Mathematisches Denken in der Linearen Algebra

Katja Lengnink, Susanne Prediger, Darmstadt

Abstract: *Mathematical Thinking in Linear Algebra.* How can first years students learn to think and act mathematically by learning Linear Algebra? We want to present an approach that considers reflection of mathematical acting and its connections to general thinking to be an important part of learning. By understanding mathematics as a specific conventionalization of general thinking, patterns of general thinking can become the starting point for learning mathematics. This points out the specific contribution that mathematics can give to describe reality. By examples of Linear Algebra, we discuss the common ground and differences between thinking in mathematics and in non-mathematical subjects. Based on this discussion, we analyse why and how these reflections can be objects of learning.

Kurzreferat: Wie können Studierende in den ersten Studiensemestern am Fachinhalt der Linearen Algebra mathematisches Denken und Handeln erlernen? Zu dieser Frage wird im Folgenden ein Ansatz vorgestellt, der die Reflexion mathematischen Handelns in Hinblick auf seine Verbindungen zu allgemeinen Denk- und Handlungsweisen als wichtigen Bestandteil des Lernens versteht. Damit soll zum einen ermöglicht werden, beim Lernen von Mathematik an allgemeine Denk- und Handlungsmuster anzuknüpfen. Zum anderen kann dadurch das Spezifische mathematischen Denkens als Beitrag zur Welterschließung verstanden werden. An den Inhalten der Linearen Algebra werden exemplarisch Gemeinsamkeiten und Unterschiede des Denkens innerhalb der Mathematik und in vertrauten außermathematischen Bereichen diskutiert, um daran anschließend zu überlegen, wieso und in welchem Rahmen dies Gegenstand des Lernens sein sollte.

ZDM-Classification: C35, C45, E20, H65

Hauptziel des Grundstudiums im Fach Mathematik ist es, sich in das mathematische Denken und Handeln einzufinden, d.h. die Studierenden sollen lernen, Mathematik zu betreiben. Diese innermathematische Sozialisation findet vorwiegend in den ersten beiden Studiensemestern statt, in denen die Fachinhalte der Linearen Algebra und der Analysis im Zentrum stehen. Um dem Lernziel "Mathematik betreiben lernen" als übergreifendes Ziel des Grundstudiums gerecht werden zu können, sind als Grundlage didaktische Analysen notwendig, die mathematisches Handeln in den Mittelpunkt stellen. Für Schul- und Hochschulmathematik ist in diesem Zusammenhang schon einiges zu den Gebieten Analysis, Geometrie und Arithmetik publiziert worden (stellvertretend seien hier Fischer 1976, Neubrand 1990a und 1990b, Hefendehl-Hebeker 1997 und Wittmann 1987 genannt). Für die Lineare Algebra, die im Allgemeinen sowohl im Lehramt- als auch im Diplomstudiengang fast die Hälfte des Stundenumfanges in den ersten beiden Semestern ausmacht, ist in der didaktischen Literatur jedoch nicht viel zu finden, das auf eine Einführung in mathematisches Handeln abzielt. Deshalb haben wir uns die Frage gestellt, welche mathematischen Denk- und Handlungsweisen am Fachinhalt der Linearen Algebra exemplarisch besonders gut gelernt werden können, wie diese beim Erlernen der Linearen Algebra helfen können und wie ein Transfer auf andere mathematische Teilgebiete und auf allgemeines Denken unterstützt werden kann. Neben dem effizienteren Lernen von Mathematik ist unser Vorhaben darauf gerichtet, durch den angestrebten Vergleich Mathematik sinnbezogener lehren und lernen zu können, was einen wichtigen Beitrag zur mathematischen Bildung leisten würde. Unsere Analysen und Ansätze für die Lehrveranstaltungen an der TU Darmstadt möchten wir in diesem Beitrag zur Diskussion stellen. Es sei betont, dass es uns dabei nicht um eine Diskussion der Linearen Algebra und ihrer Fachinhalte als Ganzes geht, sondern um den beschriebenen Teilaspekt der Denkhandlungen.

Dazu soll zunächst im ersten Abschnitt unser besonderer Fokus auf mathematische Denkhandlungen grundsätzlich erläutert werden, bevor im zweiten Abschnitt einige für die Lineare Algebra zentrale Denkhandlungen und ihre Beziehungen zum allgemeinen Denken exemplarisch analysiert werden. Der dritte Abschnitt stellt kurz methodische Ansätze vor, wie sich die Aspekte der im zweiten Abschnitt vorgestellten Analyse als Lerninhalte vermitteln lassen.

1. Mathematisches Denken und Handeln – Der Grundansatz

Die Frage, wie der Prozess des mathematisch Denken und Handeln Lernens durch die Lehre unterstützt werden kann, ist bereits vielfältig in der Mathematikdidaktik angesprochen worden. Schon Hans Freudenthal hat auf die Notwendigkeit hingewiesen, Mathematik als Tätigkeit und nicht als ein Fertigprodukt zu lehren und zu lernen (1973, S. 106–124). Das von ihm formulierte didaktische Prinzip der Nacherfindung ist heute in vielfältigen Forschungsarbeiten und praktischen Anleitungen zum Entdeckenden Lernen in der Mathematik weitergeführt worden (vgl. etwa Winter 1989, Wittmann 1991)

Doch was macht eigentlich die Tätigkeit Mathematik aus? Wie betreiben die Mathematiker ihre Wissenschaft? Wie wird mathematisches Wissen aufgebaut? Als einer der ersten hat sich Georg Polya mit diesen Fragen beschäftigt und Strategien zum Problemlösen formuliert (1949) sowie den Unterschied zwischen fertiger Mathematik und Mathematik als Tätigkeit am Beispiel des Beweisens durch das Gegensatzpaar demonstratives Schließen (Beweisen) und plausibles Schließen (Erraten) ausgeführt (1975). Sein Ansatz des Problemlösens im Mathematikunterricht ist vielfältig weitergeführt und auf der Grundlage lernpsychologischer Forschung ausgebaut worden (zur Lernpsychologie s. Lompscher 1972, spezieller für das Mathematiklernen siehe etwa Bauer 1978, Mathematik Lehren 1992 und Glatfeld 1990).

Mit diesen Ansätzen, Mathematik als Tätigkeit zu lehren und zu lernen, ist ein bestimmtes Bild von der Wissenschaft Mathematik verbunden, das Reuben Hersh als "humanistisch" bezeichnet (1997). Er versteht dabei Mathematik als eine menschliche Aktivität, d.h. von Menschen gemacht und somit als sozialkulturelles, historisches Phänomen. Dabei greift er auf eine philosophische Position zum Erwerb mathematischen Wissens zurück, die Philip Kitcher wie folgt beschreibt:

"First we originally acquire much of our mathematical knowledge from teachers, on whose authority we accept not only basic principles but also conceptions of the nature of mathematical reasoning. Second, some of this knowledge is acquired with the help of perceptions. Our early training is aided by the use of rods and beads; later we appeal to diagrams. Third, mathematics has a long history. The origins of mathematical knowledge lie in the practical activities of Egyptians and Babylonians (or, perhaps, people historically more remote)." (Kitcher 1984, S. 92)

Mathematisches Denken und Handeln beruht aus dieser Sicht auf allgemein menschlichen Grundaktivitäten, die in der Mathematik in ganz spezifischer Weise zum Wissenserwerb eingesetzt werden. Als solche praktischen Aktivitäten benennt Kitcher *Collecting, Combining, Separating, Correlating* und *Measuring.*

Das deckt sich auch mit der Auffassung der Ethnomathematik, in der u.a. analysiert wird, welche mathematischen Grundaktivitäten über kulturelle Grenzen hinweg allgemein als Grundlage mathematischen Denkens angesehen werden können (vgl. Bishop 1988). Diese Grundaktivitäten werden als überkultureller Ausgangspunkt dessen verstanden, was sich in den einzelnen Kulturen an unterschiedlichen (vor-) mathematischen Denkweisen, Begriffen und Ideen herausgebildet hat. Die westliche Mathematik wird als *eine* Ausprägung dieser Weiterentwicklungen begriffen. Der Gedanke, dass die mathematischen Vorgehensweisen sich aus diesen Grundaktivitäten auf spezifische Weise ausgeformt haben, wird von Bishop als so zentral angesehen, dass er die Forderung erhebt, das Curriculum für den Mathematikunterricht an den Grundaktivitäten zu orientieren.

Auch wir halten diese allgemeinen mathematischen Grundaktivitäten, die wir als allgemeine Denkhandlungen bezeichnen wollen, für zentral beim Erwerb mathematischen Wissens und machen dabei für die unterschiedlichen Niveaustufen des Mathematiklernens (Schule, Hochschule im Haupt- oder Nebenfach) keinen qualitativen Unterschied. Denn wie sollte man Mathematik betreiben, wenn nicht unter Rückgriff auf allgemeine Denkweisen, die einem aus anderen Zusammenhängen vertraut sind und nützlich erscheinen. Jedoch stimmen wir damit nicht uneingeschränkt der von Hans Werner Heymann formulierten Kontinuitätsannahme zu, dass das mathematische Denken eine systematische Fortschreibung des Alltagsdenkens darstelle und das Lernen desto größere Erfolgschancen habe, je weniger die Lernenden zwischen ihrem Alltagsdenken und der Mathematik eine Kluft empfinden (Heymann, 1996, S. 224).

Stattdessen soll hier ein Ansatz vorgestellt werden, wie im Lernprozess die allgemeinen Denkhandlungen, die für das Betreiben von Mathematik (hier speziell Linearer Algebra) zentral sind, aufgespürt und thematisiert werden können. Dabei soll insbesondere erlebbar werden, dass sich die für die Mathematik zentralen Denkhandlungen aus allgemeinen Denkhandlungen in ganz spezifischer Weise ausformen und konventionalisieren, sich somit also von den Denkhandlungen des Alltags oder anderen außermathematischen Bereichen unterscheiden. Gerade die Reflexion des mathematischen Tuns in seinen Gemeinsamkeiten und Unterschieden zum allgemeinen Denken und Handeln leistet u.E. einen unverzichtbaren Beitrag zur Einführung in eigenes mathematisches Denken und Handeln bei den Lernenden. Eine sicherlich nicht vollständige Liste solcher Denkhandlungen ist in der Tabelle auf der nächsten Seite mit Beispielen angeführt. Dabei geht es uns nicht um eine trennscharfe und vollständige Klassifikation, sondern darum, zur Illustration des hier Diskutierten ein mögliches Spektrum aufzuzeigen, wie es etwa in unserer Veranstaltung zum Tragen kam.

Viele Vertreter der Mathematikdidaktik haben bereits für die Schule betont, wie wichtig es ist, mathematisches Handeln an alltägliche Denkformen und Handlungsweisen anzubinden (s. z.B. Heymann 1996, Winter 1972, Schweiger 1982). Eine solche Anbindung ist auch für die Hochschule interessant, denn unter Rückgriff auf alltägliche Denkhandlungen kann die Mathematik besser lernbar gemacht werden: Ist man sich beim Lernen der Unterschiede und Gemeinsamkeiten der eigenen inner- und außermathematischen Vorgehensweisen bewusst, so wird auf dieser Grundlage ein gezielterer Umgang mit mathematischen Begriffen und Denkweisen möglich. Die Bedeutung der dazu notwendigen Metakognition ist von verschiedenen Autoren immer wieder hervorgehoben worden (vgl. Sjuts 1999, S. 42–44)

Darüber hinaus kann durch eine Anbindung des mathematischen Handelns an allgemeine Denk- und Vorgehensweisen im Lernprozess erfahrbar gemacht werden, wie mathematische Denk- und Handlungsweisen in lebensweltlichen Zusammenhängen fruchtbar gemacht werden können. Damit wird der grundlegenden Forderung Heymanns an einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht Rechnung getragen, die Schüler sollen erfahren können, "daß und wie sich Mathematik als 'Verstärker' ihres Alltagsdenkens einsetzen läßt" (Heymann 1996, S. 206).

Eine solche Erfahrung kann dazu beitragen, daß die Lernenden die zu erwerbenden Kompetenzen als subjektive Bereicherung empfinden und sich die Denkweisen wirklich zu eigen machen. Dadurch kann Mathematiklernen über das Fach hinaus zur Persönlichkeitsbildung beitragen.

Ein Transfer von mathematischen Denk- und Handlungsweisen auf andere Wissensgebiete findet jedoch keineswegs von selbst statt, sondern er muss explizit Gegenstand des Lernens sein (zum Transferproblem s. etwa Lenné 1975, S. 114–154). Deshalb hat Heymann die Bedeutung einer systematischen Vernetzung zwischen Mathematik und allgemeinem Denken für die Ausbildung einer Transferfähigkeit deutlich hervorgehoben:

"Wenn es um einen Brückenschlag zwischen mathematischem und alltäglichem Denken geht, muß dieser Brückenschlag in der Vernetzung der thematisierten Inhalte bereits angelegt sein. Daher ist eine Mathematik, die sich – von den Schülern aus gesehen – mit ihrem übrigen Leben verbinden läßt, für die Entwicklung einer allgemeinen Denkfähigkeit vielversprechender als solche, die hauptsächlich aus innermathematischen Gründen interessant ist." (Heymann 1996, S. 241)

Zentrale Denkhandlungen in der Linearen Algebra und ihre Beziehung zum allgemeinen Denken (Beispiele)

- **Formalisieren und Automatisieren:** Standardisierung von Beschreibungen
  - Mit Hilfe der formalen Sprache der Mathematik; dadurch werden Situationen besser kommunizierbar, Symbole können interpretationsfrei gebraucht und automatisierbar weiter verarbeitet werden
  - Beispiel: Beschreiben von Listen und Tabellen durch Matrizen; darauf basierend können lineare Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Algorithmus bearbeitet werden
  - Mit Hilfe konventionalisierter Sprachmittel aus dem Alltag; dadurch werden Situationen besser kommunizierbar und Handlungsanweisungen klarer, wobei stets Spielräume für Interpretationen bleiben
  - Beispiele: Schrittnotationen beim Tanzen, um Choreographien festzuhalten oder ohne Lehrperson einen Tanz erlernen zu können; besonders ausgefeilt ist die Notensprache der Musik

- **Vergleichen und Zusammenfassen:** Sortieren von Einzelfällen nach Ähnlichkeit und Abstrahieren vom Einzelfall durch Vergröbern mit dem Ziel der Komplexitätsbewältigung
  - Formalisieren von Vergleichbarkeit durch (transitive und symmetrische) Äquivalenzrelationen; Zusammenfassen von Objekten zu Äquivalenzklassen, die aufgrund der Definition der Äquivalenzrelation stets disjunkt werden
  - Beispiel: Ähnlichkeit von Matrizen: zueinander ähnliche Matrizen werden als verschiedene Darstellungen derselben linearen Abbildung gedacht; beim Vergröbern wird die Wahl guter Repräsentanten für die Klassen entscheidend, z.B. Jordan-Normalform
  - Vergleichbarkeit bzw. Ähnlichkeit ist weder notwendig transitiv noch symmetrisch (s. Teil 2); zusammengefasste Klassen somit auch nicht unbedingt disjunkt
  - Beispiele: Vergleichen in Bezug auf bestimmte Merkmale, z.B. die Ähnlichkeit innerhalb einer Familie; Zusammenfassen bei Begriffsbildungen im Alltag, Krankheitsbilder in der Medizin; beim Vergröbern werden oft Prototypen zum Verdeutlichen der in den einzelnen Klassen zusammengefassten Objekte angeführt

- **Ordnen und Klassifizieren:** Verschaffen eines Überblicks zum Strukturieren von Wissensbereichen im Sinne einer Theoriebildung
  - Ordnen nach dem Grundprinzip der formalen Herleitbarkeit bei mathematischer Theoriebildung allgemein; Ordnen nach anderen Kriterien, etwa dem Prinzip der Erzeugbarkeit in der Linearen Algebra
  - Beispiel: Ordnungsprinzip der Erzeugbarkeit beim Dreispiegelungssatz zur Klassifizierung der Bewegungen der Ebene
  - Ordnen auf der Basis vielfältiger Prinzipien, die eng mit dem Zweck der angestrebten Klassifikation zusammenhängen
  - Beispiele: Verwandschaftsgrad als Ordnungsprinzip der biologischen Taxonomie zum Schließen auf mögliche Abstammungsbäume; Typisierungen in der Medizin und in der Psychologie in Bezug auf vergleichbare Behandlungsstrategien

- **Analysieren und Charakterisieren:** Erfassen von Situationen mit möglichst wenigen und gut messbaren Beschreibungsmerkmalen zum Treffen von Aussagen/Prognosen
  - Suche nach Merkmalen, die die untersuchte Eigenschaft bzw. den untersuchten Sachverhalt implizieren und im Fall des Charakterisierens sogar äquivalent beschreiben; Suche nach Beschreibungsinvarianten
  - Beispiele: Symmetrie einer Matrix impliziert Diagonalisierbarkeit; Diagonalisierbarkeit ist äquivalent zur Gleichheit von algebraischer und geometrischer Vielfachheit der Eigenwerte; Determinante, Spur und Rang einer Matrix sind invariant unter Ähnlichkeitstransformationen; Längentreue unitärer Abbildungen
  - Suche nach möglichst einfachen, gut feststellbaren charakteristischen Merkmalen zur Beschreibung von Situationen, meist in Verbindung mit dem Wunsch, die Situation mit anderen vergleichen und daraus Prognosen ableiten zu können; vollständige Charakterisierung oft nicht möglich
  - Beispiele: biologische Bestimmungsbücher arbeiten mit charakterisierenden Merkmalen für Arten; in der Medizin entwickelte Tests als Indikatoren für bestimmte Krankheiten; Marktanalysen mithilfe von wirtschaftswissenschaftlichen Kenngrößen; Risikoparameter z.B. bei der Einstufung von Fahrzeugen in Versicherungsprämienklassen

- **Erzeugen und Aussondern:** Suche nach effektiven Beschreibungsweisen, zum einen durch erzeugende Grundbausteine, zum anderen durch Aussonderungskriterien
  - Erzeugungsprozess kann durch algebraische Erzeugungsoperationen genau beschrieben werden; Übergang vom Beschreiben durch Aussondern zum Beschreiben durch Erzeugen z.B. beim Lösen von Linearen Gleichungssystemen
  - Beispiele: Erzeugen aller Elemente eines Vektorraums aus Basiselementen; Basissatz für lineare Abbildungen (ermöglicht Matrizendarstellung); Beschreiben von Mengen durch das Angeben von Aussonderungsbedingungen
  - Erzeugungsprozess hat nicht-formalisierbare Anteile die meist mit Kreativität zu tun haben; Beschreibungswechsel wichtiges Prinzip, wenn auch weniger zwischen Erzeugen und Aussondern
  - Beispiele: Erzeugen von Abfahrtszeiten im Busfahrplan; Erzeugen einer Tanzfigur aus den Teilschrittfolgen beim Tanzen; Bauen eines Hauses aus Steinen. Aussondern beim Begriffebilden: Menge von Gegenständen wird durch Merkmale beschrieben; Beschreibungswechsel z.B. zwischen Büchertiteln und ISBN-Nummern

- **Verallgemeinern und Konkretisieren:** Suche nach allgemeineren Prinzipien, um Spezielles besser verstehen und einordnen zu können; Konkretisieren, um Allgemeines am Beispiel klarzumachen
  - Beim Verallgemeinern werden Einzelfälle auf allgemeine Gesetzmäßigkeiten hin untersucht, um übergreifende Sätze zu gewinnen; diese müssen im Beweis deduktiv gesichert werden; Konkretisieren durch Betrachten von Spezialfällen, für die Aussagen aus dem allgemeinen Fall abgeleitet werden können, d.h. im Sinne des Spezialisierens
  - Beispiele: Diagonalisierbarkeit von Matrizen für den Spezialfall n verschiedener Eigenwerte wird auf den allgemeinen Fall der Gleichheit von algebraischer und geometrischer Vielfachheit der Eigenwerte verallgemeinert
  - Beim Verallgemeinern werden Einzelfälle auf allgemeine Prinzipien untersucht, um übergeordnete Aussagen zu gewinnen; der Prozess muss im Sinne der Validität und Repräsentativität abgesichert werden; Konkretisieren durch das Angeben von Beispielen, die diese allgemeinen Prinzipien verdeutlichen können
  - Beispiele: Jegliches Generalisieren von Erfahrungen; Verallgemeinern von Handlungsprinzipien in der Medizin, um für den Spezialfall zu einer Behandlungsstrategie zu kommen; Verfahren zur Ermittlung der Einschaltquoten beim Fernsehen, Wahlprognosen, statistische Untersuchungen; Konkretisieren allgemeiner Aussagen der Politik an spezifischen Lebenssituationen von Personen (z.B. Familien mit Kindern werden steuerlich entlastet)

Will man dem in der Didaktik immer wieder betonten Transferproblem innermathematischer Denkweisen und Handlungen auf andere mathematische und außermathematische Sachzusammenhänge Rechnung tragen, so ist es von entscheidender Bedeutung, nicht nur ein Know How bei den Lernenden zu fördern, sondern auch insbesondere ein reflektorisches Wissen über die Fragen und die möglichen Antworten sowohl innerhalb der Mathematik als auch in Bezug auf ihre Anwendbarkeit auf lebensweltliche Probleme anzustreben. Mit dieser Forderung nach Reflexion des mathematischen Tuns im Lernprozess schließen wir uns Michael Neubrand an, der betont, dass ein Aufbau eines angemessenen Mathematikbildes, und das trifft auch auf den Erwerb einer mathematischen Handlungsfähigkeit zu, nur dann erreicht werden kann," wenn im Unterricht explizit über Mathematik reflektierend gesprochen wird" (Neubrand 1990b, S. 66). Ein bloßes Abarbeiten mathematischer Fachinhalte, wie es an der Hochschule häufig anzutreffen ist, reicht jedenfalls nicht aus.

Um einer Reflexion mathematischen Handelns im Lernprozess Raum zu geben, fordert Neubrand eine stärkere Betonung des "Sprechens über Mathematik". Da sich ein solches Sprechen über Mathematik auf sehr unterschiedlichen Ebenen abspielen kann, hat er diese Ebenen genauer spezifiziert und damit einen Überblick geschaffen über verschiedene, ineinandergreifende Reflexionsniveaus und deren mögliche Fragestellungen:

"– Wissenschaftstheoretische Ebene
  – Wesen, Eigenart, Typen (mathematischen) Wissens
  – Vorstellungen über die Entstehung der Wissenschaft
  – usw.
– Ebene des Hinterfragens mathematischen Arbeitens
  – Ist ein Problem 'zufriedenstellend' gelöst?
  – Was ist ein Beweis?
  – Akzeptanz von Beweisen
  – Leistet eine Definition das, was sie soll?
  – Beziehungen zwischen Definitionen und Beweisen
  – Spannungsverhältnis zwischen abstrakt und konkret
    – Verständnis und Rolle mathematischer Modelle für Anwendungssituationen
    – usw.
– Ebene des 'bewußten Handwerkens'
  – Gezielter Einsatz heuristischer Strategien
  – Beweistechniken
    – Spannungsverhältnis zwischen mathematischem Schließen und Alltagsdenken
    – Bewußter und vernünftiger Gebrauch von Plausibilitätsüberlegungen
  – usw.
– Ebene des Wissens über mathematische Gegenstände (Objektebene)
  – Konventionen, Resultate, Fakten, etc.
  – In sich abgeschlossene Theorien
  – Ist ein Beweis korrekt?
  – usw." (Neubrand 1990b, S. 66)

Dabei kann "die jeweils oberhalb stehende Ebene als eine Plattform für Reflexionen über die Inhalte der unterhalb stehenden Ebene" (Neubrand 1990b, S. 67) betrachtet werden. So wird etwa auf der Ebene des "bewußten Handwerkens" über die Hilfsmittel gesprochen, die es gestatten, Probleme innerhalb des Objektbereiches anzugehen. Umgekehrt muss die unterste Ebene den konkreten Stoff für die Auseinandersetzung mit den verschiedenen handwerklichen Methoden liefern.

Ein Großteil der Veranstaltungen zur Hochschulmathematik geht im Allgemeinen über die Ebene des Wissens über mathematische Gegenstände, also über die explizite Vermittlung von Definitionen, Sätzen und Beweisen nicht hinaus (unsere diesbezüglichen eigenen Erfahrungen scheinen zumindest nach Sichtung der gängigen Lehrbücher verallgemeinerbar). Im Gegensatz zum Mathematikunterricht an den Schulen, in dem oft zumindest gewisse Techniken und Vorgehensweisen thematisiert werden, wird schon die Ebene des "bewußten Handwerkens", also etwa der gezielte Einsatz heuristischer Strategien oder Beweistechniken, in den Grundvorlesungen selten angesprochen. Stattdessen werden gängige Vorgehensweisen der Mathematiker allenfalls implizit durch Vormachen und Nachahmen vermittelt. Die beiden oberen Reflexionsebenen werden fast nie erreicht.

Dagegen ist die Thematisierung der Denkhandlungen, wie sie in der von uns betreuten Linearen Algebra versucht wurde, im Wesentlichen auf den beiden mittleren Ebenen anzusiedeln. Basierend auf Faktenwissen, bewegt sie sich vor allem auf der Ebene des "bewußten Handwerkens", wobei sie insbesondere den Punkt "Spannungsverhältnis zwischen mathematischem Schließen und Alltagsdenken" auf das Spannungsverhältnis zwischen mathematischem Denken und Alltagsdenken allgemein erweitert. Eine solche Reflexion hilft dabei zu klären, wie sich allgemeine Denkhandlungen in der Mathematik ausformen und ermöglicht somit, die "mathematische Brille" besser zu verstehen, durch die wir die Welt im Rahmen von mathematischen Modellbildungen anschauen. Sie leistet so auch einen wichtigen Beitrag auf der Ebene des "Hinterfragens mathematischen Arbeitens". Von dort ist ein Ausblick auf die "wissenschaftstheoretische Ebene" möglich, der das Wesen mathematischen Denkens, seine Wirkungen in lebensweltlichen Handlungszusammenhängen sowie die Ziele und Geltungsansprüche mathematischen Tuns zum Thema hat. Für all dies ist es selbstverständlich notwendig, ein solides Wissen über mathematische Gegenstände als Grundlage der Reflexion zu haben. Andererseits hilft u.E. die Reflexion der oberen Ebenen auch beim ganz konkreten Wissenserwerb, da sie den notwendigen Orientierungsrahmen zur Strukturierung des Wissens liefert.

Schon durch diese erste Einordnung wird deutlich, dass wir für unseren Ansatz auf den einzelnen Ebenen andere Schwerpunkte setzen wollen, wobei insbesondere die bei Neubrand nur in einzelnen Punkten auftauchende Beziehung zwischen Mathematik und Welt auf allen Ebenen stärker in den Mittelpunkt rückt. Damit kommt die im Rahmen mathematischer Bildung zentrale Frage nach Sinn und Bedeutung der Mathematik stärker in den Blick. Mit einer solchen Verschiebung liefert die Einteilung jedoch ein für uns sehr instruktives Raster.

Ergänzt werden müssen die Neubrandschen Ebenen aus unserer Sicht um eine weitere Dimension, die Bauer als Selbstreflexion bezeichnet: die Reflexion über die Bedeutung des Gegenstandes Mathematik für die eigene Person (1988, S. 247–248). Dabei ist Reflexion für ihn allgemein die "Zurückwendung des Denkens auf das Gedachte oder das Denken selbst" (S. 213). Mit Selbstreflexion meint er, dass die Lernenden nicht nur den Gegenstand begreifen, sondern auch sich selbst in ihrem Gegenstandsbezug:

"In der Gegenstandsreflexion verschafft sich der Schüler Klarheit über die Struktur des Gegenstands und über seine objektive Bedeutsamkeit. In der Selbstreflexion über eigene Fähigkeiten im Umgang mit dem Gegenstand, über Motive, deretwegen er sich mit ihm beschäftigt, über Orientierungen, welche die Beschäftigung mit dem Gegenstand für das eigene Handeln in der Gesellschaft vermittelt." (Bauer 1988, S. 247)

Um die Selbstreflexion der Lernenden anzuregen und zu unterstützen, soll die Lehrperson versuchen, die Mathematik im Unterricht so zu präsentieren, dass sie für die Lernenden von subjektiver Relevanz ist:

"Der Schüler muß positive Wirkungen seines Handelns im Mathematikunterricht sehen bzw. spüren. Der Lehrer muß dem Schüler dabei helfen, mathematische Aktivitäten und Leistungen als potentiell eigene Fähigkeiten zu erkennen und in mathematischen Begriffen und Verfahren eigene Denkansätze und Denkmuster wiederzuentdecken." (Bauer 1988, S. 247)

Bauers Argumentation, die Lernenden können die Bedeutung der Mathematik für sich selbst dann besser erfahren, wenn sie die eigenen Denkmuster und Denkansätze in den mathematischen Verfahren wiederfinden, ist ein weiterer gewichtiger Grund für den Ansatz, die mathematischen Denkhandlungen als spezifische Ausformung allgemeiner Denkhandlungen zu thematisieren. Hierdurch können die Lernenden erfahren, wieweit Analogien zwischen ihrem Denken in allgemein lebensweltlichen Bereichen und mathematischem Denken bestehen und wie sie dies beim mathematischen Handeln fruchtbar machen können, wie sie aber andererseits auch die Mathematik zur Lösung lebensweltlicher Probleme heranziehen können. Dadurch können die mathematischen Denkweisen als sinnvolle Kompetenzen erfahren werden, die für die Lernenden eine subjektive Bereicherung darstellen.

2. Mathematische Denkhandlungen in der Linearen Algebra – Exemplarische Analysen

Die Reflexion mathematischer Denkhandlungen ist, wie oben ausgeführt wurde, u.E. zentral für den Erwerb mathematischer Handlungsfähigkeit. Um mathematische Denkhandlungen auf den unterschiedlichen Ebenen im Lernprozess thematisieren zu können, muss zunächst sorgfältig analysiert werden, wie sie untereinander und mit allgemeinen Denkhandlungen in Beziehung stehen, d.h. was von dem allgemeinen Denken in der Mathematik konventionalisiert wird und wie sich aber andererseits mathematisches Denken vom Denken außerhalb der Mathematik unterscheidet. Da die Lineare Algebra in mathematisches Denken und Handeln einführen soll, werden hier exemplarisch einige in der Linearen Algebra zentrale Denkhandlungen untersucht, wobei wir mit den drei Denkhandlungen Vergleichen, Zusammenfassen und Vergröbern beginnen. Wie die hier vorgestellte Analyse, die sich zunächst an die Lehrenden richtet, zum Inhalt des Lernens werden kann, werden wir im darauffolgenden Abschnitt diskutieren.

2.1 Vergleichen, Zusammenfassen und Vergröbern

Grundlegende Denkhandlungen, sowohl in der Mathematik als auch außerhalb, sind das *Vergleichen* und *Zusammenfassen* von Objekten nach gewissen Ähnlichkeitsmerkmalen. So vergleicht man etwa im Alltag Menschen hinsichtlich ihres Alters und betrachtet sie als bzgl. ihres Alters *gleichwertig,* wenn sie gleichaltrig sind. Sie können dann in einer Altersgruppe zusammengefasst werden. Durch solches Vergleichen und Zusammenfassen kann man unübersichtliche Mengen für bestimmte Zwecke ordnen und sich so einen besseren Überblick über die Gegenstände verschaffen.

Um solche Beziehungen der Gleichwertigkeit mit Hilfe der Mengensprache mathematisch fassen zu können, definiert man den Begriff der Äquivalenzrelation als Relation (d.h. als Teilmenge der Menge aller Paare), die die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität erfüllt. Die folgenden grundlegenden Beispiele spielen im Aufbau der linearen Algebra eine wichtige Rolle:

- Eine wichtige Gruppe von Äquivalenzrelationen hat man auf den natürlichen Zahlen durch die Bedingung "bildet bei Division durch n denselben Rest". Man definiert also
$$R_n := \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x - y \text{ ist durch } n \text{ teilbar}\}.$$
- Matrizen, die sich durch Basistransformation ineinander überführen lassen, heißen ähnlich.
- Ausgehend von einem Untervektorraum U (z.B. einer Ebene U durch den Ursprung im $\mathbb{R}^3$) werden jeweils diejenigen Elemente des Vektorraumes V als äquivalent bzgl. U bezeichnet, die in einem zu U parallelen affinen Teilraum (d.h. in einer zu U parallelen Ebene) liegen.
- Beschreibt man Bewegungen der Ebene mit Hilfe von Matrizen durch Zuordnungsvorschriften der Form $x \to Ax + t$, wobei A eine orthogonale 2×2-Matrix mit Determinante 1 und $x, t \in \mathbb{R}^2$ sind, so kann man zwei Bewegungen als äquivalent bezeichnen, wenn sie bzgl. derselben Basis durch die gleiche Matrix A beschrieben werden.

Die Denkhandlung des Vergleichens wird durch das *in Relation setzen formalisiert,* wobei aufgrund des mengensprachlichen Ansatzes die eigentlichen Merkmale, bzgl. derer man vergleicht, oft in den Hintergrund treten und nur noch die Paare von Objekten angegeben werden, die in Relation stehen. Dadurch wird die Möglichkeit des Vergleichens bzgl. Ähnlichkeitsmerkmalen innermathematisch rein extensional, wodurch man sich vom allgemeinen Denken löst.

Weitere einschränkende Veränderungen ergeben sich beim Mathematisieren der allgemeinen Denkhandlung Vergleichen durch die geforderten Eigenschaften einer Äquivalenzrelation: Durch die Forderung von Symmetrie und Transitivität wird die Mathematisierung von Ähnlichkeiten erheblich eingeschränkt, denn wie Tversky auf der Grundlage psychologischer Untersuchungen festhält, sind die Ähnlichkeitsurteile der Menschen im Allgemeinen weder symmetrisch noch transitiv. Dies lässt sich an einfachen Beispielen deutlich machen, so betont Tversky etwa im Hinblick auf die Symmetrie: “We say, ‘an ellipse is like a circle’, not ‘a circle is like an ellipse’.” (Tversky 1977, S. 328).

Die genauere Analyse solcher Unterschiede zwischen dem Vergleichen nach Ähnlichkeiten im Allgemeinen Denken und der mathematischen Definition von Äquivalenzrelationen im Lernprozess eröffnet den Lernenden einen Einblick in die spezifische Formalisierung allgemeiner Denkhandlungen in der Mathematik: Aus der allgemeinen Denkhandlung des *hinsichtlich Ähnlichkeiten Vergleichens* wird der (wenig prozesshafte) Begriff *Äquivalenzrelation.* (Zwar gibt es auch andere Formalisierungen von Ähnlichkeit, vgl. dazu Lengnink 1996, doch ist die Äquivalenzrelation – neben dem hier nicht gemeinten Ähnlichkeitsbegriff der Geometrie – die innermathematisch geläufigste.) Der spezifischen Ausformung dieser allgemeinen Denkhandlung in der Mathematik liegt, wie oben sichtbar wurde, eine sehr eingeschränkte Konzeption zugrunde. Dies im Lernprozess erfahrbar machen, heißt, exemplarisch eine Reflexion über das Spannungsverhältnis zwischen Alltagsdenken und mathematischem Denken anzustoßen, was auf der Neubrandschen Ebene des “bewußten Handwerkens” anzusiedeln ist. Hierdurch kann einerseits die Definition der Äquivalenzrelation besser gelernt werden, indem das Lernen an allgemeine Denk- und Handlungsmuster anschließt, somit wird der Wissenserwerb auf der “Objektebene” unterstützt. Andererseits wird die Möglichkeit eröffnet, die Spezifität der Formalisierung von Vergleichbarkeit durch den mathematischen Begriff der Äquivalenzrelation zu erfassen. Dadurch ergibt sich eine Gelegenheit, über die Rolle von Mathematisierungen in Anwendungssituationen nachzudenken. Dies fordert Reflexionen auf der Ebene des “Hinterfragens mathematischen Arbeitens” heraus.

Diese Überlegungen liefern das konkrete Material für die allgemeine Einsicht, dass Denkhandlungen in der Mathematik spezifische Ausformungen allgemeiner Denkhandlungen sind. Als solche ermöglichen sie eine mathematische Beschreibung von Ausschnitten der Welt, wie sie für die jeweilig vorliegende Problemstellung angemessen ist. Mit dieser Einsicht begibt man sich auf die wissenschaftstheoretische Ebene und kann thematisieren, was das Wesen des mathematischen Denkens und das Spezifische am mathematischen Blick auf die Welt ausmacht.

Innerhalb der mathematischen Theorie erweist sich die Definition der Äquivalenzrelation als zweckmäßig, was dann offenbar wird, wenn man die in Relation gesetzten Objekte *zusammenfasst:* Nur durch die geforderten Eigenschaften der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität bilden die Äquivalenzklassen eine Klasseneinteilung auf der vorgegebenen Menge, d.h. jedes Element gehört zu genau einer Klasse. Einige der Beispiele von oben seien hier wieder aufgegriffen:

– In jeder Äquivalenzklasse ähnlicher Matrizen sind genau diejenigen Matrizen zusammengefasst, die bzgl. einer geeigneten Basis die gleiche lineare Abbildung beschreiben.
– Die Menge der Translationen bilden bzgl. der oben beschriebenen Äquivalenzrelation auf den Bewegungen eine Äquivalenzklasse; allgemein gehören zur Äquivalenzklasse jeder Bewegung φ genau diejenigen Bewegungen, die sich von φ nur durch den Translationsanteil unterscheiden.

Somit lässt sich die Menge hinsichtlich einer gegebenen Äquivalenzrelation außerordentlich gut ordnen, d.h. man erhält durch das Zusammenfassen eine sehr übersichtliche Struktur. Es folgt, dass man bzgl. jeder Äquivalenzrelation eine Klasseneinteilung erhält und umgekehrt zu jeder Klasseneinteilung eine entsprechende Äquivalenzrelation definieren kann. Im Lernprozess kann hieran exemplarisch erfahren werden, wie mathematische Begriffe so definiert werden, dass sie im Rahmen der Theoriebildung leisten, was sie sollen (vgl. Neubrand 1990b, S. 66), Definitionen also als Teilstücke einer Theorie zueinander “passen” müssen. Deutlich wird aber auch, dass dieses innermathematische “Passen” Brüche zum alltäglichen Denken mit sich bringt.

Erst auf der Grundlage dieser Mathematisierung von Vergleichbarkeit kann eine dritte, für die Mathematik sehr wichtige Denkhandlung, die des Vergröberns (mathematisch: Faktorisierens) in dem Theorierahmen sinnvoll aktiviert werden. Ihr allgemeiner Nutzen soll an folgendem außermathematischem Problem verdeutlicht werden:

Bei der Organisation des Übungsbetriebes an der Universität sind die Mitarbeiterinnen vor die Aufgabe gestellt, geeignete Übungstermine zu finden. Da sie nicht jeden einzelnen Studierenden nach seinem Stundenplan befragen können, betrachten sie stattdessen nur die verschiedenen Fächergruppen: Diplom-Mathematiker, Informatiker, Lehramtler etc. Unter der Annahme, dass alle Mitglieder einer Fächergruppe denselben Stundenplan haben, reicht es aus, die Übungstermine nach den Stundenplänen der Fächergruppen auszurichten. Sie machen sich also die Klasseneinteilung nach Fächergruppen zunutze und betrachten statt der einzelnen Elemente einer Klasse (i.e. den Studierenden) nur noch die Klassen (die Fächergruppen) selbst. Dann können die Klassen selbst als Elemente einer neuen Menge aufgefasst werden, nämlich der Menge mit den Elementen “die Informatiker”, “die Lehramtler” etc. Nun sind also nur noch wenige Stundenpläne zu berücksichtigen.

Durch den hier beschriebenen Übergang zur so genannten Faktormenge vergröbert man also die Sichtweise auf die Menge, indem die zu Klassen zusammengefassten Elemente als eine Einheit betrachtet werden. Dies ist nur dann möglich, wenn die Zusammenfassung der Elemente tatsächlich eine Klasseneinteilung bildet. In unserem Beispiel würde es etwa Schwierigkeiten geben, falls Studenten aus einem nicht beachteten Fach ebenfalls an den Übungen teilnehmen wollen oder Studierende in zwei Studiengängen eingeschrieben sind. Liegt also keine Klasseneinteilung zugrunde, in der jedes Element der Menge zu genau einer Klasse gehört, so kann man nicht entsprechend vergröbern. Auch hieran lässt sich das Prinzip des “Passens” von Definitionen diskutieren.

In der Linearen Algebra wird die Denkhandlung des Vergröberns durch das Bilden von Faktormengen formalisiert. Folgende Faktorisierungen sind hier von Relevanz:

– In der Zahlentheorie wird häufig durch Restklassenbildung vergröbert, d.h. zu den Faktormengen $\mathbb{N}/R_n$ übergegangen. Die Faktorisierung nach R_2 entspricht dann genau dem Vergröbern der Menge der natürlichen

Zahlen auf die Menge der geraden und die der ungeraden Zahlen. Sie ermöglicht Aussagen wie "Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist eine gerade Zahl".

– Ein vertrautes Beispiel für die Faktorisierung der natürlichen Zahlen nach der Äquivalenzrelation R_{12} ist die Uhr mit ihren zwölf Stundenzahlen.
– Faktorisiert man den Vektorraum V nach der durch U definierten Äquivalenzrelation (s.o.), so entsteht eine Faktormenge der Dimension $\dim V - \dim U$, in dem speziellen Beispiel lässt sich die Faktormenge etwa als eine zur Ebene U orthogonale Gerade auffassen, dann repräsentiert jeder Punkt P der Gerade die zu U parallele Ebene durch P.
– Da sich äquivalente Bewegungen nur durch den Translationsanteil unterscheiden, bilden die Abbildungen der Form $x \to Ax$ mit orthogonalen 2×2-Matrizen A ein Repräsentantensystem für die Faktormenge.

Wie die Beispiele bereits andeuten, wird die Denkhandlung des Vergröberns in der Mathematik in zwei Richtungen weiter ausgeformt: Zum einen möchte man in Strukturen, in denen es Verknüpfungsoperationen gibt, auch mit den Klassen operieren, wozu man repräsentantenunabhängig rechnen können muss. Zum anderen stellt sich die Frage nach "guten" Repräsentanten für die einzelnen Äquivalenzklassen, also geeigneten Normalformen. Beides soll im Folgenden weiter erläutert werden.

Die *Frage nach den Normalformen* stellt sich bei den Ähnlichkeitsklassen von Matrizen besonders deutlich, denn sie zielt auf eine der Grundfragen der Linearen Algebra, wie man lineare Abbildungen "gut" durch Matrizen beschreiben kann. Eine allgemeine Antwort für $n \times n$-Matrizen wird durch den zentralen Satz über die Jordan-Normalformen gegeben; für die Teilmenge der diagonalisierbaren Matrizen hat man mit den Diagonalmatrizen eine noch speziellere Normalform, die sich an Einfachheit nicht übertreffen lässt.

Allgemein erklärt die Brockhaus Enzyklopädie den Begriff der Normalform in der Mathematik als "diejenige Art der Darstellung eines mathematischen Gegenstandes, die am übersichtlichsten, d.h. für die Behandlung des gerade vorliegenden Problems am geeignetsten ist". Dabei spielt also das Kriterium der Angemessenheit für einen bestimmten Zweck eine große Rolle, so dass für unterschiedliche Zwecke auch unterschiedliche Normalformen zum Tragen kommen können. So wird etwa bei reellen Matrizen mit komplexen Eigenwerten zuweilen eine zwar kompliziertere, aber reelle Normalform der Jordan-Normalform vorgezogen.

Der Übergang zur Normalform (falls sie existiert) eignet sich auch zur Klärung des so genannten Wortproblems, also zur Klärung der Frage, ob zwei Elemente der Menge bzgl. der gegebenen Äquivalenzrelation zu einer Klasse gehören. Im Falle der diagonalisierbaren Matrizen lässt sich dies etwa durch Bestimmung der Eigenwerte feststellen.

Für diesen Zweck der Klassenzuteilung ist die Suche nach Normalformen auch in außermathematischen Bereichen von Relevanz. Den Normalformen entsprechen hier meist eher Prototypen als möglichst "typische" Repräsentanten ihrer Klasse. Das Ausmachen von Prototypen ermöglicht es, die Klassenzuteilung aller anderen Objekte durch Mustererkennnung durchzuführen. So werden etwa in der Medizin die neuen Krankheitsfälle durch Vergleich mit prototypischen Fällen eingeordnet. Selten lassen sich allerdings die Kriterien für geeignete Prototypen so präzise angeben wie innerhalb der Mathematik.

Über diese Analogie lässt sich das innermathematische Anliegen der Suche nach Normalformen besser lernbar machen, da durch das Anknüpfen an das allgemeine Denken ein übergreifender Orientierungsrahmen für das Vorgehen in der Mathematik bereitgestellt wird.

Noch spezifischer innermathematisch ist das Bestreben, mit den Äquivalenzklassen repräsentantenweise operieren zu können, wo immer die Ausgangsmenge mit Operationen ausgestattet ist. Dazu schränkt man für jede mathematische Struktur den Begriff der Äquivalenzrelation derart auf so genannte Kongruenzrelationen ein, dass das Zusammenfassen und Vergröbern mit dem Operieren verträglich ist. Dann kann mit den Elementen der Klassen repräsentantenunabhängig gerechnet werden.

Auch außerhalb der Mathematik gibt es Äquivalenzklassenbildungen, die bzgl. weiterer Beziehungen verträglich sein sollen. So macht etwa eine Einteilung der Gesellschaft in Interessengruppen bzgl. eines Sachzusammenhangs nur dann einen Sinn, wenn man davon ausgehen kann, dass die einzelnen Interessengruppen nach außen jeweils weitgehend homogen agieren. Nur dann können etwa Tarifkonflikte von den Gruppenvertretungen ausgetragen werden. Bei wachsender Heterogenität wird dies, wie man heute sehen kann, deutlich in Frage gestellt. Das homogene Agieren zwischen den Gruppen entspricht hier der Verträglichkeit der induzierten Verknüpfung.

Innermathematisch ist die Idee der Verträglichkeit in dem Begriff der Kongruenzrelation in sehr spezifischer Weise ausgeformt, um sie einer strukturellen Behandlung besser zugänglich zu machen.

Vergleichen, Zusammenfassen und Vergröbern sind für die Mathematik wichtige Denkhandlungen, die an vielen Stellen innerhalb und außerhalb der mathematischen Theorie wieder aktiviert werden. Ähnlichen Stellenwert haben etwa das Klassifizieren, Ordnen, Verallgemeinern und Spezialisieren, die hier lediglich benannt, aber nicht näher betrachtet werden sollen (vgl. dazu Lengnink/Peschek 1997, Winter 1972). Die beiden im Folgenden diskutierten Denkhandlungen, Erzeugen und Aussondern, haben für die Lineare Algebra noch fundamentalere Bedeutung, denn sie können als grundsätzliche Denkmuster der Linearen Algebra verstanden werden und sollten daher im Lernprozess besonders transparent gemacht werden.

2.2 Erzeugen und Aussondern

Folgt man Rudolf Willes Grundthese, dass die Bedeutung der (Linearen) Algebra darin liegt, "daß sie als Sprache 'gute' Beschreibungen von Gegebenheiten unserer technisch-wissenschaftlichen Welt ermöglicht" (Wille 1981, S. 108), so lassen sich große Teile der Linearen Algebra auf die zwei Beschreibungsarten des Erzeugens und Aussonderns zurückführen.

Grundsätzlich steht bei Beschreibungen mit mathematischen Mitteln durch die mengensprachliche Grundlegung der modernen Mathematik die Frage nach "guten" Beschreibungen *für Mengen* im Vordergrund. Man kann eine Menge von Gegenständen im Wesentlichen auf zwei Arten beschreiben: Entweder man listet alle Gegenstände auf, die zu der Menge gehören sollen, oder man gibt Merkmale an, die diejenigen Gegenstände auszeichnen, die zur Menge gehören. In der Mengensprache wird dies auf folgende zwei Weisen beschrieben:

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ oder $\{n|n$ ist natürliche Zahl kleiner $8\}$

Bei der einen Beschreibungsart werden also alle Elemente der Menge einzeln gelistet, bei der anderen besteht die Menge aus all denjenigen Elementen, die eine bestimmte Aussageform erfüllen. Beide Beschreibungsarten, die des Listens und die des Aussonderns, werden von der (linearen) Algebra aufgenommen und weiterentwickelt. Wie die listenartige Beschreibung durch algebraische Mittel erleichtert werden kann, lässt sich etwa an dem einfachen Beispiel eines Straßenbahnfahrplans erläutern:

Die "Menge der Abfahrtszeiten einer Straßenbahn-Linie" muss in einem Fahrplan für die Benutzer "gut" beschrieben werden. Statt eine vollständige Liste der Abfahrtszeiten mit sehr vielen Zahlenspalten anzugeben, werden oft nur wenige Zahlenspalten abgedruckt und dazwischen die Information "alle 15 Minuten" gesetzt. Die fehlenden Spalten können vom Benutzer durch fortlaufendes Addieren von 15 Minuten in den jeweiligen Zeilen selbst gebildet werden, d.h. die fehlenden Spalten werden mit Hilfe der angegebenen Spalten und der (einstelligen) Operation "alle 15 Minuten" *erzeugt*.

Generell ist das *Beschreiben durch Erzeugen* ökonomisch, übersichtlich und auch effektiv. An vielen Beispielen kann gezeigt werden, dass die Angabe von Erzeugenden und Erzeugungsoperationen eine allgemeine Methode zur vollständigen Beschreibung von Mengen darstellt:

– In der Analytischen Geometrie wird die Punktmenge einer Geraden, die durch den Punkt v geht und die Richtung w hat, erzeugt von dem Element v mit den (einstelligen) Operationen $+rw$ (r beliebig reell). Analog stellt die Parameterdarstellung der Ebene eine Beschreibung durch Erzeugen dar.
– Zur Klassifizierung der ebenen Ornamente macht man sich das Erzeugen in zweifacher Hinsicht zunutze: Zunächst werden die ebenen Ornamente selbst als durch Fundamentalfiguren (als Menge von Erzeugenden) und bestimmte Bewegungen (als Erzeugungsoperationen) erzeugt betrachtet, so dass die Klassifizierung der ebenen Ornamente auf die Bestimmung ihrer Symmetrien zurückgeführt werden kann. Dazu wird aktiviert, dass die Bewegungen sich durch Translationen und Spiegelungen (mit der Hintereinanderausführung als Erzeugungsoperation) erzeugen lassen.
– In der Theorie der Vektorräume bilden die Basen minimale Erzeugendensysteme, die Erzeugungsoperationen sind die Operationen des Vektorraumes: Jedes Element eines Vektorraumes lässt sich als Linearkombination von Basisvektoren darstellen.

Neubrand diskutiert das Prinzip des Erzeugens (unter dem Namen Baustein-Idee) auch für die Analysis und die Arithmetik und zeigt so, dass es als zentrale Idee der gesamten Mathematik gelten kann (1990b). Gleichwohl ist sie für die Lineare Algebra besonders tragend, denn gerade die Struktur der Vektorräume ist durch Erzeugen sehr gut zu beschreiben: In jedem n-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ lassen sich die (unendlich vielen) Elemente eindeutig durch nur n Basiselemente erzeugen. Die Stärke des Erzeugens zeigt sich auch an den linearen Abbildungen: In jedem n-dimensionalen Vektorraum ist eine lineare Abbildung bereits durch das Bild von n Basisvektoren bestimmt, die Bilder aller weiteren Elemente lassen sich leicht durch Linearkombination ermitteln. Diese strukturelle Einfachheit erlaubt auch eine einfache rechnerische Behandlung, denn sie ermöglicht z.B. die Matrizendarstellung von linearen Abbildungen sowie die Entwicklung höchst effizienter Algorithmen und somit eine gute Automatisierbarkeit. Beim Erzeugen zeigt sich also die Stärke der algebraischen Sprache, durch die das einfache Beschreiben durch Auflisten weiterentwickelt werden kann.

Der Stellenwert des Erzeugens innerhalb der Linearen Algebra, wie er hier angedeutet ist, sollte sich den Lernenden nach und nach erschließen. Dafür sind Reflexionen über das innermathematische Tun unerlässlich, die sowohl Beweistechniken, also die Ebene des "bewußten Handwerkens", als auch die Beziehungen innerhalb des Theoriegebäudes, d.h. die Ebene des "Hinterfragens mathematischen Arbeitens" betreffen.

Die Denkhandlung des Erzeugens ist auch außerhalb der Mathematik sehr verbreitet: Aus elementaren Bausteinen etwas Komplexeres herzustellen, ist ein sehr grundlegendes Prinzip, das in vielen Bereichen wieder auftaucht und unser Weltbild seit der Antike mitbestimmt. So versucht etwa in Gaarders Bestseller "Sofies Welt" der mysteriöse Philosophielehrer, seiner Schülerin Sofie die Atomtheorie Demokrits nahe zu bringen, indem er ihr die Frage stellt, warum Legosteine das genialste Spielzeug der Welt sind. Er rekurriert damit zur Erläuterung der Atomtheorie auf elementare Erfahrungen, die jedes Kind mit der Baustein-Idee machen kann (vgl. Gaarder 1993, S. 54f).

Die Spezifität des Erzeugens in der Mathematik liegt vor allem im Erzeugungsprozess selbst. Während er innermathematisch durch algebraische Erzeugungsoperationen genau beschrieben werden kann, hat das Erzeugen außerhalb der Mathematik oft mit kreativem Schaffen zu tun und besitzt deshalb meist nicht-formalisierbare Anteile. Daher ist es auch einem Kalkül schlechter zugänglich zu machen. Nur dort, wo zumindest gewisse algebraische Sprachmittel zur Verfügung stehen (wie etwa beim Straßenbahnfahrplan die Sprache der Zahlen), lässt sich der Erzeugungsprozess gut formalisieren.

Neben dem Erzeugen gibt es mit dem Aussondern eine zweite Möglichkeit, Mengen zu beschreiben. Dabei gibt man für eine Menge die Merkmale derjenigen Gegenstände an, die zur Menge gehören. Im Allgemeinen werden diese Merkmale durch Aussageformen beschrieben. Ein typisches Beispiel für Beschreiben durch Aussondern in außermathematischen Bereichen, bei dem die Zielgruppe durch eine Aussageform beschrieben wird, ist der folgende Satz: "In NRW ist das kommunale Wahlrecht für 16–18jährige eingeführt worden". Dieses allgemeine Beschreibungsverfahren wird in der Linearen Algebra auf diejenigen Aussageformen spezialisiert, die sich mit den Sprachmitteln der Linearen Algebra besonders gut formulieren lassen: lineare Gleichungen und Ungleichungen. Diese Idee steht etwa hinter den Koordinatenformen für Ebenen und Geraden in der analytischen Geometrie und wird durch die Theorie der dualen Vektorräume theoretisch ausgearbeitet.

Die Gemeinsamkeiten und Unterschiede des Aussonderns in der Mathematik und im alltäglichen Denken sollen hier nicht näher diskutiert werden, hingewiesen sei nur auf die Wechselwirkung mit dem Erzeugen: Da das Beschreiben durch Aussondern weniger direkt ist als das Beschreiben durch Erzeugen, werden immer wieder Lösungsverfahren für Gleichungen bzw. Gleichungssysteme nachgefragt, um zu listenartigen Beschreibungen oder Beschreibungen durch Erzeugende und Erzeugungsoperationen zu kommen. Das Lösen linearer Gleichungssysteme stellt sich somit als ein Beschreibungswechsel vom indirekten Beschreiben durch Aussondern zum direkten Beschreiben durch Erzeugen dar. Mit dem Beschreiben und dem Wechsel von Beschreibungen wollen wir uns im Folgenden eingehender beschäftigen.

2.3 Beschreibungswechsel

Beschreibungswechsel sind sowohl innerhalb der Linearen Algebra und der Mathematik allgemein als auch in außermathematischen Bereichen von großer Bedeutung. Sie haben das Ziel, Sachverhalte durch unterschiedliche Beschreibungen in ihren Beziehungen besser verstehen zu können und sie damit einer weiteren Bearbeitung leichter zugänglich zu machen. Ein reichhaltiger Fundus an Beschreibungsmitteln macht es möglich, sich die für den jeweiligen Zweck angemessene Beschreibung herauszusuchen und zu nutzen.

In der Linearen Algebra liegt ein Grundgedanke des Beschreibungswechsels im Wechsel zwischen Struktur- und Rechensprache; so ist etwa mit dem Übergang von linearen Abbildungen zu Matrizen eine bessere rechnerische Bearbeitung verbunden, die automatisiert werden kann. Dagegen sind beim Übergang von Matrizen zu linearen Abbildungen eher strukturelle Einsichten möglich, da konkrete Koordinatisierungen als Ballast wegfallen. Eine solche Denkweise ist aus der Schule im Bereich der analytischen Geometrie bekannt, wo zwischen algebraischer und geometrischer Beschreibung von Objekten gewechselt wird (vgl. etwa Tietze/Klika/Wolpers 1982).

Doch auch innerhalb der Rechensprache kann es von Vorteil sein, eine Beschreibung zu wechseln. Hier ist etwa der Wechsel zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten komplexer Zahlen zu nennen, aber auch der Übergang zwischen verschiedenen Matrizendarstellungen einer linearen Abbildung. Letzteres ermöglicht beim Übergang zur Normalform wieder strukturelle Einsichten über die Wirkung einer Abbildung. Auch auf der strukturellen Ebene sind Beschreibungswechsel möglich, wie etwa bei der Auswahl unterschiedlicher Erzeugendensysteme für die Bewegungen der Ebene (Klassifizierungssatz und Dreispiegelungssatz). Ein weiterer Beschreibungswechsel ist der oben schon ausgeführte Wechsel zwischen Erzeugen und Aussondern.

Auch in außermathematischen Bereichen werden Beschreibungswechsel vorgenommen. So werden die Versicherten einer Krankenkasse unter ihrem Namen und auch unter einer Versichertennummer geführt. Letztere hat den Vorteil, eindeutig zu sein und noch weitere Informationen über die versicherte Person zu enthalten, etwa das Geburtsdatum. Am Beispiel der Beschreibungen von Büchern lässt sich verdeutlichen, welche Vorzüge jeweils verschiedene Beschreibungen haben und dass die Auswahl der Beschreibungsart stark von dem angestrebten Zweck der Beschreibung abhängt: Bücher werden im Fachhandel unter einer ISBN-Nummer geführt, die vor allem den Vorteil hat, dass sie eindeutig ist und ihre Übertragung schnell und mit geringen Fehlern funktioniert. In ihr hat jedes Land und jeder Verlag bestimmte Ziffernfolgen, es folgen verlagsinterne Informationen, und am Ende steht eine Prüfziffer, die ein Auffinden von Übertragungsfehlern erleichtern soll. Die Beschreibung von Büchern durch ISBN-Nummern macht man sich zunutze, wenn man ein bekanntes Buch bestellt. Für die Suche nach einem für den Leser unbekannten Buch, das ihm über ein bestimmtes Themenfeld Aufschluss gibt, ist sie gänzlich ungeeignet. Hier helfen Beschreibungen durch Schlagwörter sowie, wenn man unter den aufgefundenen Kandidaten auswählen möchte, auch Rezensionen. Bei der Suche nach einem Geburtstagsgeschenk für Vater oder Mutter kann hingegen auch der Platz auf der Bestsellerliste eine gute Beschreibung für Bücher sein.

So wie man im Alltag ganz selbstverständlich eine für den jeweiligen Zweck gute Beschreibung auswählt, müssen die Lernenden auch innerhalb der Mathematik lernen abzuwägen, welche Beschreibung im Hinblick auf einen bestimmten Zweck am besten ist. Der Übergang von einer Beschreibung zu einer anderen ist innerhalb der Mathematik im Allgemeinen gut formal zu fassen und damit auch mechanisierbar (etwa Basiswechsel durch Transformationsmatrizen). Der hier erscheinende Zusammenhang zwischen dem Automatisieren und dem Formalisieren prägt auch außermathematische Beschreibungswechsel: Nur bei ausreichender Formalisierung der Beschreibung ist eine Automatisierung des Übergangs möglich. Als Beispiel mag der Wechsel zwischen verschiedenen Maßeinheiten dienen, bei dem der Übergang durch eine Zuordnungvorschrift beschrieben werden kann (z.B. Multiplikation mit 1000 beim Umrechnen von km in m). Selbst der Wechsel zwischen den Notenbeschreibungen im Violin- und Bassschlüssel ist voll automatisiert möglich (durch Verschiebung um einen Notenstrich und eine Oktave nach oben bzw. nach unten). Bei den Büchern ist die Automatisierung des Beschreibungswechsels nur auf der Basis von Datenbanken möglich, in denen alle Informationen, die zur Beschreibung nötig sind, abgelegt sein müssen. Es ist also nicht möglich, von einer Beschreibung auf formalem Weg eine andere abzuleiten.

Im Rahmen der Lehrveranstaltung zur Linearen Algebra kann demnach der Wechsel von Beschreibungen als ein wichtiges Grundprinzip mathematischen Handelns gelernt werden, das auch in außermathematischen Bereichen große Bedeutung hat. Erfahren die Lernenden, wie sie selber Beschreibungswechsel vornehmen können, um Sachverhalte zu erschließen, so leistet dies einen Beitrag auf der “Ebene des bewußten Handwerkens”. Das Abwägen zwischen verschiedenen Beschreibungen im Hinblick auf ihre Brauchbarkeit (und das entsprechende zielorientierte Wechseln zwischen Beschreibungen) erfordert Reflexion auf der “Ebene des Hinterfragens mathematischen Arbeitens”. Diese Dimension der Angemessenheit von Beschreibungen für bestimmte Zielsetzungen ist auch für mathematische Beschreibungen außermathematischer Phänomene, also Mathematisierungen, von großer Bedeutung, soll hier aber nicht näher diskutiert werden.

3. Mathematisches Denken lernen und lehren – Ansätze zur Umsetzung

Es herrscht unter Didaktikern weitgehend Einigkeit darüber, dass die eigene aktive Auseinandersetzung mit dem Fach Mathematik eine unabdingbare Voraussetzung dafür ist, sich mathematisches Denken und Handeln zu eigen machen zu können (vgl. etwa Freudenthal 1973, Wittmann 1991). Dem kann im Rahmen der Lehr- und Lernformen der Hochschule am besten in den Übungen und Tutorien Raum gegeben werden. Als Konsequenz der Wichtigkeit von eigenen praktischen Erfahrungen in der mathematischen Ausbildung wurde an der TU Darmstadt schon vor Jahren die Gewichtung im klassischen Lehrform-Duo von Vorlesung zu Übung und Tutorium verschoben, die nun im zeitlichen Verhältnis 1 : 1 angeboten werden.

Anhand der Übungs- und Tutoriumsaufgaben können zunächst an konkreten Beispielen und Problemen der Linearen Algebra Erfahrungen im mathematischen Tun gesammelt werden. Aufgaben haben hier den Zweck, neben ausreichendem Faktenwissen genügend Erfahrungshorizont in Bezug auf allgemeine und mathematische Denkhandlungen für spätere Reflexionen bereitzustellen. Doch wie bereits im ersten Abschnitt diskutiert wurde, reicht das bloße Mathematik-Betreiben nicht aus, um Mathematik sinnvoll lernen zu können. So weist Sjuts darauf hin, dass es nötig ist,

> “Wissen und Metakognition parallel, in gegenseitiger Ergänzung, aufzubauen. Der den Wissenserwerb begleitende metakognitive Prozess hat die Lernhandlungen in das Bewusstsein zu rücken, diese haben als solche Aufmerksamkeit zu beanspruchen und zu Bestandteilen des Unterrichts zu werden.” (Sjuts 1999, S. 44)

Eine solche Metakognition kann in den Übungen etwa durch ein bewusstes Einfordern von rückschauender Betrachtung des Lösungsprozesses im Sinne Polyas (1949) gefördert werden oder indem die Studierenden ihre eigenen Lösungswege im “Zweispaltenformat” kommentieren (s. die Ausführungen zur Selbstregulation in Sjuts 1999, S. 245–253). Ebenso wie Sjuts erscheint es uns dabei wichtig, dass der Aufbau von Metakognition dem Wissens- und Kompetenzerwerb nicht zeitlich nachgeordnet wird, sondern parallel geschieht.

Soll die Lehre nicht nur Metakognition, sondern auch Reflexionen auf den von Neubrand benannten Ebenen anregen, so muss sie vielschichtig angelegt sein. Daraus ergibt sich im Design der Übungen die Frage nach verschiedenen Aufgabentypen, die auf unterschiedlichen Niveaus Erfahrungen und Reflexionen vorbereiten, anregen und konkret zum Thema machen. Im Sinne eines spiralförmigen Curriculums müssen dabei Fachinhalte zunächst auf einem niedrigen Reflexionsniveau erlernt und aus der zeitlichen Distanz heraus später in neuen thematischen Zusammenhängen weiter reflektiert werden. (Das Konzept eines spiralförmigen Curriculums ist zwar didaktisches Allgemeingut, wird aber in der universitären Lehrpraxis mit ihrer Orientierung am systematisch-deduktiven Theorieaufbau selten realisiert.) So wurde etwa in der von uns betreuten Linearen Algebra, in der das Faktorisieren zunächst für Mengen, später für Gruppen und dann für Vektorräume thematisiert worden ist, bei jedem Aufgreifen des Themas unterschiedliche Schwerpunkte der Auseinandersetzung auf dem Bereich der Reflexion von Denkhandlungen gesetzt. Normalformen von Matrizen kamen im Lernprozess erst deutlich später und haben das Thema abgerundet.

Die Vorlesung kann den Prozess, Mathematik betreiben zu lernen, insofern unterstützen, als in ihr neben dem reinen Vortragen von Fakten auch die Vorgehensweisen der Mathematiker sowie die beiden oberen Neubrandschen Ebenen, die Ebene des Hinterfragens mathematischen Arbeitens und die wissenschaftstheoretische Ebene, thematisiert werden sollten. Denn nur was in der Vorlesung ausdrücklich Thema ist (und am Ende an der Tafel steht), wird von den Studierenden als Lerninhalt ernst genommen. Doch auch die Analyse des Vorgehens der Mathematiker muss durch viel eigene Übung ergänzt und verinnerlicht werden, was notwendig auch das Sprechen über Mathematik in einer Lerngruppe voraussetzt. Dazu sind Aufgaben wie z.B. “Wie wird auf S. xx im Skript vorgegangen und warum? Begründe Deinem Nachbarn die einzelnen Schritte” unerlässlich. Damit das Spezifische der Mathematik daran überhaupt deutlich werden kann, ist hierbei eine Reflexion der Gemeinsamkeiten und Unterschiede zum Alltagsdenken entscheidend. Ein solcher Anspruch lässt sich insbesondere in Tutorien als Ort des Sprechens über Mathematik umsetzen, wo größere Wissensbereiche auf verschiedenen Reflexionsebenen in ihrer Vernetzung abgedeckt werden können.

Es muss also Aufgaben geben, die Anlass zur Reflexion über das mathematische Arbeiten und über die Wissenschaft Mathematik als Ganzes explizit einfordern. Damit diese Aufgaben den gewünschten Effekt eines intensiven Nachdenkens erzielen, hat es sich als sehr hilfreich herausgestellt, neben dem Sprechen über Mathematik (in Gruppenübung und Tutorien) in den Hausübungen auch die schriftliche Auseinandersetzung mit und über Mathematik zu kultivieren. Welchen Stellenwert das Verfassen von Texten für das individuelle Lernen haben kann, haben Gallin und Ruf für Schüler überzeugend geschildert:

> “Weil das Schreiben den Gedankenfluß stark verlangsamt, erhält der Schüler Gelegenheit, seine eigenen Aktivitäten der Reflexion zugänglich zu machen, seine singuläre Art, Probleme anzupacken und zu lösen, wird dadurch nicht nur aufgewertet, sondern auch faßbar und diskutierbar. Individuelles Fragen und

Handeln wird kultiviert, es ist Basis und Instrument für das Entwickeln von Algorithmen und das Generieren von Texten." (Gallin/Ruf 1998, S. 91f)

Auch für Studierende ist die Methode hilfreich, durch das Verfassen von Texten das Reflektieren über Mathematik anzustoßen. Ihr wurde im Rahmen der Übungen zur Veranstaltung Lineare Algebra durch die Einführung einer "Aufsatzaufgabe" (als jeweils eine von fünf Aufgaben) Rechnung getragen. Die Aufgaben sollen helfen, sich mit den zentralen Denkhandlungen, Begriffen und Ideen der linearen Algebra und ihrem Stellenwert innerhalb der Theorie auseinander zu setzen sowie ihre Übertragung auf außermathematische Felder zu reflektieren. So wurden im vorletzten bzw. letzten Zyklus z.B. die folgenden Aufgaben gestellt:

- "Erläutern Sie an unterschiedlichen Beispielen, dass die komplexen Zahlen ein reichhaltiges Sprachmittel zur Beschreibung von geometrischen Sachverhalten sind. (Beispiele: Geraden, Distanzen, Kreise, Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen, Punktgitter,...)"
- "Finden Sie unterschiedliche Beispiele für Äquivalenzrelationen im Alltag. Geben Sie jeweils die Grundmenge und die Relation an. Wieweit kann man die Faktormenge angeben? Geben Sie den Klassen der Klasseneinteilung Ihrer Beispiele möglichst gute Namen."
- "Verfassen Sie einen Text, in dem Sie die Vorteile des Beschreibens durch Erzeugen (inner- oder außerhalb der Mathematik) darlegen."
- "Der Wechsel von Beschreibungen, wie er bei der Basistransformation thematisiert wird, ist Ihnen in der Linearen Algebra schon mehrfach begegnet. Geben Sie Beispiele an. Erläutern Sie an den komplexen Zahlen, wofür Beschreibungswechsel hilfreich sein können."
- "Beschreibungswechsel benutzen wir auch außerhalb der Mathematik, denn auch für außermathematische Phänomene sind verschiedene Beschreibungen je nach Zusammenhang zweckmäßig. Geben Sie dafür Beispiele an und erläutern Sie, wie man eine Beschreibung in die andere überführt."

Zwar ist der Typ Aufgabenstellung für die Studierenden zu Beginn ungewohnt, doch nicht zuletzt, weil auch in der Klausur eine solche Aufgabe vorkommt, setzen sich die Studierenden nach anfänglicher Irritation über die ungewohnten "Laber-Aufgaben" gewinnbringend mit solchen Fragestellungen auseinander und liefern zum Teil beachtliche Ergebnisse. Zur Illustration seien hier Ausschnitte aus zwei Lösungen zur letztgenannten Frage nach Beschreibungswechseln im Alltag von Informatik-Studierenden des zweiten Semesters zitiert, die von durchaus unterschiedlichem Reflexionsniveau zeugen. So schreibt ein Student:

"Im Alltag findet man viele Beispiele für Beschreibungswechsel:

1. Bsp.: Die Post verwendet fünfstellige Postleitzahlen, um einen Ort in Deutschland darzustellen. Diese Darstellung wird benutzt, um die automatische Sortierung der Zustellungen zu erleichtern.
2. Bsp.: Ein weiterer Beschreibungswechsel ist der Wechsel zwischen verschiedenen Sprachen zur besseren Verständigung mit seinen Mitmenschen.
3. Bsp.: Im Computer werden die Befehle des Programmierers in einen binären Code umgewandelt, um sie auch physisch in der Maschine auszuführen."

Eine andere Studentin führt aus:

"Ein Beispiel ist die in Europa praktizierte Unterscheidung zwischen Sommer- und Winterzeit. Jeweils im Frühjahr und Herbst wird zu einem genau festgelegten, allen bekannten Termin das 'Bezugssystem Uhrzeit' verschoben, indem alle Uhren um 1 Stunde vor bzw. zurückgedreht werden. Ziel ist eine verbesserte Ausnutzung des Tageslichts und dadurch u.a. das Sparen von Strom. [...]
Ein weiteres Beispiel für den Wechsel von Beschreibungen ist das Postleitzahlensystem. Hierbei wird jeder Stadt bzw. jedem Ort eine zur Zeit in Deutschland 5-stellige Postleitzahl zugeordnet, wobei die Postleitzahlen von in derselben Region liegenden Städten mit derselben Ziffer beginnen (z.B. liegen Frankfurt, Darmstadt etc. im 60000er Bereich). Durch diesen Wechsel von Namen zu Ziffernfolgen wird das Zustellen von Briefen und Paketen sowie eine grobe geographische Einordnung unbekannter Orte erleichtert. Jedoch gibt es, anders als in den beiden vorangegangenen Beispielen, kein einfaches Verfahren zur Umrechnung, so dass die Post Nachschlagewerke herausbringen muss, in denen jeder einzelne Ort Deutschlands mit der zugehörigen Ziffernfolge aufgelistet wird."

Die oben angeführten Anregungen und Beispiele zur Gestaltung von Vorlesung, Übung und Tutorium machen deutlich, dass es bei einem solchen Ansatz nicht ausreicht, lokale methodische Veränderungen an der Veranstaltungskonzeption vorzunehmen. Vielmehr bringt der Ansatz, neben der Vermittlung von Fakten auch über mathematisches Denken und seine Beziehungen zum Alltagsdenken beim Mathematiklernen nachzudenken, nicht nur eine grundsätzliche Umgestaltung der Lehrveranstaltung in methodischer Hinsicht mit sich. Er verändert auf der Ebene der Fachinhalte in einschneidender Weise den Lerngegenstand an sich, d.h. es wird eine andere Mathematik gelernt. Diese Reflexion selbst stellt nämlich einen wichtigen Bildungsinhalt dar, da sie die Basis eines reflektierten Mathematikverständnisses ist, das Mathematik als Verstärker des Alltagsdenkens im Heymannschen Sinne begreift und sich der Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Denk- und Handlungsweisen in unserer Welt bewusst ist (vgl. Lengnink/Peschek 1997). Daher wird sie das Bild von Mathematik erheblich verändern.

Damit ein solches Programm gelingen kann, muss sich zunächst das grundsätzliche Bild der Lehrenden, d.h. der Hochschulmathematiker, vom Lerngegenstand und von der Wissenschaft Mathematik ändern. Kennzeichen eines solchen Mathematikbildes sind:

"– die Einstellung, Mathematik für die Allgemeinheit zu öffnen, sie prinzipiell lernbar und kritisierbar zu machen,
  - die Darstellung mathematischer Entwicklungen in ihren Sinngebungen, Bedeutungen und Bedingungen,
  - die Vermittlung der Mathematik in ihrem lebensweltlichen Zusammenhang über die Fachgrenzen hinaus,
  - die Auseinandersetzung über Ziele, Verfahren, Wertvorstellungen und Geltungsansprüche der Mathematik."
  (Wille 1995, S. 5)

Durch solche Veränderungen auf der Ebene der Lerninhalte und der Grundhaltungen hoffen wir, auch bei den Lernenden ein verändertes Mathematikbild aufzubauen, das eher einer offenen, kulturell gewachsenen und am menschlichen Denken angebundenen Mathematik entspricht.

4. Literatur

Bauer, L. (1978): Mathematische Fähigkeiten: mathematische Fähigkeiten in der Sekundarstufe II und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben. – Paderborn: Schöningh

Bauer, L. (1988): Mathematik und Subjekt. Eine Studie über pädagogisch-didaktische Grundkategorien und Lernprozesse im Unterricht. – Wiesbaden: Dt. Universitätsverlag

Bishop, A. J. (1988): Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education. – Dordrecht: Kluwer Academic Publ.

Bruder, R. (1993): Verlaufseigenschaften des Denkens im Mathematikunterricht erkennen und fördern. – In: Mathematik Lehren (H. 56), S. 20–56

Bruder, R. (1992): Problemlösen lernen – aber wie. Ein altes, aber nicht befriedigend gelöstes Thema. – In: Mathematik Lehren (H. 52), S. 6–12

Fischer, R. (1976): Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. – In: ZDM 8 (H. 4), S. 185–192

Freudenthal, H. (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1. – Stuttgart: Klett Verlag

Gaarder, J. (1993): Sofies Welt. Ein Roman über die Geschichte der Philosophie. – München: Hanser

Gallin, P.; Ruf, U. (1998): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. – Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung (erstmals 1990)

Glatfeld, M. (Hg.) (1990): Finden, Erfinden, Lernen – zum Umgang mit Mathematik unter heuristischem Aspekt. – Frankfurt am Main: Lang

Hefendehl-Hebeker, L. (1997): Geometrie-Unterricht als Chance für die Mathematik. – In: Mathematica Didactica 20 (H. 2), S. 79–93

Hersh, R. (1997): What is Mathematics, really? – London: Jonathan Cape

Heyer, U.; König, H. (1992): Heuristische Vorgehensweisen bewußt herausbilden – Methodische Empfehlungen für den Mathematikunterricht. – In: Der Mathematikunterricht 38 (H. 3), S. 51–65

Heymann, H. W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. – Weinheim/Basel: Beltz

Kitcher, P. (1984): The nature of mathematical knowledge. – New York: Oxford University Press

Lengnink, K. (1996): Formalisierungen von Ähnlichkeit aus Sicht der Formalen Begriffsanalyse. – Aachen: Shaker Verlag

Lengnink, K.; Peschek, W. (1997): Das Verhältnis von Alltagsdenken und mathematischem Denken als Inhalt mathematischer Bildung. – Manuskript, TU Darmstadt

Lenné, H. (1975): Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. – Stuttgart: Klett Verlag

Lompscher, J. et al. (1972): Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten. – Berlin: Volk und Wissen

Mathematiklehren (1992) Heft 52: Problemlösen lernen

Neubrand, M. (1990a): Stoffvermittlung und Reflexion: Mögliche Verbindungen im Mathematikunterricht. – In: Mathematica Didactica 13 (H. 1), S. 21–48

Neubrand, M. (1990b): Über Mathematik sprechen – Möglichkeiten und Beispiele aus der Analysis. – In: Glatfeld (1990), S. 62–83

Polya, G. (1949): Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. – Bern: Francke

Polya, G. (1975): Mathematik und plausibles Schließen, Band 1 und 2. – Basel/Stuttgart: Birkhäuser Verlag

Schweiger, F. (1982): Fundamentale Ideen der Analysis und handlungsorientierter Mathematikunterricht. – In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 103–111

Sjuts, J. (1999): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: Theoretische Einordnung, konzeptionelle Abgrenzung und interpretative Auswertung eines kognitions- und konstruktivismusgeleiteten Mathematikunterrichts. – Osnabrück: Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematikdidaktik

Tietze, U.-P.; Klika, M.; Wolpers, H. (1982): Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sek. II. – Braunschweig: Vieweg

Tversky, A. (1977): Features of similarity. – In: Psychological Review 84, S. 327–352

Wachsmuth, I. (1985): Mathematische Fertigkeiten und Mathematikverständnis. – Bad Salzdetfurth

Wille, R. (1981): Versuche der Restrukturierung von Mathematik am Beispiel der Grundvorlesung "Lineare Algebra". – In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 102–112

Wille, R. (1995): Allgemeine Mathematik als Bildungskonzept für die Schule. – In: Biehler, R.; Heymann, H. W.; Winkelmann, B. (Hg.): Mathematik allgemeinbildend unterrichten. – Köln: Aulis, S. 41–55

Winter, H. (1972): Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. – In: KM-NRW (Hg.): Beiträge zum Lernzielproblem, Heft 16. – Ratingen: Henn Verlag

Winter, H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. – Braunschweig: Vieweg

Wittmann, E. (1987): Elementargeometrie und Wirklichkeit. Einführung in geometrisches Denken. – Braunschweig: Vieweg

Wittmann, E. (1991): Mathematikunterricht zwischen Skylla und Charybdis. – In: Mitteilungen d. math. Ges. Hamburg 12(3), S. 663–679

Autorinnen

Lengnink, Katja, Dr., Arbeitsgruppe Fachdidaktik, Fachbereich Mathematik, Technische Universität Darmstadt, D-64289 Darmstadt. E-mail: lengnink@mathematik.tu-darmstadt.de

Prediger, Susanne, Dr., Arbeitsgruppe Fachdidaktik, Fachbereich Mathematik, Technische Universität Darmstadt, D-64289 Darmstadt. E-mail: prediger@mathematik.tu-darmstadt.de