

Ein neues Tetraederfraktal¹

Herbert Zeitler, Bayreuth

Abstract: *A new tetrahedral fractal.* People from physiology and anatomy think that the human lung is a surface fractal. They like to obtain models from geometry of so-called physiological surface fractals. In the talk we could present some surfaces of this kind. One example is investigated here.

Kurzreferat: Physiologen und Anatomen sind der Meinung, die menschliche Lunge sei ein Flächenfraktal. Sie wollen von der Geometrie Modelle sogenannter physiologischer Flächenfraktale. In dem Vortrag konnten wir etliche Flächen dieser Art vorführen. Ein Beispiel wird hier behandelt.

ZDM-Classification: I90

Physiologen sind der Meinung, daß für Modelle der Lunge und der Niere Flächenfraktale geeignet sind. Diese "physiologischen" Fraktale – so meinen sie – müssen die folgenden vier Bedingungen erfüllen:

1. Die Fläche $F(\infty)$ des Flächenfraktals ist ∞ .
2. Das Flächenfraktal ist in eine Grenzfläche eingebettet, d.h. es erreicht sie, verläßt sie aber nicht.
3. Das Flächenfraktal füllt den Raum innerhalb der Grenzfläche völlig aus.
4. Es soll sich wirklich um ein Fraktal handeln.

In der vorliegenden Arbeit sprechen wir von einem Fraktal, wenn die zugehörige fraktale Dimension nicht ganzzahlig ist.

Bekanntlich gibt es Polyederfraktale, welche diese Bedingungen erfüllen. Eines davon ist das Tetraederfraktal. Die zugehörige Grenzfläche ist ein Würfel. M. Gardner sprach in diesem Zusammenhang von einem Märchen: "Die Schneeflocke, die zum Würfel wurde."

In der vorliegenden Arbeit wird nun ein neues "physiologisches" Tetraederfraktal konstruiert. Es genügt den vier Bedingungen. Die Grenzfläche ist ein reguläres Oktaeder.

1. Ein Oktaederschwamm

1.1 Die Konstruktion

Wir starten mit einem regulären Oktaeder (Kante a), teilen

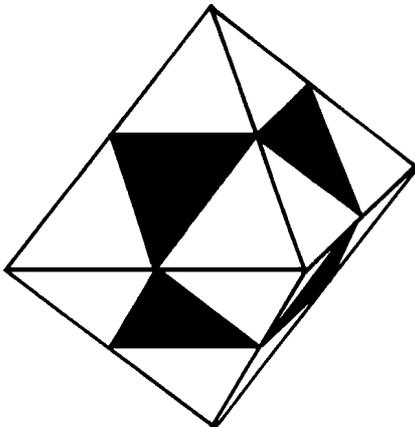


Abb. 1: Auf dem Wege zum Oktaederschwamm

jede seiner 8 Flächen in 4 gleichseitige Dreiecke (Kante $\frac{1}{2}a$), verbinden jeweils das mittlere Dreieck mit dem Mittelpunkt des Oktaeders (Abb. 1). Diese so entstehenden 8 regulären Tetraeder nehmen wir heraus (ausbohren). Es bleiben 6 Oktaeder (Kante $\frac{1}{2}a$) übrig. Mit ihnen verfahren wir auf die gleiche Weise. Fortsetzung dieser Konstruktion liefert den Oktaederschwamm.

1.2 Überlappungen

Die Art der Konstruktion zeigt sofort, daß es zu keinen häßlichen Überlappungen kommt. Oktaeder derselben Generation sind entweder disjunkt oder sie haben genau einen Punkt gemeinsam.

1.3 Dimension

Der Oktaederschwamm ist selbstähnlich im strengen Sinn. Nehmen wir einen der $N = 6$ Oktaederschwämme an den Ecken des Startoktaeders und vergrößern ihn mit dem Faktor $p = 2$, so erhalten wir den gesamten Schwamm. Damit ergibt sich die Selbstähnlichkeitsdimension

$$d_s = \frac{\ln 6}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

1.4 Volumen und Fläche

Satz

Die Oberfläche des Oktaederschwammes $F(\infty)$ ist ∞ und das Volumen $V(\infty)$ der von dem Oktaederschwamm eingeschlossenen Punktmenge 0.

Beweis:

In Tabelle 1 haben wir die Anzahl der Dreiecke bzw. der Oktaeder und deren Fläche bzw. deren Volumen für die einzelnen Generationen angegeben.

| Generation | Dreiecke | | Oktaeder | |
|------------|---------------|--------------------|----------|--------------------|
| | Anzahl | Fläche | Anzahl | Volumen |
| 0 | 8 | F_0 | 1 | V_0 |
| 1 | $8 \cdot 6$ | $\frac{1}{4}F_0$ | 6 | $\frac{1}{8}V_0$ |
| 2 | $8 \cdot 6^2$ | $\frac{1}{4^2}F_0$ | 6^2 | $\frac{1}{8^2}V_0$ |
| ⋮ | | | | |
| n | $8 \cdot 6^n$ | $\frac{1}{4^n}F_0$ | 6^n | $\frac{1}{8^n}V_0$ |

Tabelle 1: Fläche und Volumen des Schwammes

Dabei gilt $F_0 = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ und $V_0 = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$.

$$F(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} 8 \cdot 6^n \cdot \frac{1}{4^n} F_0 = 8F_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty.$$

$$V(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} 6^n \cdot \frac{1}{8^n} V_0 = V_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

1.5 Grenzfläche

Unser Oktaederschwamm ist in das Startoktaeder eingebettet, füllt dieses aber nicht aus. Wir haben ein Analogon zum Menger-Schwamm oder zum Sierpinski-Tetraeder-Käse.

2. Das Tetraederfraktal

Der Oktaederschwamm aus Kapitel 1 umschließt eine Punktmenge. Wir blicken jetzt fortgesetzt auf die dazu komplementäre Menge. In Anlehnung daran konstruieren wir unser neues, unser physiologisches Tetraederfraktal.

¹Aus dem Vortrag "Fractal geometry between medicine and art", 8th International Conference on Geometry, Nahsholim (Israel), March 7–14, 1999

2.1 Die Konstruktion

Wir beginnen mit einem Quadrat (Kante $\frac{1}{2}a$). Jede Seite wird Kante eines regulären Tetraeders. Diese 4 Tetraeder haben einen Punkt M gemeinsam (Abb. 2a). Jetzt werden zwei solche Tetraederkonfigurationen aneinander gelegt. Damit haben wir dann das Startgebilde aus 8 Tetraedern (Abb. 2b).

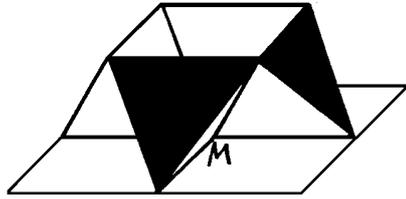


Abb. 2a: Auf dem Wege zum Tetraederfraktal

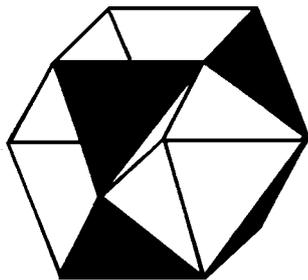


Abb. 2b: Auf dem Wege zum Tetraederfraktal

Dieses merkwürdige Startgebilde besitzt 6 Einbuchtungen in Form quadratischer Pyramiden (Kante $\frac{1}{2}a$). Nun werden in diese 6 Einbuchtungen verkleinerte Startgebilde (Kante $\frac{1}{4}a$) eingesetzt. So fortfahrend erhalten wir ein Flächenfraktal.

Die Konstruktion mutet sehr gekünstelt an. Ihre Beschreibung, unabhängig vom Oktaederschwamm, ist schwer vorstellbar und noch schwerer zu beschreiben.

2.2 Überlappungen

Die Konstruktion macht deutlich, daß Tetraeder der gleichen Generation entweder disjunkt sind oder genau einen Punkt bzw. eine Kante gemeinsam haben. Es kommt also nicht zu Überlappungen.

2.3 Volumen

Satz

Die von unserem neuen Tetraederfraktal eingeschlossene Punktmenge hat das Volumen $\overline{V(\infty)} = V_0 = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$.

Beweis:

In der folgenden Tabelle geben wir die Anzahl der Tetraeder und ihr Volumen in den einzelnen Generationen an.

| Generation | Tetraeder | |
|------------|-------------------|------------------------|
| | Anzahl | Volumen |
| 1 | 8 | V_1 |
| 2 | $8 \cdot 6$ | $\frac{1}{8}V_1$ |
| 3 | $8 \cdot 6^2$ | $\frac{1}{8^2}V_1$ |
| \vdots | | |
| n | $8 \cdot 6^{n-1}$ | $\frac{1}{8^{n-1}}V_1$ |

mit $V_1 = \frac{1}{96}a^3\sqrt{2}$

Tabelle 2: Fläche und Volumen des Komplements

$$\begin{aligned} \overline{V(\infty)} &= 8V_1 + 8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{8}V_1 + 8 \cdot 6^2 \cdot \frac{1}{8^2}V_1 + \dots \\ &= 8V_1 \left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots \right) = 32V_1 = \\ &= \frac{1}{3}a^3\sqrt{2} = V_0. \end{aligned}$$

2.4 Grenzgebilde

Gehen wir zurück zum Oktaederschwamm, so erkennen wir, daß das dortige Startoktaeder mit Kante a und $V_0 = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$ die Grenzfläche ist. Mit 2.2 können wir sagen, daß unser Tetraederfraktal das Grenzgebilde völlig ausfüllt.

2.5 Zwei Hilfssätze

2.5.1 Das Sierpinski-Dreieck

Der Abb. 3 entnehmen wir die Konstruktion dieses Fraktals.

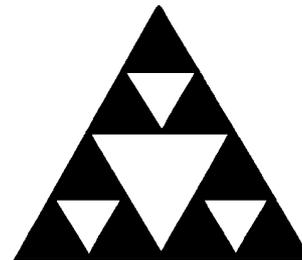


Abb. 3: Auf dem Wege zum Sierpinski-Dreieck

Hilfssatz

Die Fläche $A(\infty)$ des Sierpinski-Dreiecks ist 0.

Beweis:

| Generation | Dreiecke | |
|------------|----------|--------------------|
| | Anzahl | Fläche |
| 0 | 1 | F_0 |
| 1 | 3 | $\frac{1}{4}F_0$ |
| 2 | 3^2 | $\frac{1}{4^2}F_0$ |
| \vdots | | |
| n | 3^n | $\frac{1}{4^n}F_0$ |

mit $F_0 = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$

Tabelle 3: Fläche Sierpinski-Dreieck

$A(n) = F_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$A(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

2.5.2 Die Komplementärkonfiguration

Der Abb. 4 entnehmen wir die Konstruktion dieses Fraktals.

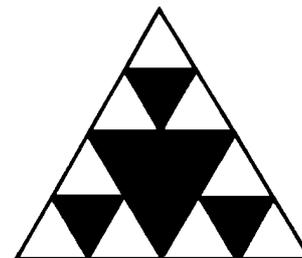


Abb. 4: Auf dem Wege zur Komplementär-Konfiguration

Hilfssatz

Die Fläche $\overline{A(\infty)}$ des neuen Fraktals ist F_0 .

Beweis:

| Generation | Dreiecke | |
|------------|-----------|-------------------------|
| | Anzahl | Fläche |
| 1 | 1 | A_1 |
| 2 | 3 | $\frac{1}{4} A_1$ |
| 3 | 3^2 | $\frac{1}{4^2} A_1$ |
| \vdots | | |
| n | 3^{n-1} | $\frac{1}{4^{n-1}} A_1$ |

mit $A_1 = \frac{1}{4} F_0 = a^2 \sqrt{3} \frac{1}{16}$

Tabelle 4: Fläche Komplement Sierpinski-Dreieck

$$\begin{aligned} \overline{A(n)} &= 1 \cdot A_1 + 3 \cdot \frac{1}{4} A_1 + \dots + 3^{n-1} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} A_1 \\ &= A_1 \left(1 + \frac{3}{4} + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \right) \\ &= 4A_1 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right). \\ \overline{A(\infty)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{A(n)} = 4A_1 = F_0. \end{aligned}$$

2.6 Fläche

Satz

Die Fläche $F(\infty)$ des Tetraederfraktals ist ∞ .

Beweis:

(a) Der Oktaederschwamm

In der Generation n sei die Gesamtfläche $F(n)$. Sie setzt sich zusammen aus der Fläche $J(n)$ der herausgenommenen Tetraeder, soweit sie im Innern liegen und aus einer Abdeckung auf den 8 Flächen des Startoktaeders. Nach 2.5.1 ergibt sich dann $F(n) = J(n) + \left(\frac{3}{4}\right)^n F_0 \cdot 8$.

(b) Das Tetraederfraktal

In der Generation n sei die Gesamtfläche $\overline{F(n)}$. Sie setzt sich zusammen aus der Fläche $J(n)$ und aus einer (komplementären) Abdeckung auf den 8 Flächen des Startoktaeders. Nach 2.5.2 ergibt sich dann

$$\overline{F(n)} = J(n) + \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) F_0 \cdot 8.$$

(c) Vergleich

Vergleichen wir die Ergebnisse (a) und (b), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \overline{F(n)} &= F(n) - \left(\frac{3}{4}\right)^n F_0 \cdot 8 + \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) F_0 \cdot 8 \\ &= F(n) + 8F_0 = F(12) + 8F_0 - 16 \left(\frac{3}{4}\right)^n F_0. \end{aligned}$$

Nach 1.4 gilt $F(\infty) = \infty$, also weiter $\overline{F(\infty)} = \infty$.

2.7 Dimension

Satz

Die fraktale Dimension unseres Tetraederfraktals beträgt

$$d_F = 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Beweis:

In der n -ten Generation werde das Fraktal mit Dreiecken der Fläche überdeckt. Weil die Gesamtfläche unseres Fraktals in der n -ten Generation $\overline{F(n)}$ ist, folgt

$$M_n = \frac{\overline{F(n)}}{\frac{1}{4^n} F_0} = \overline{F(n)} \cdot 4^n F_0^{-1}.$$

Für die fraktale Dimension (Kästchendimension) gilt bekanntlich:

$$d_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln M_n}{\ln \frac{2^n}{a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\overline{F(n)} 4^n F_0^{-1})}{\ln 2^n - \ln a}.$$

Mit $\overline{F(n)} = F(n) + 8F_0 - 16 \left(\frac{3}{4}\right)^n F_0$ erhalten wir weiter

$$d_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(F(n) 4^n F_0^{-1} + 8 \cdot 4^n - 16 \cdot 3^n)}{\ln 2^n - \ln a}.$$

Aus der Tabelle 1 folgt $F(n) = 8 \left(\frac{3}{2}\right)^n F_0$, also

$$d_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(8 \cdot 6^n + 8 \cdot 4^n - 16 \cdot 3^n)}{\ln 2^n - \ln a}$$

Jetzt wenden wir die Regel von Hospital an

$$\begin{aligned} d_F &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot 6^n \ln 6 + 8 \cdot 4^n \ln 4 - 16 \cdot 3^n \ln 3}{(8 \cdot 6^n + 8 \cdot 4^n - 16 \cdot 3^n) \ln 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \ln 6 + 8 \left(\frac{2}{3}\right)^n \ln 4 - 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 3}{\left(8 + 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \ln 2} \\ &= \frac{\ln 6}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Wir fassen den Abschnitt 2 in einem Satz zusammen:

Satz

Das neue Tetraederfraktal erfüllt die Bedingungen 1 bis 4, es ist "physiologisch". Die Grenzfläche ist ein reguläres Oktaeder.

Alle Ergebnisse zu unserem Flächenfraktal lassen sich sofort aus denen zum Oktaederschwamm entnehmen.

3. Schluß

Lassen sich alle regulären Polyeder als Grenzflächen physiologischer Flächenfraktale erhalten? In dem Vortrag wurde gezeigt, daß diese Frage mit "Ja" zu beantworten ist.

4. Literatur

Camp, D. (1991): A fractal excursion. – In: Mathematics Teacher, S. 265–275
 Morris, S. (1988): A fairy tale: The snowflake that became a cube – In: Omni II, S. 124–125
 Zeitler, H.; Neidhardt, W. (1993): Fraktale und Chaos. – Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft
 Zeitler, H. (1998): Tetrahedron and octahedron fractals. – In: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 29 (Nr. 3) S. 329–341

Autor

Zeitler, Herbert, Prof. Dr., Universität Bayreuth, Mathematisches Institut, D-95440 Bayreuth, Germany