_1(z),\ldots,g_n(z))$ аналитичен в окрестности точек $\nu_1,\ldots,\nu_m$, то, исходя из разбиения $l=l_1+\ldots+l_m$, можем ввести блочную $n\times l$-матрицу $W_g(\nu_1,\ldots,\nu_m)=(W_g(\nu_1),\ldots,W_g(\nu_m))$, где матрица $W_g(\nu_k)\in\mathbb{C}^{n\times l_k}$ составлена из векторов-столбцов

$$g(\nu_k),g'(\nu_k),\ldots,\frac{1}{(l_k-1)!}\,g^{(l_k-1)}(\nu_k).$$

Применяя это обозначение к $2l$-столбцу $h(z)=(1,z,\ldots,z^{2l-1})$, определим теперь $2l\times l$-матрицу B равенством $B=W_h(\nu_1,\ldots,\nu_m)$.

Заметим, что квадратная матрица $\widetilde{B}$, составленная из B и $\overline{B}$, обратима. Если $l\times 2l$-матрицу, образованную строками обратной матрицы $\widetilde{B}^{-1}$, обозначить через B^1, то вторые ее l-строк образуют комплексно сопряженную матрицу. Поэтому B и B^1 связаны соотношением $2\operatorname{Re}BB^1=\mathbb{1}$, где здесь и ниже $\mathbb{1}$ означает единичную матрицу (или единичный оператор).

С краевыми условиями (2) свяжем $l\times 2l$-матрицу $C=(C_{jk})\in C^{1,\mu}(\Gamma)$, элементы которой определяются из соотношений

$$\sum_{k=1}^{2l}C_{jk}(t)z^{k-1}=\big[e_1(t)+e_2(t)z\big]^{2l-k_j}\big[-e_2(t)+e_1(t)z\big]^{k_j-1},\quad 1\leqslant j\leqslant l,\tag{4}$$

где $e=e_1+ie_2=i(n_1+in_2)$ — единичный касательный вектор к контуру Γ. Заметим, что его направление оставляет область D слева.

Сформулируем аналог основной теоремы из [3] применительно к пространству $C^{2l,\mu}(\overline{D})$. Некоторое отличие состоит только в том, что контур Γ в рассматриваемом случае не предполагается простым.

Теорема 1. *Пусть контур Γ, ограничивающий область D, принадлежит классу $C^{2l,\mu}$ (классу $C^{2,\mu+0}$ при $l=1$) и состоит из простых контуров $\Gamma_0,\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$, где Γ_0 охватывает все остальные контуры.*

Тогда в предположении

$$\det[C(t)B]\neq 0,\quad t\in\Gamma,\tag{5}$$

задача (1), (2) *фредгольмова в пространстве* $C^{2l,\mu}(\overline{D})$ *и ее индекс* $\varkappa$ *дается формулой*

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi}[\arg\det(CB)]\big|_{\Gamma} + l(2l-n), \tag{6}$$

где приращение на контуре берется в положительном направлении (*т. е. в направлении, оставляющем область слева*) *и* n *есть число связных компонент контура* Γ.

Заметим, что в случае простого контура ($n = 0$) эта теорема согласуется с теоремой 1 из [5], полученной по отношению к пространству (3).

$\lhd$ Как и в [3] в принятых предположениях гладкости относительно Γ порядки граничных интегральных операторов в (2) можно выровнять (с сохранением эквивалентности задачи).

Условимся для функции $\varphi \in C^1(\Gamma)$ под φ' понимать производную по параметру длины дуги, отсчитываемой в положительном направлении по отношению к D (т. е. в направлении, оставляющем область D слева). Тогда, очевидно, имеем равенство

$$(u^+)' = \frac{\partial u}{\partial e}\bigg|_{\Gamma},$$

здесь и ниже символ " + " указывает на граничное значение функции. К сожалению, операция дифференцирования $\varphi \to \varphi'$ не является обратимой $C^1(\Gamma) \to C(\Gamma)$. Однако как показано в [3], этим свойством обладает операция

$$\varphi \to \varphi' + \frac{1}{s(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma} \varphi(t)\, d_1t,$$

где $s(\Gamma)$ означает длину контура Γ и d_1t есть элемент длины дуги. Заметим, что r-ая итерация этой операции действует аналогичным образом:

$$\varphi \to \varphi^{(r)} + \frac{1}{s(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma} \varphi(t)\, d_1t.$$

В соответствии с этим (2) можно заменить эквивалентным краевым условием

$$\left(\frac{\partial^{k_j-1}u}{\partial n^{k_j-1}}\right)^{(2l-k_j)} + \frac{1}{s(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial^{k_j-1}u}{\partial n^{k_j-1}}\, d_1t = f_j^{(2l-k_j)} + \frac{1}{s(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma} f_j(t)\, d_1t, \quad 1 \leqslant j \leqslant l. \tag{7}$$

Аналогично [3] доказывается, что для $u \in C^{2l,\mu}(\overline{D})$ и $2 \leqslant k_j \leqslant 2l-1$ справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial^{k_j-1}u}{\partial n^{k_j-1}}\right)^{(2l-k_j)} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial e}\right)^{2l-k_j}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{k_j-1}\right]u + \sum_{1\leqslant k+r\leqslant 2l-k_j} b_{kr}\left(\frac{\partial^{k+r}u}{\partial x^k\partial y^r}\right)^{+}$$

с некоторыми $b_{kr} \in C^{k_j-1,\mu}(\Gamma)$, которое при $k_1 = 1$ следует заменить на

$$(u^+)^{(2l-1)} = \frac{\partial^{2l-1}u}{\partial e^{2l-1}}\bigg|_{\Gamma} + \sum_{1\leqslant k+r\leqslant 2l-2} b_{kr}\left(\frac{\partial^{k+r}u}{\partial x^k\partial y^r}\right)^{+}, \quad b_{kr} \in C^{1,\mu}(\Gamma).$$

Во всех случаях краевое условие (7) можно записать в форме

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial e}\right)^{2l-k_j}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{k_j-1}\right]u+\sum b_{kr}\left(\frac{\partial^{k+r}u}{\partial x^k\partial y^r}\right)^{+}+\frac{1}{s(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial^{k_j-1}u}{\partial n^{k_j-1}}\,d_1t=f_j^0, \qquad (8)$$

где суммирование ведется по $1\leqslant k+r\leqslant 2l-2$, коэффициенты $b_{kr}\in C^{1,\mu}(\Gamma)$ и

$$f_j^0=f_j^{(2l-k_j)}+\frac{1}{s(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma}f_j(t)\,d_1t,\quad k_j<2l.$$

При $j=l$ и $k_l=2l$ ее следует заменить на $f_l^0=f_l$. Во всех случаях вектор-функция $f^0\in C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Введем блочно-диагональную $l\times l$-матрицу J, составленную из клеток Жордана:

$$J=\operatorname{diag}(J_1,\dots,J_m),\quad J_k=\begin{pmatrix}\nu_k&1&0&\dots&0\\0&\nu_k&1&\dots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot\\0&0&0&\dots&1\\0&0&0&\dots&\nu_k\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{l_k\times l_k}.$$

С этой матрицей в дальнейшем связана операция, которая комплексному числу $z=x+iy$ ставит в соответствие $l\times l$-матрицу $z_J=x+yJ$, где x означает скалярную матрицу. В явном виде $z_J=\operatorname{diag}(z_{J_1},\dots,z_{J_m})$, где

$$z_{J_k}=\begin{pmatrix}x+\nu_ky&y&0&\dots&0\\0&x+\nu_ky&y&\dots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot\\0&0&0&\dots&y\\0&0&0&\dots&x+\nu_ky\end{pmatrix}.$$

Обозначим еще через P_{2l-2} класс всех многочленов $p(x,y)$ степени не выше $2l-2$, его размерность, очевидно, дается равенством $\dim P_{2l-2}=l(2l-1)$.

Совершенно аналогично [3] краевая задача (1), (8) редуцируется к эквивалентной задаче для эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}-J\frac{\partial\phi}{\partial x}+M^1\phi+\widetilde{M}^1p=f^1, \qquad (9)$$

$$2\operatorname{Re}\left[(CB)\phi^{+}\right]+M^0\phi+\widetilde{M}^0p=f^0, \qquad (10)$$

где оператор M^1 ограничен в $C^{1,\mu}(\overline{D})$, оператор M^0 компактен в $C^{1,\mu}(\Gamma)$, а линейные операторы $\widetilde{M}^1$ и $\widetilde{M}^0$ действуют соответственно из $P_{2l-2}\to C^{\mu}(\overline{D})$ и $P_{2l-2}\to C^{1,\mu}(\Gamma)$ (точное выражение всех этих операторов для дальнейшего несущественно).

Что касается комплексной l-вектор-функции f^1, то она принадлежит $C^{\mu}(\overline{D})$ и определяется равенством $f^1=(B^1_{1,2l},\dots,B^1_{l-1,2l},B^1_{1,2l}F)$, где $B^1_{j,2l}$ представляют собой элементы последнего столбца $l\times 2l$-матрицы B^1, введенной выше. Напомним, что вещественная l-вектор-функция $f^0\in C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Как и в [3] введем интегральные операторы по области:

$$(I^1\varphi)(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_D(t-z)_J^{-1}\varphi(t)\,d_2t,\quad z\in D,$$

$$(S^1\varphi)(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_D(t-z)_J^{-2}\varphi(t)\,d_2t,\quad z\in D,$$

где d_2t означает элемент площади. Последний интеграл здесь сингулярный и понимается в соответствующем смысле. Необходимое условие существования этого интеграла:

$$\int_{\mathbb{T}} \xi_J^{-2}\, d_1\xi = 0,$$

где $\mathbb{T}$ означает единичную окружность, легко проверяется. Отметим, что в силу четности функции ξ_J^{-2} выполняется и условие

$$\int_{\mathbb{T}^+} \xi_J^{-2}\, d_1\xi = 0, \tag{11}$$

где $\mathbb{T}^+$ означает любую полуокружность.

Как показано в [4], для $\varphi \in C^\mu(\overline{D})$ функция $I^1\varphi$ непрерывно дифференцируема в области D и справедливы формулы

$$\frac{\partial(I^1\varphi)}{\partial x} = \sigma_1\varphi + S^1\varphi, \quad \frac{\partial(I^1\varphi)}{\partial y} = \sigma_2\varphi + JS^1\varphi, \tag{12}$$

с некоторыми матрицами $\sigma_k \in \mathbb{C}^{l\times l}$, связанными соотношением $\sigma_2 = J\sigma_1$. В частности,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}\right) I^1\varphi = 0. \tag{13}$$

В силу (11) к сингулярному интегральному оператору S^1 можно применить теорему 3.5.1 из [5], согласно которой этот оператор ограничен в $C^\mu(\overline{D})$. С учетом (12) отсюда следует, что оператор I^1 ограничен $C^\mu(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Введем далее интегральные операторы по контуру

$$(I^0\psi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1}\, dt_J\psi(t), \quad z \in D,$$

где по отношению к точке $t = t_1 + it_2$ на кривой dt_J означает комплексный матричный дифференциал $dt_1 1 + dt_2 J$ и контур Γ ориентирован положительно по отношению к D, и сингулярный оператор

$$(S^0\psi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)_J^{-1}\, dt_J\psi(t), \quad t_0 \in \Gamma.$$

Последний интеграл здесь понимается в смысле главного значения по Коши.

По терминологии [6] функция $\phi = I^0\psi$ является J-аналитичной в области D, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0. \tag{14}$$

Эта система при $J = i$ переходит в классическую систему Коши — Римана. Как показано в [6], все основные факты теории аналитических функций, связанные с интегральной формулой Коши, распространяются и на решения системы (14).

Очевидно, в случае скалярной матрицы $J = i$ оператор S^0 переходит в классический сингулярный оператор Коши, который обозначим через S. Как показано в [7], разность

$S^0 - S$ является оператором, компактным в $C^{1,\mu}$. В [7] также установлено, что в предположении (4) основные результаты классической теории сингулярных операторов [8] распространяются и на оператор

$$N^0\psi = \mathrm{Re}\left[CB(\psi + S^0\psi)\right], \tag{15}$$

действующий в пространстве вещественных l-вектор-функций $\psi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$. Здесь учтено, что в силу принятых предположение относительно гладкости контура Γ матрица-функция $C(t)$ в определении (4) принадлежит классу $C^{1,\mu+0}(\Gamma)$.

Таким образом, этот оператор фредгольмов и его индекс дается формулой

$$\mathrm{ind}\, N^0 = -\frac{1}{\pi}\big[\arg\det(CB)\big]\Big|_{\Gamma}. \tag{16}$$

При этом любое решение $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$ уравнения $\mathrm{Re}[CB(\psi + S^0\psi)] = f$ с правой частью $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ принадлежит $C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Согласно [5] оператор I^0 ограничен $C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$ и справедлива формула Сохоцкого — Племеля

$$2(I^0\psi)^+ = \psi + S^0\psi. \tag{17}$$

Утверждается, что любая функция $\phi \in C^{1,\mu}(\overline{D})$ единственным образом представима в виде

$$\phi = I^1\varphi^1 + I^0\varphi^0 + i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l \tag{18}$$

с некоторыми комплексной l-вектор-функцией $\varphi^1 \in C^{\mu}(\overline{D})$ и вещественной функцией $\varphi^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$, удовлетворяющей условиям

$$\int\limits_{\Gamma_j} \varphi(t)\, d_1 t = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{19}$$

В самом деле, положим

$$\varphi^1 = \left(\frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi,$$

и пусть $\phi^0 = \phi - I^1\varphi^1$. Тогда в силу (13) функция ϕ^0 является J-аналитической в области D, т. е. удовлетворяет уравнению (14), и принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$. Поэтому дело сводится к представлению

$$\phi^0 = I^0\varphi^0 + i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l,$$

с условиями (19) на вещественную плотность φ.

В случае пространств C^{μ} это предложение установлено в [9] (см. также [10]). Таким образом, функция φ^0 является решением уравнения $\mathrm{Re}(\psi + S^0\psi) = f$ с правой частью $f = \mathrm{Re}\,\phi^0$, которая по условию принадлежит классу $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Как отмечено выше, в этом случае его решение φ^0 также принадлежит $C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Пользуясь представлением (18) и формулой Сохоцкого — Племеля (17), задачу (9), (10) можем эквивалентным образом редуцировать к системе относительно набора $(\varphi^1, \varphi^0, p, \xi)$, которая определяется уравнениями

$$\varphi^1 + M^1\big(I^1\varphi^1 + I^0\varphi^0 + i\xi\big) + \widetilde{M}^1 p = f^1,$$
$$2\mathrm{Re}\left[CB(I^1\varphi^1)^+ + i\xi\right] + \mathrm{Re}\, CB\big(\varphi^0 + S^0\varphi^0\big) + M^0\big(I^1\varphi^1 + I^0\varphi^0 + i\xi\big) + \widetilde{M}^0 p = f^0,$$

подчиненной условиям (19). Введем для краткости пространство $X = P_{2l-2}\times\mathbb{R}^l$, которое согласно (8) имеет размерность

$$\dim X = l(2l-1) + l = 2l^2, \tag{20}$$

операторы

$$\begin{gathered} N^{11} = \varphi^1 + M^1 I^1 \varphi^1, \quad N^{10} = M^1 I^0, \\ N^{01}\varphi^1 = 2\operatorname{Re}\left[CB(I^1\varphi^1)^+\right] + M^0 I^1 \varphi^1, \\ N^{00}\varphi^0 = \operatorname{Re}\left[CB(\varphi^0 + S^0\varphi)\right] + M^0 I^0 \varphi^0, \end{gathered} \tag{21}$$

и, наконец, операторы

$$T^1(p,\xi) = \widetilde{M}^1 p + I^0(i\xi), \quad T^0(p,\xi) = \widetilde{M}^0 p - 2\operatorname{Im}(B)\xi + M^0(i\xi).$$

Тогда предыдущую систему можем записать в краткой форме

$$N\big(\varphi^1,\varphi^0\big) + T(p,\xi) = \big(f^1, f^0\big) \tag{22}$$

с операторными матрицами

$$N = \begin{pmatrix} N^{11} & N^{10} \\ N^{01} & N^{00} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} T^1 \\ T^0 \end{pmatrix}.$$

Согласно (20) пространство $C^\mu(\overline{D})\times C^{1,\mu}(\Gamma)\times X$ является расширением пространства $C^\mu(\overline{D}) \times C^{1,\mu}(\Gamma)$ на $2l^2$ измерений, поэтому на основании известных свойств фредгольмовых оператров [11] операторы (N,T) и N фредгольмово эквивалентны и их индексы связаны соотношением

$$\operatorname{ind}(N,T) = \operatorname{ind} N + 2l^2. \tag{23}$$

С другой стороны, условие (19) выделяет в пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma)$ замкнутое подпространство коразмерности ln, поэтому из тех же соображений индекс $\varkappa$ системы (22), (19) связан с индексом оператора N соотношением

$$\varkappa = \operatorname{ind}(N,T) - ln. \tag{24}$$

Рассмотрим подробнее операторы (21). Условимся писать $N_1 \sim N_2$, если разность $N_1 - N_2$ является компактным оператором. Вспоминая, что оператор оператор M^0 компактен в $C^{1,\mu}(\Gamma)$, в обозначениях (15) можем написать

$$N^{11} \sim 1, \quad N^{10} \sim 0, \quad N^{00} \sim N^0$$

и, следовательно,

$$N \sim M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N^{0,1} & N^0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Как отмечено выше, оператор N^0 фредгольмов и его индекс дается формулой (16). В частности, существует его регуляризатор, т. е. ограниченный в $C^{1,\mu}$ оператор R со свойством $R^0N^0 \sim N^0R^0 \sim 1$. Непосредственно проверяется, что оператор

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -R^0N^{0,1} & R^0 \end{pmatrix}$$

служит регуляризатором к оператору M и, следовательно, оператор M фредгольмов. Но тогда на основании (25) N — фредгольмов оператор, а вместе с ним и исходная задача (1), (2).

Пусть $M(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, получается заменой N^{01} на tN^{01} в определении (25) оператора M. Те же соображения показывают, что оператор $M(t)$ также фредгольмов. Поскольку он непрерывно зависит от t, его индекс не зависит от t и, в частности, $\operatorname{ind} M = \operatorname{ind} M(0) = \operatorname{ind} N^0$. В силу (25) $\operatorname{ind} N = \operatorname{ind} N^0$, что вместе с (16) и (23), (24) завершает доказательство формулы индекса (6) и теоремы. $\triangleright$

Литература

1. *Бицадзе А. В.* К задаче Неймана для гармонических функций // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 311, № 1.—С. 11–13.
2. *Малахова Н. А., Солдатов А. П.* Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка // Диф. уравнения.—2008.—Т. 44, № 8.—С. 1077–1083.
3. *Кошанов Б., Солдатов А. П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения на плоскости // Диф. уравнения.—2016.—Т. 52, № 12.—С. 1666–1681.
4. *Ващенко О. В., Солдатов А. П.* Интегральное представление решений обобщенной системы Бельтрами // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Информатика и прикладная математика.—2006.—Вып. 6, № 1 (21).—С. 3–6.
5. *Солдатов А. П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современная математика фундаментальные направления.—2016.—Т. 63.—С. 1–179.
6. *Soldatov A. P.* Hyperanalytic functions and their applications // J. Math. Sci.—2004.—Vol. 17.—P. 1–111.
7. *Абаполова Е. А., Солдатов А. П.* К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та.—2010.—Т. 5 (76), вып. 18.—С. 6–20.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1968.—512 с.
9. *Солдатов А. П.* Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // Изв. АН СССР. Сер. Математика.—1991.—Т. 55, № 5.—С. 1070–1100.
10. *Солдатов А. П.* Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису // Современная математика и ее приложения.—2010.—№ 67.—С. 99–102.
11. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи — Зингера об индексе.—М.: Мир, 1970.

Статья поступила 6 июля 2017 г.

Солдатов Александр Павлович
Белгородский государственный национальный
исследовательский университет,
заведующий кафедрой математического анализа
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
E-mail: soldatov@bsu.edu.ru, soldatov48@gmail.com

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HIGHER ORDER ELLIPTIC EQUATIONS IN MANY CONNECTED DOMAIN ON THE PLANE

Soldatov A. P.

For the elliptic equation of $2l$th order with constant (and leading) coefficients boundary value a problem with normal derivatives of the (k_j-1)−order, $j = 1, \ldots, l$ considered. Here $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_l \leqslant 2l$. When $k_j = j$ it moves to the Dirichlet problem, and when $k_j = j+1$ it corresponds to the Neumann problem. The sufficient condition of the Fredholm problem and index formula are given.

Key words: elliptic equation, boundary value problem, normal derivatives, many connected domain, smooth contour, Fredholm property, index formula.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 59–69

УДК **517.958, 517.986.7**

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Х. Г. Умаров

Посвящается А. Б. Шабату в связи с его юбилеем

Для названного в заголовке статьи дифференциального уравнения исследована разрешимость задачи Коши в пространстве непрерывных функций на всей числовой оси сведением к абстрактной задаче Коши в банаховом пространстве. Найден явный вид решения соответствующего линейного уравнения. Установлен временной отрезок существования классического решения задачи Коши для нелинейного уравнения и получена оценка нормы этого локального решения. Рассмотрены условия существования глобального решения и разрушения решения на конечном отрезке.

Ключевые слова: изгибные колебания стержня, уравнение Клейна — Гордона, сильно-непрерывные полугруппы операторов.

1. Введение

В области $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1_+$, $\mathbb{R}^1 =]-\infty, +\infty[$, $\mathbb{R}^1_+ =]0, +\infty[$, рассмотрим уравнение, описывающее изгибные волны в нелинейно-упругом стержне[1] (см. [1, с. 55], [2, с. 189], обзор и подробную библиографию, приведенные в монографии [2]):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^3, \tag{1}$$

где заданные числа $\alpha \in \mathbb{R}^1_+$, $\beta \in \mathbb{R}^1$.

Полагаем, что φ, ψ — начальные функции задачи Коши:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \tag{2}$$

и искомое классическое решение[2] $u = u(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times \overline{\mathbb{R}}^1_+$, $\overline{\mathbb{R}}^1_+ = [0, +\infty[$, уравнения (1) для всех значений временной переменной t по переменной x принадлежат банахову про-

[1] Уравнение, описывающее нелинейные изгибные волны в стержне, содержит [2] степени частной производной неизвестной функции: $\partial(\partial w/\partial x)^3/\partial x \equiv (w_x^3)_x$, однако, заменой $u = w_x$ и последующим дифференцированием обеих частей уравнения сводится к виду (1).

[2] Под классическим решением понимается достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.

странству $C[-\infty, +\infty] \equiv C[\mathbb{R}^1]$ [3] непрерывных функций $g = g(x)$, для которых существуют пределы при $x \to \pm\infty$, и норма определяется по формуле $\|g(x)\|_C = \sup_{x \in R^1} |g(x)|$.

Будем обозначать $C^{(k)}[\mathbb{R}^1] = \{g(x) \in C[\mathbb{R}^1] : g'(x), \ldots, g^{(k)}(x) \in C[\mathbb{R}^1]\}$.

Наша цель — для случая $\beta = 0$, т. е. для соответствующего (1) линейного уравнения, найти явный вид решения задачи Коши в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, а в случае $\beta \neq 0$ — найти временной отрезок существования классического решения задачи Коши и оценить норму в $C[\mathbb{R}^1]$ этого локального решения, далее рассмотреть условия существования глобального (определенного для $t \in \mathbb{R}^1_+$) решения уравнения (1) и разрушения его решения на конечном временном отрезке.

2. Задача Коши для линейного уравнения изгибных волн

Рассмотрим линейное однородное уравнение, соответствующее (1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \tag{3}$$

Наличие при $\lambda > 0$ резольвенты дифференциального оператора d^2/dx^2 позволяет существенно преобразовать уравнение (3), разрешив его относительно производной по времени. Именно, пусть $u = u(x,t)$ — классическое решение задачи Коши (1), (2), для которого частные производные u_{xx}, u_{xxt} непрерывны при $t \geqslant 0$. Введем новую неизвестную функцию

$$v = u - u_{xx}. \tag{4}$$

Из замены (4) можно единственным образом определить начальные значения $v|_{t=0} = \varphi(x) - \varphi''(x)$, $v_t|_{t=0} = \psi(x) - \psi''(x)$ при условии, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат $C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$ и выразить [3, с. 682] решение $u(x,t)$ задачи Коши (1), (2) через новую неизвестную функцию $v(x,t)$:

$$u(x,t) = \left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} v(x,t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|r|} v(x+r,t)\, dr. \tag{5}$$

В результате подстановки (4) уравнение (3) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ можно записать в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$V_{tt} = G_0 V, \quad t \in \mathbb{R}^1_+, \tag{6}$$

где $V = V(t) : t \to v(x,t)$ — искомая вектор-функция, определенная для $t \in \overline{\mathbb{R}}^1_+$, со значениями в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$. Операторный коэффициент в уравнении (6) — линейный оператор $G_0 = -\alpha^2 \bigl(I - d^2/dx^2\bigr)^{-1} d^4/dx^4$ — определен на функциях $g(x) \in C^{(4)}[\mathbb{R}^1]$ и его можно продолжить до оператора $G = A + \alpha^2 I + B$, где $A = \alpha^2 d^2/dx^2$, $B = -\alpha^2 (I - d^2/dx^2)^{-1}$.

[3] В пространстве $C[R^1]$ дифференциальный оператор d/dx с областью определения $\mathscr{D}(d/dx) = C^{(1)}[\mathbb{R}^1]$ является [3, с. 670], [4, с. 58] производящим оператором сжимающей сильно непрерывной группы $U(t; d/dx)$ класса C_0 левых сдвигов: $U(t; d/dx) g(x) = g(x+t)$, а дифференциальный оператор d^2/dx^2 с областью определения $\mathscr{D}(d^2/dx^2) = C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$ порождает [3, с. 681] сильно непрерывную полугруппу $U(t; d^2/dx^2)$ класса C_0 : $U(t; d^2/dx^2) g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)} g(x+\xi) d\xi$, $t \geqslant 0$. Положительная полуось $\lambda > 0$ принадлежит [3, с. 671, 681] резольвентным множествам операторов d/dx и d^2/dx^2 и для соответствующих резольвент $(\lambda I - d/dx)^{-1}$ и $(\lambda I - d^2/dx^2)^{-1}$, где I — тождественный оператор, справедливы оценки норм $\|(\lambda I - d/dx)^{-1}\|$, $\|(\lambda I - d^2/dx^2)^{-1}\| \leqslant 1/\lambda$.

Таким образом, получим эквивалентное (3) интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = \alpha^2(u_{xx} + u - h * u), \tag{7}$$

в котором $h = e^{-|x|}/2$ и через $h * \omega$ обозначена свертка: $(h * \omega)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x - \xi)\omega(\xi)d\xi$.

Оператор A, $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(d^2/dx^2)$, в $C[\mathbb{R}^1]$ [5, с. 92] является производящим оператором косинус оператор-функции $C(t; A)$, $t \in \mathbb{R}^1$, класса C_0, для которой при всех $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ справедливо представление

$$C(t; A)g(x) = \frac{1}{2}\Big[U\Big(\alpha t; \frac{d}{dx}\Big) + U\Big(-\alpha t; \frac{d}{dx}\Big)\Big]g(x) = \frac{1}{2}\big[g(x + \alpha t) + g(x - \alpha t)\big] \tag{8}$$

и оценка нормы $\|C(t; A)\| \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Возмущенный оператор $A + \alpha^2 I$, $\mathscr{D}(A + \alpha^2 I) = \mathscr{D}(d^2/dx^2)$, также порождает в $C[\mathbb{R}^1]$ [5, с. 169] косинус оператор-функцию $C(t; A + \alpha^2 I)$, $t \in \mathbb{R}^1$, класса C_0, для которой справедливо представление

$$C\big(t; A + \alpha^2 I\big)g(x) = C(t; A)g(x) + \alpha t \int\limits_0^t I_1\Big(\alpha\sqrt{t^2 - s^2}\Big)\, C(s; A)g(x)\frac{ds}{\sqrt{t^2 - s^2}}, \tag{9}$$

где $g(x)$ — произвольный элемент из $C[\mathbb{R}^1]$, а $I_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$ — модифицированная функция Бесселя [6, с. 729], и оценка нормы $\|C(t; A + \alpha^2 I)\| \leqslant \mathrm{ch}(\alpha t)$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Ограниченный оператор B, $\mathscr{D}(B) = C[\mathbb{R}^1]$, порождает косинус оператор-функцию $C(t; B)$, $t \in \mathbb{R}^1$, класса C_0, которая для произвольного элемента $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ представляется [5, с. 142] степенным рядом, равномерно сходящимся по t на каждом конечном отрезке из $\mathbb{R}^1$:

$$C(t; B)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\alpha t)^{2n}}{(2n)!}\Big(I - \frac{d^2}{dx^2}\Big)^{-n} g(x).$$

Откуда, применяя оценку нормы резольвенты $(I - d^2/dx^2)^{-1}$, выводим $\|C(t; B)\| \leqslant \mathrm{ch}(\alpha t)$, $t \in \mathbb{R}^1$. Используя формулу [3, с. 664], выражающую степени резольвенты $(I - d^2/dx^2)^{-n}$ через полугруппу, порождаемую оператором d^2/dx^2:

$$\Big(I - \frac{d^2}{dx^2}\Big)^{-n} g(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^{+\infty} s^{n-1}e^{-s}U\Big(s; \frac{d^2}{dx^2}\Big)g(x)\, ds,$$

преобразуем представление косинус оператор-функции $C(t; B)$:

$$C(t; B)g(x) = g(x) - \frac{(\alpha t)^2}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-s}{}_0F_2\left(; \frac{3}{2}, 2; -\frac{(\alpha t)^2}{4}s\right)U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right)g(x)\, ds, \tag{10}$$

где ${}_0F_2\,(; 3/2, 2; -z/4) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!(2n+2)!}$ — обобщенная гипергеометрическая функция [7, с. 437]. Далее, применяя интегральное представление полугруппы $U(s; d^2/dx^2)$, формуле (10) можно придать вид

$$C(t; B)g(x) = g(x) - \frac{(\alpha t)^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}\left((\alpha t)^2, \xi^2\right) g(x + \xi)\, d\xi, \quad t \in \mathbb{R}^1, \tag{11}$$

где обозначено $\mathscr{F}(z, \xi^2) = \int_0^{+\infty} e^{-s-\xi^2/(4s)}{}_0F_2\,(; 3/2, 2; -z/4s)ds/\sqrt{s}$.

Возмущение ограниченным оператором B сохраняет способность оператора $A+\alpha^2 I$ порождать косинус оператор-функцию класса C_0 [5, с. 169], поэтому оператор G является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции класса C_0, для которой на элементах $g(x) \in \mathscr{D}(G) = \mathscr{D}(d^2/dx^2)$ справедливо представление

$$C(t;G)g(x) = C\big(t; A+\alpha^2 I\big)g(x) + \frac{t^2}{2}\int\limits_0^1 j_1\Big(t\sqrt{1-\zeta^2}, A+\alpha^2 I\Big)C(t\zeta; B)g(x)\,d\zeta, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

где $j_1(t, A+\alpha^2 I)g(x) = 4/\pi \int_0^1 \sqrt{1-\eta^2}C(t\eta; A+\alpha^2 I)g(x)\,d\eta$.

Используя формулы (8), (9), (11), косинус оператор-функция, порождаемая оператором G, записывается в явном виде на функциях $g(x) \in \mathscr{D}(d^2/dx^2)$:

$$\begin{gathered} C(t;G)g(x) = \frac{1}{2}\big[g(x+\alpha t) + g(x-\alpha t)\big] \\ + \frac{\alpha t}{2}\int\limits_0^t I_1\left(\alpha\sqrt{t^2-s^2}\right)\left[g(x+\alpha s) + g(x-\alpha s)\right]\frac{ds}{\sqrt{t^2-s^2}} \\ + \frac{t^2}{\pi}\int\limits_0^1 d\zeta \int\limits_0^1 \sqrt{1-\eta^2}\bigg\{ g\left(x+\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right) + g\left(x-\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right) \\ - \frac{(\alpha t\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}\left((\alpha t\zeta)^2, \xi^2\right)\bigg[g\left(x+\xi+\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right) \\ + g\left(x+\xi-\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)\bigg]d\xi + \alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\int\limits_0^{t\eta\sqrt{1-\zeta^2}} I_1\left(\alpha\sqrt{t^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2}\right) \\ \times\bigg[g(x+\alpha s) + g(x-\alpha s) - \frac{(\alpha t\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}\left((\alpha t\zeta)^2, \xi^2\right) \\ \times\big[g(x+\xi+\alpha s) + g(x+\xi-\alpha s)\big]d\xi\bigg]\frac{ds}{\sqrt{t^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2}}\bigg\}d\eta \end{gathered} \tag{12}$$

и для нее справедлива оценка нормы

$$\|C(t;G)\| \leqslant \mathrm{ch}(\alpha t) + \alpha^{-2}\mathrm{sh}\left(\alpha t(\sqrt{2}-1)\right)\mathrm{sh}\left(\alpha t(\sqrt{2}+1)\right), \quad t \in \mathbb{R}^1. \tag{13}$$

С косинус оператор-функцией (12) ассоциируют [5, с. 91] синус оператор-функцию:

$$S(t;G)g(x) = \int\limits_0^t C(r;G)g(x)\,dr, \quad g(x) \in C[\mathbb{R}^1], \tag{14}$$

и линейное многообразие $C_1[\mathbb{R}^1] = \{g(x) \in C[\mathbb{R}^1] : C(t;G)g(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^1; C[\mathbb{R}^1])\}$, т. е. подмножество $C_1[\mathbb{R}^1]$ пространства $C[\mathbb{R}^1]$ состоит из тех элементов из $C[\mathbb{R}^1]$, для которых функция $C(t;G)g(x) : \mathbb{R}^1 \to C[\mathbb{R}^1]$ является непрерывно дифференцируемой функцией переменной t.

Очевидно, что $\mathscr{D}(G) = \mathscr{D}(d^2/dx^2) \subset C_1[\mathbb{R}^1]$.

Используя оценку (13), имеем

$$\|S(t;G)\| \leqslant \left| \int\limits_0^t \|C(s;G)\|\,ds \right| \leqslant \frac{|\mathrm{sh}(\alpha t)\ |}{\alpha} + \left| \frac{\mathrm{sh}(2\alpha t\sqrt{2})}{4\alpha^3\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{sh}(2\alpha t)}{4\alpha^3} \right|, \quad t \in \mathbb{R}^1. \tag{15}$$

Таким образом, приходим к абстрактному дифференциальному уравнению, обобщающему уравнение (6) в банаховом пространстве $C[\mathbb{R}^1]$:

$$V_{tt} = GV, \quad t \in \mathbb{R}^1_+, \tag{16}$$

в котором операторный коэффициент G порождает сильно непрерывную косинус оператор-функцию класса C_0. Начальные условия в $C[R^1]$ для уравнения (16) перепишутся в виде

$$V|_{t=0} = \varPhi, \quad V_t|_{t=0} = \varPsi, \tag{17}$$

где $\varPhi = \varphi(x) - \varphi''(x)$, $\varPsi = \psi(x) - \psi''(x)$ — элементы пространства $C[\mathbb{R}^1]$.

Для того чтобы задача Коши (16), (17) была равномерно корректной[4] на $\overline{\mathbb{R}}^1_+$, необходимо и достаточно, чтобы оператор G был производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции класса C_0, при этом классическое[5] решение задачи Коши (16), (17) дается [5, с. 91–92] формулой $V(t) = C(t;G)\varPhi + S(t;G)\varPsi$, $t \in \mathbb{R}^1$, для любых $\varPhi \in \mathscr{D}(G)$ и $\varPsi \in C_1[\mathbb{R}^1]$.

Теперь, производя обратную замену (5) и используя перестановочность резольвенты $(I - d^2/dx^2)^{-1}$ с косинус оператор-функцией, порождаемой оператором G, находим решение задачи Коши для уравнения (3):

$$u = \left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} V(t) = C(t;G)\,\varphi + S(t;G)\,\psi. \tag{18}$$

Таким образом, имеет место утверждение[6]:

Теорема 1. *Пусть начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ вместе с производными до четвертого порядка включительно принадлежат пространству $C[\mathbb{R}^1]$. Тогда задача Коши для линейного однородного уравнения (3) равномерно корректна, классическое решение*

---

[4] Задача Коши

$$u''(t) = Au(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}^1_+; \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{$*$}$$

в банаховом пространстве E называется *равномерно корректной* [5, с. 89], если найдется плотное подмножество $E_1 \subset E$ такое, что при u^0, $u^1 \in E_1$ существует единственное решение на $\overline{\mathbb{R}}^1_+$ и это решение равномерно устойчиво по t на любом компакте $K \subset \overline{\mathbb{R}}^1_+$, т. е. из условия $u^m_n \to 0$ ($u^m_n \in E_1$, $m = 0,1$) при $n \to \infty$ следует сходимость соответствующих решений $u_n(t) \to 0$ равномерно по $t \in K$, где $u^{(m)}_n(0) = u^m_n$, $m = 0,1$.

[5] Дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(t) : \overline{\mathbb{R}}^1_+ \to E$, т. е. $u(t) \in C^{(2)}(\overline{\mathbb{R}}^1_+; E)$ называется *классическим решением абстрактной задачи Коши* $(*)$, если $u(t) \in \mathscr{D}(A)$, $Au(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}^1_+; E)$ при $t \in \overline{\mathbb{R}}^1_+$ и удовлетворяются равенства $(*)$.

[6] От начальной функции $\psi(x)$ требуем заведомо большую гладкость, чем нужно для существования решения задачи Коши для уравнения (3), чтобы не заниматься описанием подмножества $C_1[\mathbb{R}^1]$ пространства $C[\mathbb{R}^1]$.

дается формулой (18) *или в подробной записи*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+\alpha t)+\varphi(x-\alpha t)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left[\psi(x+\alpha r)+\psi(x-\alpha r)\right]dr$$

$$+\frac{\alpha t}{2}\int\limits_0^t I_1\left(\alpha\sqrt{t^2-s^2}\right)\left[\varphi(x+\alpha s)+\varphi(x-\alpha s)\right]\frac{ds}{\sqrt{t^2-s^2}}$$

$$+\frac{\alpha}{2}\int\limits_0^t rdr\int\limits_0^r I_1\left(\alpha\sqrt{r^2-s^2}\right)\left[\psi(x+\alpha s)+\psi(x-\alpha s)\right]\frac{ds}{\sqrt{r^2-s^2}}$$

$$+\frac{t^2}{\pi}\int\limits_0^1 d\zeta\int\limits_0^1\sqrt{1-\eta^2}\Bigg\{\varphi\left(x+\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)+\varphi\left(x-\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

$$-\frac{(\alpha t\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}\left((\alpha t\zeta)^2,\xi^2\right)\left[\varphi\left(x+\xi+\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)+\varphi\left(x+\xi-\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right]d\xi$$

$$+\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\int\limits_0^{t\eta\sqrt{1-\zeta^2}} I_1\left(\alpha\sqrt{t^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2}\right)\Bigg\{\varphi(x+\alpha s)+\varphi(x-\alpha s)$$

$$-\frac{(\alpha t\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}\left((\alpha t\zeta)^2,\xi^2\right)\left[\varphi(x+\xi+\alpha s)+\varphi(x+\xi-\alpha s)\right]d\xi\Bigg\}\frac{ds}{\sqrt{t^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2}}\Bigg\}d\eta$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^t r^2\Bigg\{\int\limits_0^1 d\zeta\int\limits_0^1\sqrt{1-\eta^2}\Bigg\{\psi\Big(x+\alpha r\eta\sqrt{1-\zeta^2}\Big)+\psi\left(x-\alpha r\eta\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

$$-\frac{(\alpha r\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}\left((\alpha r\zeta)^2,\xi^2\right)\left[\psi\Big(x+\xi+\alpha r\eta\sqrt{1-\zeta^2}\Big)+\psi\Big(x+\xi-\alpha r\eta\sqrt{1-\zeta^2}\Big)\right]d\xi$$

$$+\alpha r\eta\sqrt{1-\zeta^2}\int\limits_0^{r\eta\sqrt{1-\zeta^2}} I_1\left(\alpha\sqrt{r^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2}\right)$$

$$\times\Bigg\{\psi(x+\alpha s)+\psi(x-\alpha s)-\frac{(\alpha r\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}\left((\alpha r\zeta)^2,\xi^2\right)$$

$$\times\left[\psi(x+\xi+\alpha s)+\psi(x+\xi-\alpha s)\right]d\xi\Bigg\}\frac{ds}{\sqrt{r^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2}}\Bigg\}d\eta\Bigg\}dr$$

и для него справедлива оценка

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|u(x,t)|\leqslant\Big[\mathrm{ch}(\alpha t)+\alpha^{-2}\mathrm{sh}\big(\alpha t\big(\sqrt{2}-1\big)\big)\mathrm{sh}\big(\alpha t\big(\sqrt{2}+1\big)\big)\Big]\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\varphi(x)|$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left[|\mathrm{sh}(\alpha t)\ |+\frac{1}{4\alpha^2\sqrt{2}}\Big|\mathrm{sh}\big(2\alpha t\sqrt{2}\big)-\sqrt{2}\mathrm{sh}(2\alpha t)\Big|\right]\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\psi(x)|,\quad t\in\mathbb{R}^1.$$

Замечание 1. Хотя изначально ставилась цель найти решение $u(x,t)$ линейного однородного уравнения изгибных колебаний на полуоси $t \in \mathbb{R}^1_+$, формула (18) определяет $u(x,t)$ на всей числовой прямой $t \in \mathbb{R}^1$, что естественно вытекает и из самого задания уравнения, так как оно не меняется при замене $t \to -t$.

Замечание 2. Так как классическое решение $V(t)$ абстрактной задачи Коши (16), (17) принадлежит $C^{(2)}(\overline{\mathbb{R}}^1_+; C[\mathbb{R}^1])$ и для него $GV(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}^1_+; C[\mathbb{R}^1])$, то значения решения $u(x,t) = (I - d^2/dx^2)^{-1} V(t)$ уравнения (3) принадлежат $C^{(4)}[\mathbb{R}^1]$ для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}^1_+$.

3. Локальное решение задачи Коши для нелинейного уравнения изгибных волн

Применив к обеим частям уравнения (1) линейный ограниченный оператор $(I - d^2/dx^2)^{-1}$, получим эквивалентное (1) нелинейное интегро-дифференциальное уравнение — нелокальное уравнение Клейна — Гордона:

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = \alpha^2 u - \beta u^3 + h * (\beta u^3 - \alpha^2 u). \tag{19}$$

Уравнение (19) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ можно записать в виде абстрактного полулинейного уравнения

$$V_{tt} = GV + F(V), \quad t \in \mathbb{R}^1_+, \tag{20}$$

где оператор G такой же, как и в уравнении (16), а $F(V)$ — заданный нелинейный оператор, действующий в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$: $F(g) = \beta[(I - d^2/dx^2)^{-1} - I]Q(g)$, здесь Q — оператор суперпозиции: $Q(g) = f(g(x))$, $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$, $f(s) = s^3$.

Отметим, что из непрерывной дифференцируемости оператора суперпозиции Q в пространстве непрерывных функций [8, с. 406] и ограниченности линейного оператора $(I - d^2/dx^2)^{-1} - I$ следует непрерывная дифференцируемость по Фреше нелинейного оператора $F(V)$ в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$.

Из непрерывной дифференцируемости отображения $F(V)$ следует, что $F(V)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Поэтому существует промежуток $[0, t^*[$, в котором задача Коши (20), (17) имеет [9, с. 87] единственное обобщенное решение $V = V(t)$, т. е. единственное непрерывно дифференцируемое решение интегрального уравнения

$$V(t) = C(t;G)\varPhi + S(t;G)\varPsi + \int\limits_0^t S(t-\tau;G)F(V(\tau))\,d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^1_+, \tag{21}$$

для любых $\varPhi \in \mathscr{D}(G)$ и $\varPsi \in C_1[\mathbb{R}^1]$.

Применяя оценки (13), (15) норм оператор-функций (12), (14), записанные, используя элементарные неравенства $\mathrm{sh}(t)\mathrm{sh}(\tau) \leqslant \mathrm{ch}(t+\tau)/2$, $|\mathrm{sh}(t)| \leqslant \mathrm{ch}(t)$, $t, \tau \in \mathbb{R}^1$, в виде $\|C(t;G)\| \leqslant \frac{2\alpha^2+1}{2\alpha^2}\mathrm{ch}(2\alpha t\sqrt{2}) \equiv \rho(\alpha,t)$, $\|S(t;G)\| \leqslant \frac{\rho(\alpha,t)}{2\alpha\sqrt{2}}$, и учитывая, что для элементов пространства $C[\mathbb{R}^1]$ справедливо соотношение $\|\varPhi\varPsi\|_C \leqslant \|\varPhi\|_C\|\varPsi\|_C$, в силу чего, с ним можно работать как с алгеброй [10, с. 120], из интегрального уравнения (21), учитывая оценку $\mathrm{ch}(t-\tau) \leqslant \mathrm{ch}(t)\mathrm{ch}(\tau)$, выводим интегральное неравенство

$$\|V(t)\|_C \leqslant \rho(\alpha,t)\left[\Omega(\alpha,\Phi,\Psi) + \frac{|\beta|}{\alpha\sqrt{2}}\int\limits_0^t \mathrm{ch}(2\alpha\tau\sqrt{2})\|V(\tau)\|_C^3 d\tau\right], \quad t \in \mathbb{R}^1_+, \tag{22}$$

где $\Omega(\alpha,\Phi,\Psi)=\|\Phi\|_C+1/(2\alpha\sqrt{2})\|\Psi\|_C$. Из неравенства (22) следует [11, с. 13] оценка нормы обобщенного решения

$$\|V(t)\|_C\leqslant\Omega(\alpha,\Phi,\Psi)\rho(\alpha,t)\bigl(1-q(\alpha,\beta)\Omega^2(\alpha,\Phi,\Psi)\delta(\alpha,t)\bigr)^{-\frac{1}{2}},$$

где $\delta(\alpha,t)=3\alpha t\sqrt{2}+\operatorname{sh}(4\alpha t\sqrt{2})\ +\operatorname{sh}(8\alpha t\sqrt{2})\ /8$, на временном отрезке $t\in[0,t_*]$, длина которого ограничивается величиной $t_*=\sup\{t\in[0,t^*[:\ \delta(\alpha,t)<1/(q(\alpha,\beta)\Omega^2(\alpha,\Phi,\Psi))\}$. Здесь $q(\alpha,\beta)=|\beta|(2\alpha^2+1)^3/(64\alpha^8)$.

Итак, на отрезке $[0,t_*]$ существует обобщенное решение абстрактной задачи Коши (20), (17), для которого справедлива оценка нормы (22). Это обобщенное решение $V(t)$, $t\in[0,t_*]$, будет классическим решением задачи Коши (20), (17), если оно дважды непрерывно дифференцируемо по t, что является следствием [9, с. 91] непрерывной дифференцируемости по Фреше нелинейного оператора $F(V)$, при условии $\Phi\in\mathscr{D}(G)$ и $\Psi\in C_1[\mathbb{R}^1]$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Пусть начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ задачи Коши* (1), (2) *принадлежат пространству $C[\mathbb{R}^1]$ вместе со своими производными до четвертого порядка включительно*[7]*, тогда при $t\in[0,t_*]$, где*

$$t_*=\sup\left\{t:\ \delta(\alpha,t)<\frac{64\alpha^8}{|\beta|(2\alpha^2+1)^3\Omega^2(\alpha,\varphi,\psi)}\right\},$$
$$\Omega(\alpha,\varphi,\psi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\varphi(x)|+\frac{1}{2\alpha\sqrt{2}}\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\psi(x)|,$$

существует единственное классическое решение $u=u(x,t)$, $(x,t)\in\mathbb{R}^1\times[0,t_*]$, этой задачи в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, для которого справедлива оценка

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|u(x,t)|\leqslant\left(1+\frac{1}{2\alpha^2}\right)\Omega(\alpha,\varphi,\psi)\operatorname{ch}\bigl(2\alpha t\sqrt{2}\bigr)\left(1-\frac{|\beta|(2\alpha^2+1)^3\Omega^2(\alpha,\varphi,\psi)}{64\alpha^8}\delta(\alpha,t)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

4. Существование глобального решения уравнения изгибных волн и разрушение его решения на конечном отрезке

Как известно [12], если функция $g(x)$, принадлежащая пространству $C[\mathbb{R}^1]$, также принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^1)$, т. е. $g(x),g'(x)\in L_2(\mathbb{R}^1)$, то справедлива оценка

$$\|g\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|g(x)|\leqslant\|g\|_{W_2^1}=\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Bigl[(g(x))^2+(g'(x))^2\Bigr]\,dx},$$

причем, если к тому же $g(x)\in C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$, то предел при $x\to\pm\infty$ функций $g(x)$, $g'(x)$ равен нулю.

[7] Здесь надо учитывать, что классическое решение уравнения (1) из $C^{(4)}[\mathbb{R}^1]$, тогда как классическое решение уравнения (19) из $C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$.

Полагая, что для всех $t \geqslant 0$ классическое решение $u = u(x,t)$ уравнения (1) принадлежит пересечению пространств $C[\mathbb{R}^1] \cap W_2^1(\mathbb{R}^1)$, исследуем так называемый интеграл энергии

$$y(t) = \|u\|^2_{W_2^1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(u^2 + u_x^2\right) dx,$$

в котором $u = u(x,t)$ — решение уравнения (1).

Применяя к равенству $y'(t) = 2(u, u_t) + 2(u_x, u_{xt})$ неравенство Коши — Буняковского[8] и используя элементарное неравенство $2ab \leqslant a^2 + b^2$, выводим оценку

$$y'(t) \leqslant \|u\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 + \|u_{xt}\|_2^2,$$

из которой, обозначая $z(t) = \|u_t\|^2_{W_2^1} = \|u_t\|_2^2 + \|u_{xt}\|_2^2$, имеем

$$y'(t) \leqslant y(t) + z(t). \tag{23}$$

Аналогично из равенства $[y'(t)]^2 = 4[(u,u_t)^2 + 2(u,u_t)(u_x,u_{xt}) + (u_x,u_{xt})^2]$ получаем оценку

$$[y'(t)]^2 \leqslant 4y(t)z(t). \tag{24}$$

Используя уравнение (1), представление $u_x u_{xtt} = (u u_{xtt})_x - u u_{xxtt}$ и интегрируя по частям, из соотношения

$$\frac{1}{2}y''(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t^2\,dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xt}^2\,dx - \beta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^4\,dx - \alpha^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\,dx$$

выводим первое энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}y''(t) = z(t) - \beta\left\|u_x^2\right\|_2^2 - \alpha^2\left\|u_{xx}\right\|_2^2. \tag{25}$$

Аналогично, используя представление $u_{xt}u_{xtt} = (u_t u_{xtt})_x - u_t u_{xxtt}$ и интегрируя по частям, из представления производной $z'(t)$:

$$\frac{1}{2}z'(t) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{4}\beta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^4\,dx - \frac{1}{2}\alpha^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\,dx\right),$$

следует второе энергетическое равенство

$$z(t) = S_0 - \frac{1}{2}\beta\|u_x^2\|_2^2 - \alpha^2\|u_{xx}\|_2^2, \tag{26}$$

где $S_0 = \|\psi\|^2_{W_2^1} + \alpha^2\|\varphi''\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|(\varphi')^2\|_2^2$.

Пусть в уравнении (1) параметр $\beta > 0$. Тогда из соотношений (23) и (26) следует, что $y'(\tau) \leqslant y(\tau) + S_0$, $\tau \geqslant 0$, и, значит, по лемме Гронуолла

$$y(t) \leqslant \left[y(0) + tS_0\right]e^t, \quad t \geqslant 0. \tag{27}$$

[8] $|(\varphi,\psi)| \leqslant \|\varphi\|_2\|\psi\|_2$, где $(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\psi(x)\,dx$ и $\|\varphi\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,dx}$ — соответственно скалярное произведение и норма в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$.

Из неравенства (27) следует, что при выполнении начальными функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$ условий

$$\varphi(x), \psi(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^1); \quad (\varphi'(x))^2, \varphi''(x) \in L_2(\mathbb{R}^1), \tag{28}$$

классическое решение $u = u(x,t)$ уравнения (1) принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ и, значит, справедлива оценка

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1} |u(x,t)| \leqslant \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big[(u(x,t))^2 + (u_x(x,t))^2\Big]\,dx} \leqslant \sqrt{y(0)+tS_0}\, e^{\frac{t}{2}}, \quad t \geqslant 0, \tag{29}$$

обеспечивающая существование глобального решения уравнения (1).

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Пусть в уравнении* (1) *параметр* $\beta > 0$, *а начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *удовлетворяют условию* (28). *Тогда существует единственное глобальное классическое решение задачи Коши* (1), (2), *для которого справедлива оценка* (29) *или в подробной записи*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1} |u(x,t)| \leqslant \sqrt{\|\varphi\|^2_{W_2^1} + t\left(\|\psi\|^2_{W_2^1} + \alpha^2\|\varphi''\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|(\varphi')^2\|_2^2\right)}\, e^{\frac{t}{2}}, \quad t \geqslant 0.$$

Исключая из энергетических равенств (25), (26) *слагаемое с параметром* β, *имеем* $y''(t) - 6z(t) + 4S_0 = 2\alpha^2\|u_{xx}\|_2^2$, *откуда, в силу оценки* (24), *вытекает дифференциальное неравенство для интеграла энергии*

$$y(t)y''(t) - \frac{3}{2}[y'(t)]^2 + 4S_0 y(t) \geqslant 0. \tag{30}$$

Сравнивая (30) *с основным дифференциальным неравенством для интеграла энергии из* [13], *заключаем, что если потребовать выполнение условий*

$$\|\varphi\|_{W_2^1} > 0, \quad M = (\varphi,\psi) + (\varphi',\psi') > 0, \quad S_0 < M^2\|\varphi\|^{-2}_{W_2^1}, \tag{31}$$

то имеет место оценка снизу интеграла энергии: $y(t) \geqslant \left(\|\varphi\|^{-1/2}_{W_2^1} - Nt\right)^{-2}$, *и оценка сверху времени* T^* *существования классического решения уравнения* (1):

$$T^* \leqslant N^{-1}\|\varphi\|^{-\frac{1}{2}}_{W_2^1}, \tag{32}$$

где $N = \|\varphi\|^{-3/2}_{W_2^1}\sqrt{M^2 - S_0\|\varphi\|^2_{W_2^1}}$.

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Пусть параметры* α, β *и начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *задачи Коши* (1), (2) *подчинены условиям* (31). *Тогда не существует глобального по времени классического решения уравнения изгибных колебаний нелинейно-упругого стержня, т. е. решение разрушается за конечное время* T^*, *причем имеет место оценка* (32) *для времени существования решения.*

Замечание 3. Оценку (29) можно существенно улучшить, если воспользоваться при $\beta > 0$ неравенствами, вытекающими из энергетических равенств (25) и (26): $1/2y''(t) \leqslant z(t) \leqslant S_0$, откуда интегрируя, имеем $y(t) \leqslant y(0) + y'(0)t + S_0t^2$.

Литература

1. *Островский Л. А., Потапов А. И.* Введение в теорию модулированных волн.—М.: Физматлит, 2003.—400 с.
2. *Ерофеев В. И., Кажаев В. В., Семерикова Н. П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность.—М.: Физматлит, 2002.—208 с.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.—М.: Изд-во иностр. лит., 1962.—895 с.
4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.—М.: Наука, 1967.—464 с.
5. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. ВИНИТИ.—1990.—Т. 28.—С. 87–202.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции.—М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983.—752 с.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы.—М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.—800 с.
8. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—500 с.
9. *Travis C. C., Webb G. F.* Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations // Acta Math. Acad. Sci. Hungar.—1978.—Vol. 32.—P. 75–96.
10. *Appell J., Zabreiko P. P.* Nonlinear Superposition Operators.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.—320 p.
11. *Dragomir S. S.* Some Gronwall Type Inequalities and Applications.—Melbourne City MC, 2002.—193 p.
12. *Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. Roy. Soc.—London, 1972.—Vol. 272.—P. 47–78.
13. *Корпусов М. О., Свешников А. Г., Юшков Е. В.* Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики.—М.: Изд-во физического факультета МГУ, 2014.—364 с.

Статья поступила 4 июля 2017 г.

Умаров Хасан Галсанович
Академия наук Чеченской Республики,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 364024, г. Грозный, пр. М. Эсамбаева, 13
E-mail: umarov50@mail.ru

THE CAUCHY PROBLEM FOR THE EQUATION OF BENDING VIBRATIONS OF A NONLINEAR-ELASTIC ROD OF INFINITE LENGTH

Umarov Kh. G.

For the differential equation mentioned in the title of the article, the solvability of the Cauchy problem in the space of continuous functions on the whole real axis by reducing to an abstract Cauchy problem in a Banach space is studied. An explicit form of the solution of the corresponding linear equation is found. The time interval for the existence of the classical solution of the Cauchy problem for a nonlinear equation is established and an estimate of the norm of this local solution is obtained. The conditions for the existence of a global solution and the destruction of the solution on a finite interval are considered.

Keywords: bending vibrations of a rod, Klein–Gordon equation, strongly continuous semigroups of operators.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 70–82

УДК **517.982, 517.983**

ОДНОСТОРОННИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ В ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

С. М. Умархаджиев

Посвящается 80-летию со дня рождения профессора А. Б. Шабата

Получены достаточные и необходимые условия на ядро и грандизатор для ограниченности односторонних интегральных операторов с однородными ядрами в гранд-пространствах Лебега на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}^n$, а также получены двусторонние оценки гранд-норм таких операторов. Кроме того, в случае радиального ядра получены двусторонние оценки для норм многомерных операторов в терминах сферических средних и показано, что этот результат сильнее, чем неравенства для норм операторов с нерадиальным ядром.

Ключевые слова: односторонний интегральный оператор, оператор с однородными ядрами, гранд-пространство Лебега, двусторонние оценки, сферические средние.

1. Введение

Мы рассматриваем многомерные интегральные операторы

$$K^- f(x) := \int\limits_{|y|\leqslant|x|} \mathscr{K}^-(x,y)f(y)\,dy, \quad K^+ f(x) := \int\limits_{|y|>|x|} \mathscr{K}^+(x,y)f(y)\,dy, \quad x\in\mathbb{R}^n,\ n\geqslant 2,$$

с ядрами $\mathscr{K}^-(x,y)$ и $\mathscr{K}^+(x,y)$ однородными степени $-n$, а при $n=1$ — их версии для полуоси:

$$K^- f(x) := \int\limits_0^x \mathscr{K}^-(x,y)f(y)\,dy, \quad K^+ f(x) := \int\limits_x^\infty \mathscr{K}^+(x,y)f(y)\,dy, \quad x\in\mathbb{R}_+,$$

в гранд-пространствах $L^{p)}_a(\mathbb{R}^n)$ и $L^{p)}_a(\mathbb{R}_+)$ соответственно.

Гранд-пространства Лебега $L^{p)}(\Omega)$, $1<p<\infty$, по ограниченному множеству $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ввели T. Iwaniec и C. Sbordone [6] в связи с приложениями в дифференциальных уравнениях. Операторы гармонического анализа интенсивно исследовались в таких пространствах и они продолжают привлекать внимание исследователей в связи с различными их приложениями. Некоторые из этих результатов отражены в книгах [8] и [9].

В статьях [3, 11, 12] предложен подход, позволяющий ввести гранд-пространства Лебега $L^{p)}_a(\Omega)$, $1<p<\infty$, на множествах $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ не обязательно конечной меры. Этот подход основан на введении в норму гранд-пространства малой степени неотрицательной функции $a(x)$ (см. (1)). Эту функцию, определяющую гранд-пространство $L_a^{p)}(\Omega)$, называем *грандизатором.* Такие гранд-пространства $L_a^{p)}(\Omega)$ и действия в них некоторых операторов гармонического анализа исследовались в работах [2, 4, 5, 15]. Предложенные в этих работах подходы позволили рассматривать в гранд-пространствах такие операторы, как потенциал Рисса, операторы Харди и др. В работе [13] были найдены условия на грандизатор $a(x)$, обеспечивающие справедливость теоремы Соболева для потенциала Рисса в гранд-пространствах $L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$, и исследовано их взаимодействие с гиперсингулярными интегралами (см. [10] относительно гиперсингулярных интегралов).

Интерес к интегральным операторам с однородными ядрами связан с тем, что класс таких операторов содержит огромное количество разнообразных классических операторов, возникающих в приложениях, например, операторы Харди, оператор Гильберта, весовые потенциалы Рисса, мажоранты коммутантов сингулярных операторов Кальдерона — Зигмунда со степенными весами и многие другие.

В данной статье получены достаточные условия на грандизатор a, обеспечивающие ограниченность односторонних интегралных операторов одномерных с однородными ядрами степени -1 и многомерных с радиальными однородными ядрами степени $-n$ в гранд-пространствах Лебега, а также получены оценки сверху их норм. Основные результаты содержатся в теореме 3.1 в одномерном случае, в теореме 4.4 в случае радиального грандизатора и в теореме 4.5 в случае нерадиального грандизатора.

Обозначения. $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$; S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат, $|S^{n-1}|$ — ее площадь; $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$; $B(x_0, r)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x_0; $p' = \frac{p}{p-1}$.

2. Предварительные сведения

2.1. Гранд-пространства Лебега. Обозначим $L^p(\Omega, w) := \left\{f : \|f\|_{L^p(\Omega,w)} < \infty\right\}$, где

$$\|f\|_{L^p(\Omega,w)} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В случае $w \equiv 1$ будем писать $L^p(\Omega, w) = L^p(\Omega)$.

Следуя работе [3], определяем гранд-пространства Лебега на множествах Ω произвольной (не обязательно конечной) меры равенством

$$L_a^{p)}(\Omega) := \left\{f : \|f\|_{L_a^{p)}(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^{\frac{\varepsilon}{p}})} < \infty\right\}, \quad 1 < p < \infty, \tag{1}$$

где $a(x)$ — произвольная измеримая неотрицательная функция на Ω, которую мы называем *грандизатором.* Выбор грандизатора для определения гранд-пространства может диктоваться задачами для исследования таких пространств. В работах [3, 11, 12] предполагалось, что $a \in L^1(\Omega)$, что гарантирует вложение $L^p(\Omega) \hookrightarrow L_a^{p)}(\Omega)$. В данной статье мы имеем дело с $\Omega = \mathbb{R}_+$ или $\Omega = \mathbb{R}^n$ и при рассмотрении операторов с однородными ядрами мы находим удобным не обязательно предполагать интегрируемость грандизатора в начале координат и на бесконечности, но всегда предполагаем его локальную интегрируемость вне начала координат:

$$a(x) \in L^1(B_{\delta N}) \text{ для любых } 0 < \delta < N < \infty,$$

где $B_{\delta N} = \{x : \delta < |x| < N\}$, с заменой слоя $B_{\delta N}$ на интервал (δ, N) в одномерном случае.

Определенное таким образом гранд-пространство зависит, вообще говоря, от выбора грандизатора, хотя разный выбор грандизаторов может привести к одному и тому же гранд-пространству (см. [14]).

При $a \in L^1(\Omega)$ имеет место цепочка вложений

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p)}_a(\Omega) \hookrightarrow L^{p-\varepsilon_1}(\Omega, a^{\frac{\varepsilon_1}{p}}) \hookrightarrow L^{p-\varepsilon_2}(\Omega, a^{\frac{\varepsilon_2}{p}}), \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < p-1. \tag{2}$$

Замечание 2.1. При обычно используемом определении гранд-пространства Лебега на ограниченных множествах с $a(x) \equiv 1$ всегда справедливо вложение $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p)}_a(\Omega)$, т. е. в этом смысле гранд-пространство является расширением классического пространства Лебега. Согласно (2), аналогичное вложение на множествах бесконечной меры гарантируется условием $a \in L^1(\Omega)$. Это условие часто предполагается при рассмотрении гранд-пространств на неограниченных множествах (см., например, [3, 13]), хотя гранд-пространства на таких множествах могут рассматриваться и без этого условия.

Пусть $a(x)$ — положительная всюду конечная на полуоси $\mathbb{R}_+$ функция. Функцию

$$a_*(t) = \sup_{x>0} \frac{a(xt)}{a(x)} \tag{3}$$

называют *растяжением функции* a (см. [1, с. 75]). Отметим следующие свойства растяжений:

(a_0) Если функция $x^\gamma a(x)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, не возрастает на $\mathbb{R}_+$, то $a_*(t) \leqslant \frac{1}{t^\gamma}$ для $t > 1$.

(b_0) Если функция $x^\gamma a(x)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, не убывает на $\mathbb{R}_+$, то $a_*(t) \leqslant \frac{1}{t^\gamma}$ для $t < 1$.

Пример 2.1. Для функции $a(x) = x^{-\lambda}(1+x)^{\lambda-\gamma}$, $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}_+$, имеем

$$a_*(t) = t^{-\lambda} \sup_{x>0} \left(\frac{1+tx}{1+x}\right)^{\lambda-\gamma} = \begin{cases} t^{-\max\{\lambda,\gamma\}}, & 0 < t \leqslant 1, \\ t^{-\min\{\lambda,\gamma\}}, & t > 1. \end{cases}$$

2.2. Об операторах с однородными ядрами. Будем рассматривать одномерные операторы K в предположении однородности ядра $\mathscr{K}(x,y)$ степени -1 и многомерные операторы K в следующих предположениях на ядро $\mathscr{K}(x,y)$:

(a_1) $\mathscr{K}(x,y)$ однородно степени $-n$;

(b_1) $\mathscr{K}(x,y)$ инвариантно относительно вращений $\mathscr{K}(\omega(x),\omega(y)) \equiv \mathscr{K}(x,y)$, где ω — произвольное вращение в $\mathbb{R}^n$.

В книге [7, с. 69] доказано, что интегралы

$$\int\limits_{R^n} |\mathscr{K}(\sigma,y)|\,|y|^{-\frac{n}{p}}\,dy, \quad \sigma \in S^{n-1},$$

$$\int\limits_{R^n} |\mathscr{K}(y,\theta)|\,|y|^{-\frac{n}{p'}}\,dy, \qquad \theta \in S^{n-1},\ 0 < p \leqslant \infty,$$

при условиях (a_1) и (b_1) не зависят от $\sigma \in S^{n-1}$ и $\theta \in S^{n-1}$ соответственно и

$$\int\limits_{R^n} |\mathscr{K}(\sigma,y)|\,|y|^{-\frac{n}{p}}\,dy = \int\limits_{R^n} |\mathscr{K}(y,\theta)|\,|y|^{-\frac{n}{p'}}\,dy, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Легко видеть, что в рассматриваем случае

$$\int\limits_{|y|\geqslant|x|} \left|\mathscr{K}^-(\sigma,y)\right| |y|^{-\frac{n}{p}}\,dy = \int\limits_{|y|\leqslant|x|^{-1}} \left|\mathscr{K}^-(y,\theta)\right| |y|^{-\frac{n}{p'}}\,dy. \tag{4}$$

Мы будем пользоваться обозначениями

$$\varkappa^- := \int\limits_1^\infty \left|\mathscr{K}^-(1,y)\right| y^{-\frac{1}{p}}\,dy, \quad \varkappa^+ := \int\limits_0^1 \left|\mathscr{K}^+(y,1)\right| y^{-\frac{1}{p'}}\,dy, \quad n=1.$$

Для удобства изложения материла статьи в случае радиальных ядер:

$$\mathscr{K}^-(x,y) = k^-(|x|,|y|), \quad \mathscr{K}^+(x,y) = k^+(|x|,|y|),$$

и в одномерном случае введем две функции

$$\kappa_n^-(\alpha) := \int\limits_0^1 |k^-(t,1)| t^{n-1-\frac{\alpha}{p'}}\,dt, \quad \kappa_n^+(\alpha) := \int\limits_1^\infty |k^+(t,1)| t^{n-1-\frac{\alpha}{p'}}\,dt, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Отметим, что $\kappa_1^-(1) = \varkappa^-$ и $\kappa_1^+(1) = \varkappa^+$.

3. Одномерный случай

Обозначим

$$c^-(a) := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \int\limits_1^\infty \left|\mathscr{K}^-(x,1)\right| x^{-\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} a_*(x)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\,dx,$$

$$c^+(a) := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \int\limits_0^1 \left|\mathscr{K}^+(x,1)\right| x^{-\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} a_*(x)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\,dx.$$

Теорема 3.1. *Пусть $1<p<\infty$, функции $\mathscr{K}^-(x,y)$ и $\mathscr{K}^+(x,y)$ однородны степени -1 и a — грандизатор на $\mathbb{R}_+$.*

I. *Если выполнены условия $c^-(a)<\infty$ и $c^+(a)<\infty$, то операторы K^- и K^+ соответственно ограничены в гранд-пространстве Лебега $L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$, при этом*

$$\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \leqslant c^-(a), \quad \|K^+\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \leqslant c^+(a). \tag{5}$$

II. *Если $x^\gamma a(x)$ не возрастает на $\mathbb{R}_+$ для некоторого $\gamma\in\mathbb{R}$ такого, что $\kappa_1^-(\min\{1,\gamma\})<\infty$, то $\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \kappa_1^-(\min\{1,\gamma\})$. Если $x^\lambda a(x)$ не убывает на $\mathbb{R}_+$ для некоторого $\lambda\in\mathbb{R}$ такого, что $\kappa_1^+(\max\{1,\lambda\})<\infty$, то $\|K^+\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \kappa_1^+(\max\{1,\lambda\})$.*

III. *Пусть $a\in L^1(\mathbb{R}_+)$. Если $\mathscr{K}^-(x,y)\geqslant 0$ в случае оператора K^- и $\mathscr{K}^+(x,y)\geqslant 0$ в случае оператора K^+, то условия $\varkappa^-<\infty$ и $\varkappa^+<\infty$ необходимы для ограниченности операторов K^- и K^+ соответственно в гранд-пространстве $L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$ и при этом*

$$\varkappa^- \leqslant \|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}, \quad \varkappa^+ \leqslant \|K^+\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}. \tag{6}$$

IV. *В случае грандизатора* $a(x) = x^{-\lambda}(1+x)^{\lambda-\gamma}$, $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, *условия* $\kappa_1^-(\min\{1,\lambda,\gamma\}) < \infty$ *и* $\kappa_1^+(\max\{1,\lambda,\gamma\}) < \infty$ *достаточны, при* $\mathscr{K}^-(x,y) \geqslant 0$ *и* $\mathscr{K}^+(x,y) \geqslant 0$ *условия* $\kappa_1^-(\max\{1,\lambda\}) < \infty$ *и* $\kappa_1^+(\min\{1,\gamma\}) < \infty$ *необходимы для ограниченности операторов* K^- *и* K^+ *соответственно в гранд-пространстве* $L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$ *и при этом справедливы оценки*

$$\kappa_1^-(\max\{1,\lambda\}) \leqslant \|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \kappa_1^-(\min\{1,\lambda,\gamma\}), \tag{7}$$

$$\kappa_1^+(\min\{1,\gamma\}) \leqslant \|K^+\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \kappa_1^+(\max\{1,\lambda,\gamma\}). \tag{8}$$

В частности, при $\lambda = \gamma = 1$, $\mathscr{K}^-(x,y) \geqslant 0$ *и* $\mathscr{K}^+(x,y) \geqslant 0$ *операторы* K^- *и* K^+ *ограничены в гранд-пространстве* $L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$ *тогда и только тогда, когда* $\varkappa^- < \infty$ *и* $\varkappa^+ < \infty$ *соответственно, при этом* $\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} = \varkappa^-$ *и* $\|K^+\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} = \varkappa^+$.

$\lhd$ I. Докажем первое неравенство в (5), второе доказывается аналогично. Так как $K^-f(x) = \int_0^1 \mathscr{K}^-(1,t)f(xt)\,dt$, то силу неравенства Минковского в $L^{p-\varepsilon}$ получим

$$\begin{aligned}
\|K^-f\|_{L^{p-\varepsilon}(\mathbb{R}_+, a^{\frac{\varepsilon}{p}})} &\leqslant \int_0^1 |\mathscr{K}^-(1,t)| \left\{ \int_0^\infty |f(ty)|^{p-\varepsilon} a(y)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dy \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} dt \\
&= \int_0^1 |\mathscr{K}^-(1,t)| t^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \left\{ \int_0^\infty |f(x)|^{p-\varepsilon} a\left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{\varepsilon}{p}} dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} dt \\
&= \int_0^1 |\mathscr{K}^-(1,t)| t^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \left\{ \int_0^\infty |f(x)|^{p-\varepsilon} a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}} \left[\frac{a\left(\frac{x}{t}\right)}{a(x)}\right]^{\frac{\varepsilon}{p}} dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} dt \\
&\leqslant \int_0^1 |\mathscr{K}^-(1,t)| t^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} a_*\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} dt \left\{ \int_0^\infty |f(x)|^{p-\varepsilon} a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

После инверсии в первом интеграле можно получить доказываемое неравенство.

II. Докажем оценку для $\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}$. В силу свойства растяжения (a_0) имеем $a_*(t) \leqslant t^{-\gamma}$ при $t \geqslant 1$. Поэтому

$$\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \max_{0 \leqslant \varepsilon \leqslant p-1} \int_1^\infty \left|\mathscr{K}^-(t,1)\right| t^{-\frac{1}{(p-\varepsilon)'} - \frac{\varepsilon\gamma}{p(p-\varepsilon)}}\, dt,$$

после чего требуемая оценка получается прямым вычислением интеграла и нахождением максимума.

Оценка для $\|K^+\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}$ получается аналогично.

III. Докажем оценку снизу нормы оператора K^-. Возьмем минимизирующее семейство функций в виде

$$f_\delta(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{p}+\delta}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Так как $f_\delta \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и $a \in L^1(\mathbb{R}_+)$, то $f_\delta \in L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$ в силу (2). Из ограниченности оператора K^- в гранд-пространстве $L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$ следует, что он определен на функции f_δ.

При $x < 1$ имеем

$$K^- f_\delta(x) = \int_0^1 \mathscr{K}^-(1,t) f_\delta(xt)\, dt \geqslant \kappa_p(\delta) f_\delta(x),$$

где $\kappa_p(\delta) = \int_0^1 \mathscr{K}^-(1,t) f_\delta(t)\, dt$. Следовательно,

$$\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \geqslant \frac{\|K^- f_\delta\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}}{\|f_\delta\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}} \geqslant \kappa_p(\delta).$$

Остается перейти к пределу при $\delta \to 0$ под знаком интеграла, определяющего $\kappa_p(\delta)$, что обосновывается теоремой Леви.

Оценка нормы оператора K^+ доказывается аналогично.

IV. Правые оценки в (7) и в (8) получается из (5) непосредственными вычислениями с учетом того, что в этом случае справедливо равенство (см. пример 2.1)

$$a_*(x) = \begin{cases} t^{-\max\{\lambda,\gamma\}}, & 0 < t \leqslant 1, \\ t^{-\min\{\lambda,\gamma\}}, & t > 1. \end{cases}$$

Получим оценку снизу нормы $\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}$. Возьмем минимизирующее семейство функций в виде

$$f_\delta(x) = \begin{cases} x^{-\nu+\delta}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

где $\delta > 0$, $\nu = 1 - \frac{\max\{1,\lambda\}}{p'}$. Имеем

$$\|f_\delta\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left\{ \int_0^1 \frac{dx}{x^{\nu p + \frac{\varepsilon}{p}(\lambda - \nu p) - \delta(p-\varepsilon)}} \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

Отсюда простыми рассуждениями получаем, что $f_\delta \in L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$. Оценим $K^- f_\delta$ поточечно снизу. Имеем при $0 < x \leqslant 1$

$$\begin{aligned} K^- f_\delta(x) &= \int_0^1 \mathscr{K}^-(1,t) f_\delta(xt)\, dt = x^{-\nu+\delta} \int_0^{\frac{1}{x}} \mathscr{K}^-(1,t) t^{-\nu+\delta}\, dt \\ &= f_\delta(x) \int_0^{\frac{1}{x}} \mathscr{K}^-(1,t) t^{-\nu+\delta}\, dt \geqslant f_\delta(x) \int_0^1 \mathscr{K}^-(1,t) t^{-\nu+\delta}\, dt. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)} \geqslant \frac{\|K^- f_\delta\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}}{\|f_\delta\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}} \geqslant \int_0^1 \mathscr{K}^-(1,t) t^{-\nu+\delta}\, dt.$$

Чтобы получить оценку снизу для $\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}$ остается перейти к пределу при $\delta \to 0$. Предельный переход под знаком интеграла возможен в силу теоремы Леви.

Оценка снизу для $\|K^+\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)}$ получается аналогично посредством функции

$$f_\delta(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leqslant 1, \\ x^{-\mu-\delta}, & x > 1, \end{cases}$$

где $\delta > 0$, $\mu = 1 - \frac{\min\{1,\gamma\}}{p'}$. $\triangleright$

4. Многомерный случай

4.1. Случай радиального ядра. Оценки через сферические средние. В этом пункте мы рассмотрим случай радильных ядер $k^-(|x|,|y|)$ и $k^+(|x|,|y|)$. В этом случае мы получим утверждение более сильное, чем просто ограниченность операторов K^- и K^+ в гранд-пространстве. Именно, мы получим оценки для норм $\|K^-f\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)}$ и $\|K^+f\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)}$ через сферические средние

$$F(\rho) := \frac{1}{|S^{n-1}|} \int\limits_{S^{n-1}} f(\rho\sigma)\, d\sigma$$

функции f (см. теорему 4.1).

Мы будем пользоваться также сферическим средним грандизатора a:

$$A(\rho) := \frac{1}{|S^{n-1}|} \int\limits_{S^{n-1}} a(\rho\sigma)\, d\sigma, \quad \rho \in \mathbb{R}_+.$$

Многомерные оператор K^- и K^+ сводятся к одномерным операторам $\bar{K}^-$ и $\bar{K}^+$ с ядрами $\bar{k}^-$ и $\bar{k}^+$ по формулам

$$K^-f(x) = \bar{K}^-F(|x|), \quad K^+f(x) = \bar{K}^+F(|x|), \tag{9}$$

где $\bar{k}^-(\rho,r) = |S^{n-1}|\rho^{n-1}k^-(\rho,r)$ и $\bar{k}^+(\rho,r) = |S^{n-1}|\rho^{n-1}k^+(\rho,r)$, что позволит воспользоваться результатами для одномерного случая на основании доказываемой ниже леммы 4.1. Отметим следующие следствия из неравенства Йесена:

$$\int\limits_{S_{n-1}} a(\rho\sigma)^\lambda\, d\sigma \leqslant |S^{n-1}| A(\rho)^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1, \tag{10}$$

$$|F(\rho)|^q \leqslant \frac{1}{|S^{n-1}|} \int\limits_{S_{n-1}} |f(\rho\sigma)|^q\, d\sigma, \quad q \geqslant 1. \tag{11}$$

Лемма 4.1. *Справедливы неравенства*

$$\big\|K^-f\big\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \big\|\tilde{K}^-\tilde{F}\big\|_{L_{\tilde{A}}^{p)}(\mathbb{R}_+)}, \quad \big\|K^+f\big\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \big\|\tilde{K}^+\tilde{F}\big\|_{L_{\tilde{A}}^{p)}(\mathbb{R}_+)}, \tag{12}$$

где

$$\tilde{K}^-F(\rho) = \int\limits_0^\infty \tilde{k}^-(\rho,r)F(r)\, dr, \quad \tilde{K}^+F(\rho) = \int\limits_0^\infty \tilde{k}^+(\rho,r)F(r)\, dr,$$

$$\tilde{F}(\rho) = \big|S^{n-1}\big|^{\frac{1}{p}} \rho^{\frac{n-1}{p}} F(\rho), \quad \tilde{A}(\rho) = \big|S^{n-1}\big|\rho^{n-1}A(\rho),$$

$$\tilde{k}^-(\rho,r)=\left|S^{n-1}\right|\left(\rho^{\frac{1}{p}}r^{\frac{1}{p'}}\right)^{n-1}k^-(\rho,r),\quad \tilde{k}^+(\rho,r)=\left|S^{n-1}\right|\left(\rho^{\frac{1}{p}}r^{\frac{1}{p'}}\right)^{n-1}k^+(\rho,r).$$

$\lhd$ Согласно (9) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|K^-f(x)\right|^{p-\varepsilon}a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}}\,dx=\int\limits_0^\infty\rho^{n-1}\left|\bar{K}^-F(\rho)\right|^{p-\varepsilon}\int\limits_{S^{n-1}}a(\rho\xi)^{\frac{\varepsilon}{p}}\,d\xi d\rho.$$

Тогда в силу (10)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|K^-f(x)\right|^{p-\varepsilon}a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}}\,dx\leqslant\left|S^{n-1}\right|\int\limits_0^\infty\rho^{n-1}\left|\bar{K}^-F(\rho)\right|^{p-\varepsilon}A(\rho)^{\frac{\varepsilon}{p}}\,d\rho.$$

Отсюда прямыми преобразованиями приходим к первому неравенству в (12). Второе неравенство доказывается аналогично. $\rhd$

Лемма 4.2. *Для радиальной функции f справедливо соотношение*

$$\|f\|_{L^{p)}_a(\mathbb{R}^n)}\leqslant\|f\|_{L^{p)}_{\mathscr{A}}(\mathbb{R}^n)},$$

где $\mathscr{A}(x):=\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S_{n-1}}a(|x|\sigma)\,d\sigma$.

$\lhd$ Для доказательства достаточно в левой части применить неравенство (10), перейдя к полярным координатам. $\rhd$

Следующая лемма доказывается аналогично с помощью неравенства (11).

Лемма 4.3. *Пусть* $\mathscr{A}(x)=A(|x|)$. *Тогда*

$$\|\mathscr{F}\|_{L^{p)}_{\mathscr{A}}(\mathbb{R}^n)}\leqslant\|f\|_{L^{p)}_{\mathscr{A}}(\mathbb{R}^n)},\tag{13}$$

где $\mathscr{F}(x):=\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}}f(|x|\sigma)\,d\sigma$.

В следующей теореме мы рассматриваем неравенства вида

$$\|K^-f\|_{L^{p)}_a(\mathbb{R}^n)}\leqslant C^-\|\mathscr{F}\|_{L^{p)}_{\mathscr{A}}(\mathbb{R}^n)},\quad\|K^+f\|_{L^{p)}_a(\mathbb{R}^n)}\leqslant C^+\|\mathscr{F}\|_{L^{p)}_{\mathscr{A}}(\mathbb{R}^n)},\tag{14}$$

где $\mathscr{F}(x)=F(|x|)$, a — произвольный грандизатор на $\mathbb{R}^n$, сферическая средняя которого равна функции $\mathscr{A}(x)=A(|x|)$, а также даем оценки снизу и сверху для наилучших констант C_*^- и C_*^+ в (14).

Обозначим

$$d^-(A):=\left|S^{n-1}\right|\sup_{0<\varepsilon<p-1}\int\limits_1^\infty\left|k^-(t,1)\right|\,t^{\frac{n}{p-\varepsilon}-1}A_*(t)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\,dt,$$

$$d^+(A):=\left|S^{n-1}\right|\sup_{0<\varepsilon<p-1}\int\limits_0^1\left|k^+(t,1)\right|\,t^{\frac{n}{p-\varepsilon}-1}A_*(t)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\,dt,$$

$$\varkappa_n^-:=\int\limits_1^\infty\left|k^-(1,y)\right|y^{\frac{n}{p'}-1}\,dy,\quad\varkappa_n^+:=\int\limits_0^1\left|k^+(y,1)\right|y^{\frac{n}{p}-1}\,dy.$$

Теорема 4.1. *Пусть $1 < p < \infty$, $A(|x|)$ — грандизатор на $\mathbb{R}^n$, функции $k^-(|x|,|y|)$ и $k^+(|x|,|y|)$ однородны степени $-n$.*

I. *Если $d^-(A) < \infty$, $d^+(A) < \infty$, то неравенства (14) выполняются с $C^- = d^-(A)$ и $C^+ = d^+(A)$ соответственно.*

II. *Если $t^\gamma A(t)$ не возрастает на $\mathbb{R}_+$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$ такого, что $\kappa_n^-(\min\{n,\gamma\}) < \infty$, то $C^- \leqslant |S^{n-1}|\kappa_n^-(\min\{n,\gamma\})$. Если $t^\lambda A(t)$ не убывает на $\mathbb{R}_+$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ такого, что $\kappa_n^+(\max\{n,\lambda\}) < \infty$, то $C^+ \leqslant |S^{n-1}|\kappa_n^+(\max\{n,\lambda\})$.*

III. *Если $\mathscr{A} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $k^-(|x|,|y|) \geqslant 0$, $k^+(|x|,|y|) \geqslant 0$, то условия $\varkappa_n^- < \infty$, $\varkappa_n^+ < \infty$ необходимы для ограниченности операторов K^- и K^- соответственно в гранд-пространстве $L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$. При этом для наилучших констант в неравенствах (14) справедливы оценки*

$$\left|S^{n-1}\right|\varkappa_n^- \leqslant C_*^-, \quad \left|S^{n-1}\right|\varkappa_n^+ \leqslant C_*^+. \tag{15}$$

IV. *При $a(x) = |x|^{-\lambda}(1+|x|)^{\lambda-\gamma}$, $\lambda,\gamma \in \mathbb{R}$, и неотрицательных ядер наилучшие константы в (14) удовлетворяют неравенствам*

$$\left|S^{n-1}\right|\kappa_n^-\left(\max\{n,\lambda\}\right) \leqslant C_*^- \leqslant \left|S^{n-1}\right|\kappa_n^-(\min\{n,\lambda,\gamma\}), \tag{16}$$

$$\left|S^{n-1}\right|\kappa_n^+(\min\{n,\gamma\}) \leqslant C_*^+ \leqslant \left|S^{n-1}\right|\kappa_n^+(\max\{n,\lambda,\gamma\}). \tag{17}$$

В частности, при $\lambda = \gamma = n$ имеют место равенства

$$C_*^- = \left|S^{n-1}\right|\varkappa_n^-, \quad C_*^+ = \left|S^{n-1}\right|\varkappa_n^+.$$

$\lhd$ Доказательство теоремы подготовлено леммой 4.1. Применяя теорему 3.1 в правых частях неравенств (12), после ряда простых преобразований получаем утверждение теоремы в достаточной части.

Для получения оценок норм снизу в пунктах III и IV неравенства (12) неприменимы. Но мы воспользуемся тем, что на радиальных функциях неравенства (10) и (11), а следовательно, и неравенства (12), превращаются в равенства.

Получим первую оценку из (15). Рассмотрим минимизующую функцию

$$f_\delta(x) = \begin{cases} |x|^{-\frac{n}{p}+\delta}, & 0 < |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

где $\delta > 0$. Очевидно $f_\delta \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, в силу включения $\mathscr{A} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_\delta \in L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$. Ввиду радиальности f_δ имеем

$$\|K^- f_\delta\|_{L_A^{p)}(\mathbb{R}^n)} = \left\|\tilde{K}^- \tilde{F}_\delta\right\|_{L_{\tilde{A}}^{p)}(\mathbb{R}_+)},$$

где $\tilde{A}(\rho) = |S^{n-1}|\rho^{n-1}A(\rho)$, $\tilde{F}_\delta(\rho) = \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} f_\delta(\rho\sigma)\,d\sigma = |S^{n-1}|^{\frac{1}{p}}\rho^{\frac{n-1}{p}} f_\delta(\rho)$.

Воспользовавшись первым из неравенств (6), после несложных преобразований получим

$$\left\|K^- f_\delta\right\|_{L_A^{p)}(\mathbb{R}^n)} \geqslant \varkappa_n^- \left\|\tilde{F}_\delta\right\|_{L_{\tilde{A}}^{p)}(\mathbb{R}_+)} = |S^{n-1}|\varkappa_n^- \|f_\delta\|_{L_A^{p)}(\mathbb{R}_n)}.$$

Тем самым первое из неравенств (15) доказано. Второе получается аналогично посредством функции

$$f_\delta(x) = \begin{cases} 0, & 0 < |x| \leqslant 1, \\ |x|^{-\frac{n}{p}-\delta}, & |x| > 1, \end{cases}$$

где $\delta > 0$.

Доказательство неравенств (16) и (17) аналогично доказательству неравенств (7) и (8). $\rhd$

4.2. Общий случай. Обозначим

$$\kappa_p^- := \int\limits_{|x|\leqslant 1} \mathscr{K}^-(e_1, x)\, \frac{1}{|x|^{\frac{n}{p}}}\, dx,$$

$$\ell^-(a) := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \int\limits_{|x|\geqslant 1} \left|\mathscr{K}^-(x, e_1)\right| \frac{[a_*(|x|)]^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}}{|x|^{\frac{n}{(p-\varepsilon)'}}}\, dx.$$

Заметим, что $\ell^-(a) \leqslant \int_{|x|\geqslant 1} |\mathscr{K}^-(x, e_1)| \max\left\{[a_*(|x|)]^{\frac{1}{p'}}, \frac{1}{|x|^{\frac{n}{p'}}}\right\} dx$, что получается вычислением $\sup_{0<\varepsilon<p-1} \frac{[a_*(|x|)]^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}}{|x|^{\frac{n}{(p-\varepsilon)'}}}$.

Теорема 4.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $a = a(|x|)$, *ядро* $\mathscr{K}^-(x,y)$ *однородно степени* $-n$ *и инвариантно относительно вращений. Если* $\ell^-(a) < \infty$, *то оператор* K^- *ограничен в гранд-пространстве* $L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \ell^-(a). \tag{18}$$

Если $\mathscr{K}^-(x,y) \geqslant 0$ *и* $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *то условие* $\kappa_p^- < \infty$ *необходимо для такой ограниченности и*

$$\kappa_p^- \leqslant \|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)}. \tag{19}$$

$\lhd$ Оценим $\|K^- f\|_{L^{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}})}$ сверху. Для этого представим $K^- f(x)$ в виде

$$K^- f(x) = \int\limits_{|y|\leqslant|x|} |y|^{-\frac{n}{qq'}} \mathscr{K}^-(x,y)^{\frac{1}{q'}} \left(\frac{a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}{a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}\right)^{\frac{1}{qq'}} |y|^{\frac{n}{qq'}} \mathscr{K}^-(x,y)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}{a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}\right)^{\frac{1}{qq'}} f(y)\, dy.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$|K^- f(x)| \leqslant \{\Delta\}^{\frac{1}{q'}} \left\{\int\limits_{|y|\leqslant|x|} |y|^{\frac{n}{q'}} |\mathscr{K}^-(x,y)| \left(\frac{a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}{a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}\right)^{\frac{1}{q'}} |f(y)|^q\, dy\right\}^{\frac{1}{q}},$$

где $\Delta = \int_{|y|\leqslant|x|} |y|^{-\frac{n}{q}} |\mathscr{K}^-(x,y)| \left(\frac{a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}{a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} dy$. Заменив q в выражении для Δ на $p-\varepsilon$ и сделав замену подобия $y \to |x|y$, получим

$$\Delta = |x|^{-\frac{n}{p-\varepsilon}} \int\limits_{|y|\leqslant 1} |y|^{-\frac{n}{p-\varepsilon}} \left|\mathscr{K}^-\left(\frac{x}{|x|}, y\right)\right| \left(\frac{a(|y|)}{a(|x||y|)}\right)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} dy.$$

В последнем интеграле сделаем замену вращения $y = \omega(z)$, при котором $\omega(e_1) = \frac{x}{|x|}$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, и воспользуемся неравенством

$$\sup_{t<1} \frac{a(t)}{a(xt)} \leqslant a_*\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0,$$

и инвариантностью функции $\mathscr{K}$ относительно вращений:

$$\Delta \leqslant |x|^{-\frac{n}{p-\varepsilon}} \int\limits_{|y|\leqslant 1} |y|^{-\frac{n}{p-\varepsilon}} \left|\mathscr{K}^{-}(e_1,y)\right| \left[a_*\left(\frac{1}{|y|}\right)\right]^{-\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} dy.$$

Сделав в интеграле преобразование инверсии, получим $\Delta \leqslant |x|^{-\frac{n}{p-\varepsilon}} \ell_\varepsilon^{-}(a)$, где

$$\ell_\varepsilon^{-}(a) := \int\limits_{|x|\geqslant 1} \left|\mathscr{K}^{-}(x,e_1)\right| \frac{\left[a_*(|x|)\right]^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}}{|x|^{\frac{n}{(p-\varepsilon)'}}}\, dx.$$

Таким образом, получаем

$$\left|K^{-}f(x)\right| \leqslant \frac{\left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}}}{|x|^{\frac{n}{(p-\varepsilon)(p-\varepsilon)'}}} \left\{\int\limits_{|y|\leqslant|x|} |y|^{\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} |\mathscr{K}^{-}(x,y)| \left(\frac{a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}{a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} |f(y)|^{p-\varepsilon}\, dy\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

Далее, имеем

$$\|K^{-}f\|_{L^{p-\varepsilon}\left(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)} \leqslant \left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p-\varepsilon} |y|^{\frac{n}{(p-\varepsilon)'}}\right.$$

$$\left.\times \int\limits_{|y|\leqslant|x|} |x|^{-\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} |\mathscr{K}^{-}(x,y)| \left(\frac{a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}{a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p}}}\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dx dy\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p-\varepsilon} |y|^{\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)'}} \int\limits_{|y|\leqslant|x|} |x|^{-\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} |\mathscr{K}^{-}(x,y)| a(|x|)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\, dx\, dy\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

После замены $x \to |y|x$ и вращения во внутреннем интеграле, получим

$$\|K^{-}f\|_{L^{p-\varepsilon}\left(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)} \leqslant \left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p-\varepsilon} a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)'}}\, dy\right.$$

$$\left.\times \int\limits_{|x|\geqslant 1} |x|^{-\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} |\mathscr{K}^{-}(x,e_1)| a(|x||y|)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\, dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p-\varepsilon} a(|y|)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dy \times \int\limits_{|x|\geqslant 1} |x|^{-\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} |\mathscr{K}^{-}(x,e_1)| \left(\frac{a(|x||y|)}{a(|y|)}\right)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leqslant \left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}\left(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)} \times \left\{\int_{|x|\geqslant 1} |x|^{-\frac{n}{(p-\varepsilon)'}} |\mathscr{K}^{-}(x,e_1)| \left[a_*(|x|)\right]^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\, dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \left[\ell_\varepsilon^{-}(a)\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}\left(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)} = \ell_\varepsilon^{-}(a) \|f\|_{L^{p-\varepsilon}\left(\mathbb{R}^n, a^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)}.$$

Отсюда с учетом (1), приходим к (18).

Для доказательства оценки снизу в (19) возьмем минимизирующее семейство функций в виде $f_\delta(x) = |x|^{-\frac{n}{p}+\delta}(1+|x|)^{-2\delta}$. Так как $f_\delta \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то $f_\delta \in L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$ в силу (2). Из ограниченности оператора K^- в гранд-пространстве $L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$ следует, что он определен на функции f_δ. Имеем

$$K^- f_\delta(x) = \int\limits_{|y|\leqslant 1} \mathscr{K}^-(e_1, y) f_\delta(|x|y)\, dy.$$

Легко проверить, что $f_\delta(xy) \geqslant f_\delta(x) f_\delta(y)$. Тогда

$$K^- f_\delta(x) \geqslant \kappa_p^-(\delta) f_\delta(x),$$

где $\kappa_p^-(\delta) = \int_{|y|\leqslant 1} \mathscr{K}^-(e_1, y) f_\delta(y)\, dy$. Следовательно,

$$\|K^-\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)} \geqslant \frac{\|K^- f_\delta\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)}}{\|f_\delta\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)}} \geqslant \kappa_p^-(\delta).$$

Остается перейти к пределу при $\delta \to 0$ под знаком интеграла, определяющего $\kappa_p^-(\delta)$, что обосновывается теоремой Леви. $\rhd$

Аналогичное утверждение справедливо и для оператора K^+ с заменой κ_p^- и $\ell^-(a)$ на

$$\kappa_p^+ = \int\limits_{|x|\geqslant 1} \mathscr{K}^+(x, e_1) \frac{1}{|x|^{\frac{n}{p'}}}\, dx$$

и

$$\ell^+(a) = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \int\limits_{|x|\leqslant 1} \left|\mathscr{K}^+(e_1, x)\right| |x|^{-\frac{n}{p-\varepsilon}} [a_*(|x|)]^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\, dx$$

соответственно.

Автор выражает благодарность профессору С. Г. Самко за полезное обсуждение результатов работы и анонимному рецензенту за ценные замечания.

Литература

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978.—499 с.
2. *Умархаджиев С. М.* Ограниченность линейных операторов в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега // Вестн. Акад. наук Чеченской респ.—2013.—Т. 19, № 2.—С. 5–9.
3. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд-пространства Лебега // Изв. вузов. Математика.—2014.—Т. 4.—С. 42–51; пер. на англ.: Generalization of the notion of grand Lebesgue space. Russian Math. (Iz. VUZ).—2014.—Vol. 58, № 4.—P. 35–43.
4. *Умархаджиев С. М.* Ограниченность потенциала Рисса в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега // Владикавк. мат. журн.—2014.—Т. 16, № 2.—С. 62–68.
5. *Умархаджиев С. М.* Плотность пространства Лизоркина в гранд-пространствах Лебега // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 3.—С. 75–83.
6. *Iwaniec T., Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Rational Mech. Anal.—1992.—Vol. 119.—P. 129–143.
7. *Karapetiants N. K., Samko S. G.* Equations with Involutive Operators.—Boston: Birkhäuser, 2001.
8. *Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., and Samko S.* Integral Operators in Non-standard Function Spaces. Vol. I. Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces.—Basel: Birkhauser, 2016.—1–586 p.—(Operator Theory: Advances and Appl. 248).

9. *Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., and Samko S.* Integral Operators in Non-Standard Function Spaces. Vol. II. Variable Exponent Holder, Morrey–Campanato and Grand Spaces.—Basel: Birkhauser, 2016.—587–1009 p.—(Operator Theory: Advances and Appl. 249).
10. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and their Applications. London–N. Y.: Taylor & Francis.—2002.—358+xvii p.—(Ser. Analytical Methods and Special Functions. Vol. 5).
11. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On Iwaniec–Sbordone spaces on sets which may have infinite measure // Azerb. J. Math.—2011.—Vol. 1, № 1.—P. 67–84.
12. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On Iwaniec–Sbordone spaces on sets which may have infinite measure: addendum // Azerb. J. Math.—2011.—Vol. 1, № 2.—P. 143–144.
13. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* Riesz fractional integrals in grand Lebesgue spaces // Fract. Calc. Appl. Anal.—2016.—Vol. 19, № 3.—P. 608–624.
14. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On grand Lebesgue spaces on sets of infinite measure // Math. Nachrichten.—2016.—URL: http://dx.doi.org/10.1002/mana.201600136.
15. *Umarkhadzhiev S. M.* The boundedness of the Riesz potential operator from generalized grand Lebesgue spaces to generalized grand Morrey spaces // Operator Theory, Operator Algebras and Appl.—Basel: Birkhäuser/Springer, 2014.—P. 363–373.

Статья поступила 20 января 2017 г.

Умархаджиев Салаудин Мусаевич
Комплексный научно-исследовательский институт
им. Х. И. Ибрагимова РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 364051, Грозный, Старопромысловское шоссе, 21 а;

Академия наук Чеченской Республики
РОССИЯ, 364024, Грозный, пр-кт им. М. Эсамбаева, 13
заведующий отделом прикладной семиотики
E-mail: umsalaudin@gmail.com

ONE-SIDED INTEGRAL OPERATORS WITH HOMOGENEOUS KERNELS IN GRAND LEBESGUE SPACES

Umarkhadzhiev S. M.

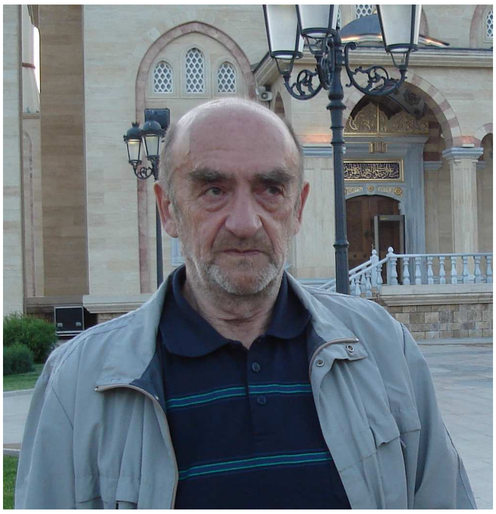
Sufficient conditions and necessary conditions for the kernel and the grandiser are obtained under which one-sided integral operators with homogeneous kernels are bounded in the grand Lebesgue spaces on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^n$. Two-sided estimates for grand norms of these operators are also obtained. In addition, in the case of a radial kernel, we obtain two-sided estimates for the norms of multidimensional operators in terms of spherical means and show that this result is stronger than the inequalities for norms of operators with a nonradial kernel.

Key words: one-sided integral operators, operators with homogeneous kernels, the grand Lebesgue spaces, two-sided estimates, spherical means.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 83–85

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

АЛЕКСЕЙ БОРИСОВИЧ ШАБАТ
(к 80-летию со дня рождения)



Исполнилось 80 лет со дня рождения выдающегося математика, лауреата государственной премии Российской Федерации в области науки и техники, главного научного сотрудника Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, доктора физико-математических наук, профессора Шабата Алексея Борисовича.

Алексей Борисович Шабат родился 8 августа 1937 г. в Москве в семье научных работников. Вся сознательная жизнь его родителей и А. Б. Шабата связана с Московским университетом. Отец, Борис Владимирович Шабат, был известным математиком, профессором МГУ по кафедре функционального анализа, автором известных учебников «Методы теории функций комплексного переменного» и «Введение в комплексный анализ», мать, Макарова Елена Александровна, — старшим научным сотрудником Государственного астрономического института им. П. К. Штернберга МГУ. Во время войны вся его семья, вместе с молодежью МГУ, побывала в Ашхабаде и Свердловске, в эвакуации. В 60-е гг. Алексей Борисович возвращался в эти места в связи со школьными олимпиадами, но следы эвакуации потерялись.

С 1954 по 1959 гг. учился на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Результаты, полученные на 3 курсе на кафедре дифференциальных уравнений под руководством профессора М. И. Вишика, были опубликованы в журнале «Успехи математических наук» в 1962 г. Его первые работы посвящены краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, теории эллиптических уравнений и решению ряда задач классической гидродинамики. В 1963 г. защитил кандидатскую диссертацию «О склеивании потенциального и вихревого течений несжимаемой жидкости» в Институте математики СО АН СССР (г. Новосибирск) под руководством академика М. А. Лаврентьева. В 1974 г. успешно защитил докторскую диссертацию «Операторы преобразования и нелинейные уравнения» на механико-математическом факультете МГУ.

После окончания МГУ переехал в Новосибирский Академгородок, где работал в Институте гидродинамики Сибирского отделения АН СССР в теоретическом отделе Л. В. Овсянникова и в Новосибирском государственном университете (1959–1973 гг.) на кафедре дифференциальных уравнений С. Л. Соболева. В Академгородке в конце

60-х гг. определилось, во взаимодействии с В. Е. Захаровым, научное направление работ, ориентированных на приложения метода обратной задачи рассеяния в современной математической физике. В Уфе, куда А. Б. Шабат переехал в конце 1973 г., прошли 15 лет наиболее продуктивной научной жизни. Сначала он работал в Башкирском государственном университете (Уфа, 1974–1990 гг.) на кафедре профессора М. Д. Рамазанова, а затем в Отделе физики и математики Башкирского филиала Академии наук под руководством профессора В. И. Хвостенко. В Уфе удалось создать рабочую группу, нацеленную на продвижение идей Софуса Ли в теорию солитонов. Полученные результаты обеспечили этой группе ученых в начале 80-х гг. международное признание и сыграли свою роль в бурном оформлении математических аспектов теории солитонов и самого понятия интегрируемости. С 1990 г. и по настоящее время Шабат А. Б. работает в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН (Черноголовка) и с 2007 г. проводит много времени в Карачаево-Черкесском государственном университете им. У. Д. Алиева, где руководит работой аспирантов на физико-математическом факультете.

Мировую известность и признание не только математиков, но и физиков-теоретиков принесли ему основополагающие результаты в современной теории интегрируемых систем, связанные с развитием метода обратной задачи рассеяния — жемчужины математической физики XX столетия.

А. Б. Шабат внес фундаментальный вклад в развитие теории солитонов — нового метода современной математической физики.

В 1970–1979 гг. им в соавторстве с В. Е. Захаровым была создана и разработана общая схема интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений методом обратной задачи рассеяния, известная во всем мире как «метод одевания», или метод Захарова — Шабата. Именно, после знаменитой работы [Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1971. Т. 61, № 1. С. 118–134] «метод обратной задачи рассеяния» стал методом. В эти годы Шабат А. Б. также опубликовал ряд пионерских работ, развивающих метод обратной задачи рассеяния, и впервые использовал задачу сопряжения Римана — Гильберта для решения обратной задачи рассеяния.

В конце 70-х гг. он приступил к решению задач классификации интегрируемых уравнений. Ему принадлежит приоритет использования матричной задачи Римана — Гильберта для построения решений уравнений, интегрируемых методом обратной задачи. Для работы над этим проектом в Уфе была создана рабочая группа, в которой, кроме учеников А. Б. Шабата (А. В. Жибер, В. В. Соколов, И. Т. Хабибуллин, С. И. Свинолупов, Р. И. Ямилов, А. В. Адлер), принимали участие в разные годы Н. Х. Ибрагимов, А. Н. Лезнов, А. В. Михайлов. В результате работ этой группы были сформулированы простые и эффективные критерии интегрируемости, являющиеся необходимыми условиями существования высших симметрий и законов сохранения.

А. Б. Шабатом в сотрудничестве с учениками полностью описаны и проклассифицированы интегрируемые системы уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера и лагранжевы нелинейные цепочки с взаимодействием ближайших соседей.

В 1974 г. А. Б. Шабат организует широко известную, первую в России конференцию по теории солитонов и методу обратной задачи рассеяния. На ней собралась как плеяда выдающихся ученых, так и молодое поколение.

В 80-е гг. на основе доказанной А. Б. Шабатом теоремы о существовании обобщенной лаксовой пары для эволюционных уравнений, обладающих высшими симметриями, был развит симметрийный подход к проблеме интегрируемости. В сотрудничестве с учениками были разработаны эффективные критерии интегрируемости, дано исчерпывающее описание и классификация интегрируемых нелинейных уравнений, обобщающих анизотропную модель Ландау — Лифшица. Отметим еще цикл работ А. Б. Шабата (1987–2000 гг.), выполненных в соавторстве с его учениками Р. И. Ямиловым и В. А. Адлером, в котором завершена классификация лагранжевых нелинейных цепочек с взаимодействием ближайших соседей.

Работы, выполненные А. Б. Шабатом в 90-е гг., посвящены в основном развитию теории дискретных симметрий. Им разработана достаточно общая схема дискретизации спектральных задач и исследованы решеточные уравнения для основных спектральных задач. В качестве приложений этой теории А. Б. Шабатом указаны новые, точно решаемые задачи одномерной квантовой механики с «арифметическими» спектрами и установлен ряд интересных фактов для уравнений типа Пенлеве.

В 1996–1999 гг. А. Б. Шабат (совместно с В. Е. Захаровым) получает грант как руководитель направления «Математическая теория точно интегрируемых нелинейных моделей» ведущей научной школы «Теория нелинейных волн».

Начиная с 1969 г. интересы А. Б. Шабата концентрируются на различных вопросах, связанных с открытым в 1967 г. группой американских физиков-теоретиков нового подхода к теории нелинейных волн. Математическая сторона этой задачи, известная под названием «Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния», сложилась благодаря совместным работам с В. Е. Захаровым, написанным в начале 70-х гг. в Новосибирске. В настоящее время интересы А. Б. Шабата концентрируются вокруг классической задачи о коммутирующих дифференциальных операторах в многомерии.

А. Б. Шабат был координатором консорциума Einstein, который организовал и провел серию совместных конференций NEEDS в Италии и России. В 2001 г. он получает приглашение в Математический Институт им. И. Ньютона в Кембридж как Rothschild Visiting Professor. В разные годы А. Б. Шабат работал в университетах Рима, Мадрида, Миннесоты, Лафборо, Лидса, Монпелье и др.

А. Б. Шабат — член редколлегий журналов «Теоретическая и математическая физика» (Москва), «Уфимский математический журнал» (Уфа), «Владикавказский математический журнал» (Владикавказ), эксперт Российского фонда фундаментальных исследований, член докторского диссертационного Совета Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН.

Среди его учеников более 10 кандидатов и 6 докторов наук. В настоящее время Алексей Борисович успешно руководит работой группы аспирантов на Северном Кавказе по тематике «Интегрируемые системы».

А. Б. Шабат имеет II разряд по альпинизму. Ему покорились многие вершины мира.

Поздравляем Алексея Борисовича с 80-летним юбилеем, желаем ему крепкого здоровья, семейного благополучия и новых творческих успехов.

А. В. Абанин, С. Н. Асхабов, А. Б. Борисов, Р. А. Бостанов,
А. В. Жибер, В. Е. Захаров, С. Б. Климентов, Ю. Ф. Коробейник,
А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, А. В. Михайлов,
А. П. Солдатов, Х. Г. Умаров, С. М. Умарходжиев

Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом — филиалом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи в порядке цитирования или по алфавиту. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов ($\approx$ 12 стр. формата А4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взымается.

Авторские права на журнал в целом принадлежат Южному математическому институту — филиалу ВНЦ РАН и Редколлегии журнала, которые обладают исключительным правом получать и распределять любые платежи, связанные с переуступкой авторских прав на журнал.

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 53-84-62;
E-mail: rio@smath.ru
Зав. редакцией: Кибизова В. В.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 19

Выпуск 3

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-50223 от 15 июня 2012 г.

Подписано в печать 14.09.2017. Дата выхода в свет 18.09.2017.
Формат бумаги $60\times84^1/_8$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 10,00. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель и издатель:
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.